UNIVERSITÉ DE RENNES 1

Topologie algébrique

TD

Feuille d'exercices 1

Exercice 1

Soit $N := (0, ..., 0, 1) \in \mathbb{R}^{n+1}$ et $H := \{y \in \mathbb{R}^{n+1} : y_{n+1} = 0\}$. Montrer :

1. Soit $x \in \mathbb{S}^n \setminus \{N\}$ et $g_x \subset \mathbb{R}^{n+1}$ la droite qui passe par N et x. Alors

$$g_x \cap H = \{(\frac{x_1}{1 - x_{n+1}}, ..., \frac{x_n}{1 - x_{n+1}}, 0)\}.$$

2. L'application

$$p_N : \mathbb{S}^n \setminus \{N\} \xrightarrow{\simeq} H,\ \ x \mapsto (\frac{x_1}{1 - x_{n+1}}, ..., \frac{x_n}{1 - x_{n+1}}, 0)$$

est un homéomorphisme avec l'application inverse $p_N^{-1}(y) := (\frac{2y_1}{||y||^2+1}, ..., \frac{2y_n}{||y||^2+1}, \frac{||y||^2-1}{||y||^2+1})$. On appelle p_N *la projection stéréographique* par rapport au point N.

3. L'application p_N et la projection $H \to \mathbb{R}^n, y \mapsto (y_1, ..., y_n)$ induisent un homéomorphisme

$$\mathbb{S}^n \setminus \{N\} \simeq \mathbb{R}^n.$$

Exercice 2

Soit $C \subset \mathbb{R}^n$ un convexe compact d'intérieur non vide. Montrer qu'il existe un homéomorphisme

$$h : C \xrightarrow{\simeq} \mathbb{B}^n$$

tel que $h(\partial C) = \mathbb{S}^{n-1}$.

Exercice 3

Soient $f, g : X \to \mathbb{S}^n$ deux applications continues. Montrer :

1. Si $f(x) \neq -g(x)$ pour tout $x \in X$, alors $f \sim g$.

2. Soit $A \subset X$ avec $f|_A = g|_A$. Si $\mathrm{im}(f) \cup \mathrm{im}(g) \subsetneq \mathbb{S}^n$, alors $f \sim_A g$.

Exercice 4

1. Montrer que $\mathbb{S}^n$ est un retract par déformation de $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$.

2. Soit $X = \mathbb{R}^2 \setminus (\pm 1, 0)$ et $HUIT \subset X$ la réunion des cercles de rayon 1 centrés en $(-1, 0)$ et $(1, 0)$. Montrer que $HUIT$ est un retract par déformation de X.

Exercice 5

Soit X un espace contractile. Montrer :

1. Il existe une application continue $H : X \times I \to X$ telle que $H_0 = \mathrm{id}$ et H_1 est constante.
2. Si $f, g : Z \to X$ sont deux applications continues, elles sont homotopes.
3. Toute application continue $f : X \to Y$ est homotope à une application constante.
4. Si Y est connexe par arcs, toute paire d'applications continues $f, g : X \to Y$ sont homotopes.

Exercice 6

Soient

$$U_n(\mathbb{R}) \subset B_n(\mathbb{R}) \subset GL_n(\mathbb{R})$$

les matrices triangulaires supérieures (unipotentes) et $D_n(\mathbb{R}) \subset B_n(\mathbb{R})$ les matrices diagonales. Montrer :

1. L'application de multiplication

$$D_n(\mathbb{R}) \times U_n(\mathbb{R}) \xrightarrow{\simeq} B_n(\mathbb{R}), (A, M) \mapsto AM$$

est un homéomorphisme.

2. On a un homéomorphisme $U_n(\mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}^{n(n-1)/2}$. En déduire que $U_n(\mathbb{R})$ est contractile et

$$D_n(\mathbb{R}) \sim B_n(\mathbb{R}).$$

3. Soit $B_n^+(\mathbb{R}) \subset B_n(\mathbb{R})$ le sous-groupe des matrices (a_{ij}) avec $a_{ii} > 0$ pour tout i. L'application de multiplication

$$O_n(\mathbb{R}) \times B_n^+(\mathbb{R}) \xrightarrow{\simeq} GL_n(\mathbb{R})$$

est un homéomorphisme (*la décomposition d'Iwasawa*).

Indication : Le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt donne l'application inverse.

4. Les espaces $D_n^+(\mathbb{R}) := D_n(\mathbb{R}) \cap B_n^+(\mathbb{R})$ et $B_n^+(\mathbb{R})$ sont contractiles. En déduire que

$$O_n(\mathbb{R}) \sim GL_n(\mathbb{R}).$$