UNIVERSITÉ DE RENNES 1

Topologie algébrique

TD

Feuille d'exercices 2

Exercice 1

Soient X, Y deux espaces homotopiquement equivalents et soit $f : X \to Y$ une equivalence d'homotopie.

1. Soit C une composante (par arcs) de X et $f_*(C)$ la composante connexe (par arcs) de Y qui contient l'image $f(C)$. Montrer que f_* induit une bijection entre les composantes connexes (par arcs) de X et de Y.
2. En déduire que X et Y ont le meme nombre de composantes connexes (par arcs). En particulier, X est connexe (par arcs) si et seulement si Y est connexe (par arcs).

Exercice 2

Un espace séparé tel que tout point a un voisinage homéomorphe à un ouvert de $\mathbb{R}^n$ s'appelle *une variété topologique (de dimension n)*.

1. Montrer que $\mathbb{S}^n$ est une variété topologique de dimension n.
2. On considère l'action de $\mathbb{R}^\times$ sur $(\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\})$ donnée par $\lambda x := (\lambda x_1, \lambda x_2, ..., \lambda x_{n+1})$ pour $\lambda \in \mathbb{R}^\times$. *L'espace projectif réel de dimension n* est définit par $P^n\mathbb{R} := (\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\})/\sim$, où la relation $\sim$ est définie par $x \sim y$ si $x = \lambda y$ pour un certain $\lambda \in \mathbb{R}^\times$. Montrer que $P^n\mathbb{R}$ admet un recouvrement ouvert $P^n\mathbb{R} = \cup_{j=1,\dots,n+1} U_j$ avec $U_j \simeq \mathbb{R}^n$ pour tout j. En déduire que $P^n\mathbb{R}$ est une variété topologique de dimension n.

Exercice 3

Soient $\gamma, \gamma', \gamma''$ trois chemins dans un espace topologique X avec $\gamma(1) = \gamma'(0)$ et $\gamma'(1) = \gamma''(0)$. Soit H l'application de $I \times I$ dans X définie par

$$H_s(t) = \begin{cases} \gamma(\frac{4t}{1+s}) & \text{pour} \quad 0 \leqslant t \leqslant \frac{1+s}{4} \\ \gamma'(4t-s-1) & \text{pour} \quad \frac{1+s}{4} \leqslant t \leqslant \frac{2+s}{4} \\ \gamma''(\frac{4t-s-2}{2-s}) & \text{pour} \quad \frac{2+s}{4} \leqslant t \leqslant 1. \end{cases}$$

Montrer que H est une homotopie de $(\gamma\gamma')\gamma''$ à $\gamma(\gamma'\gamma'')$ à extrémités fixées.

Exercice 4

Soit X un espace topologique et $x_0 \in X$. Soit $p : t \mapsto e^{2i\pi t}$ la projection du segment $[0,1]$ sur $\mathbb{S}^1 \subset \mathbb{C}$. On note $z_0 := 1 \in \mathbb{S}^1$. Pour une application continue $\widehat{\gamma} : \mathbb{S}^1 \to X$ avec $\widehat{\gamma}(z_0) = x_0$, on note $\gamma := \widehat{\gamma} \circ p$ le lacet de base x_0 correspondant. Montrer que les énoncés suivants sont équivalents :

1. γ est nullhomotope en tant que lacet basé en x_0 (i.e. $[\gamma] = 1$ dans $\pi_1(X, x_0)$).
2. $\widehat{\gamma}$ est homotope relativement au sous-ensemble $\{z_0\}$ à une application constante.
3. $\widehat{\gamma}$ est homotope à une application constante (sans contrainte sur l'image de z_0).
4. $\widehat{\gamma}$ s'etend en une application continue du disque $\mathbb{B}^2$ dans X.

Exercice 5

Soit X un espace topologique et $x_0 \in X$. On note $z_0 := 1 \in \mathbb{S}^1$. Pour une application continue $\widehat{\gamma} : \mathbb{S}^1 \to X$ avec $\widehat{\gamma}(z_0) = x_0$, on note γ le lacet de base x_0 correspondant (cf. exercice 4).

1. Montrer que $\widehat{\gamma} \mapsto \gamma$ induit une bijection entre l'ensemble des applications $\mathbb{S}^1 \to X$ envoyant z_0 sur x_0, modulo homotopie relative au sous-ensemble $\{z_0\}$, et l'ensemble $\pi_1(X, x_0)$.
2. Si $\widehat{\gamma}$ et $\widehat{\gamma'}$ sont homotopes (non-relative, sans contrainte sur l'image de z_0), montrer que les classes d'homotopie $[\gamma]$ et $[\gamma']$ sont conjugées dans $\pi_1(X, x_0)$.

Exercice 6

Un *groupe topologique* est un espace topologique G muni d'une structure de groupes tel que les applications de multiplication $m : G \times G \to G$ et d'inverse $i : G \to G$ definies par $m(x,y) = xy$ et $i(x) = x^{-1}$ sont continues. Exemples : $\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{S}^1, GL_n(\mathbb{R}), SL_n(\mathbb{R}), O_n(\mathbb{R}), U_n(\mathbb{C})$.

Soit G un groupe topologique.

1. Montrer que toutes les composantes connexes (par arcs) de G sont homéomorphes entre elles.
2. Montrer que la composante connexe (par arcs) de $1 \in G$ est un sous-groupe distingué de G.
3. Etant donnés deux lacets γ, γ' basés en $1 \in G$, le *chemin produit* $\gamma \cdot \gamma'$, défini par $t \mapsto \gamma(t)\gamma'(t)$, est un lacet basé en 1. Montrer que les quatre lacets

$$\gamma\gamma', \gamma \cdot \gamma', \gamma'\gamma, \gamma' \cdot \gamma$$

sont homotopes. En déduire que le groupe fondamental $\pi_1(G, 1)$ est abélien.