UNIVERSITÉ DE RENNES 1

Topologie algébrique

TD

Feuille d'exercices 3

Exercice 1

Soit $i : Y \subset X$ un retract et $r : X \to Y$ la retraction. Soit $y \in Y$. Montrer :

1. Les morphismes

$$i_* : \pi_1(Y, y) \to \pi_1(X, y) \quad \text{et} \quad r_* : \pi_1(X, y) \to \pi_1(Y, y)$$

ont les propriétés : i_* est injectif et r_* est surjectif.

2. Si i est un retract par deformation, alors les morphismes i_* et r_* sont bijectifs.

Exercice 2

Montrer :

1. $\mathbb{S}^1$ n'est pas un retract de $\mathbb{B}^2$.
2. Le groupe $\pi_1(\mathbb{C}^\times, 1)$ est isomorphe à $\mathbb{Z}$.
3. La retraction $\mathbb{R}^2 \setminus (1, 0) \to \{0\} \times \mathbb{R}, (x, y) \mapsto y$ n'est pas une retraction par deformation.
4. Si $X = \mathbb{R}^3 \setminus L$ où L est la droite $\{(0, 0)\} \times \mathbb{R}$, alors $\pi_1(X, (1, 0, 0)) \simeq \mathbb{Z}$.

Exercice 3

Soient X, Y deux espaces et p_1 (resp. p_2) la projection de $X \times Y$ sur X (resp. sur Y). Soient $x \in X$ et $y \in Y$. Montrer que les applications $(p_i)_*$ induisent un isomorphisme de groupes

$$\pi_1(X \times Y, (x, y)) \xrightarrow{\simeq} \pi_1(X, x) \times \pi_1(Y, y).$$

Est-ce qu'on peut expliciter l'application inverse ?

Calculer les groupes fondamentales du cylindre $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$ et du cylindre compact $\mathbb{S}^1 \times I$.

Exercice 4

Soit $n \geqslant 1$. Le *tore de dimension* n est $\mathbb{T}^n := (\mathbb{S}^1)^n$. Soit $z_0 = (1, ..., 1) \in \mathbb{T}^n$.

1. Le tore $\mathbb{T}^n$ est isomorphe, comme groupe topologique, au groupe quotient $\mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$.

2. On a un isomorphisme $\pi_1(\mathbb{T}^n, z_0) \simeq \mathbb{Z}^n$. Une base de $\pi_1(\mathbb{T}^n, z_0)$ est donné par les n injections $z \mapsto (z, 1, ..., 1), z \mapsto (1, z, 1, ..., 1), ..., z \mapsto (1, ..., 1, z)$ de $\mathbb{S}^1$ dans $\mathbb{T}^n$.

3. Une matrice $A \in Mat_n(\mathbb{Z})$ de taille n à coefficients entiers induit une application continue h_A de $\mathbb{T}^n$ sur lui-même avec $h_A(z_0) = z_0$.

4. Soit $A \in Mat_n(\mathbb{Z})$. La matrice de l'endomorphisme $(h_A)_*$ de $\pi_1(\mathbb{T}^n, z_0)$ dans la base de 2. est donnée par A.

5. Soit $A \in Mat_n(\mathbb{Z})$. Pour que h_A soit un homéomorphisme de $\mathbb{T}^n$ sur lui-même, il faut et il suffit que le déterminant de A soit ± 1.

Exercice 5

Soit $p : \mathbb{R} \to \mathbb{S}^1$ la projection $t \mapsto e^{2i\pi t}$. Pour $n \in \mathbb{Z}$, soit $\gamma_n : I \to \mathbb{S}^1$ l'application $t \mapsto p(nt)$. Soit $z_0 = 1 \in \mathbb{S}^1 \subset \mathbb{C}$.

1. Montrer que l'application $\mathbb{Z} \to \pi_1(\mathbb{S}^1, z_0)$ donnée par $n \mapsto [\gamma_n]$, est un morphisme de groupes, en utilisant que $\mathbb{S}^1$ est un groupe topologique avec l'élément neutre z_0.

2. Soit $H : I^2 \to \mathbb{S}^1$ une application continue telle que $H(0, 0) = z_0$. Montrer qu'il existe une application continue unique $\widetilde{H} : I^2 \to \mathbb{R}$ telle que $\widetilde{H}(0, 0) = 0$ et $p \circ \widetilde{H} = H$.

3. Soit $A = \{0, 1\} \subset I$. Montrer que les deux applications $I \to \mathbb{S}^1$ données par γ_1 et l'application constante z_0 sont homotopes, mais pas homotopes relativement A.

Exercice 6

Montrer :

1. Soit X un espace topologique et $x \in X$. Soit C la composante connexe par arcs de x dans X. L'injection $i : C \to X$ induit un isomorphisme $i_* : \pi_1(C, x) \xrightarrow{\simeq} \pi_1(X, x)$.

2. L'espace $SO_n(\mathbb{R})$ est connexe par arcs.

3. L'espace $O_n(\mathbb{R})$ a deux composants connexes.

4. On a des isomorphismes de groupes $\pi_1(SO_n(\mathbb{R}), 1) \xrightarrow{\simeq} \pi_1(O_n(\mathbb{R}), 1) \xrightarrow{\simeq} \pi_1(GL_n(\mathbb{R}), 1)$.

5. On a un isomorphisme de groupes $\pi_1(SO_2(\mathbb{R}), 1) \simeq \mathbb{Z}$.