LA THEORIE DES JEUX ET LES OUTILS D'ANALYSE DES COMPORTEMENTS STRATEGIQUES[1]

Thierry Pénard

Université de Rennes 1, CREM

Octobre 2004

La théorie des jeux est un outil d'analyse des comportements humains qui a connu un essor considérable depuis la parution de l'ouvrage de Von Neumann et Morgenstern [2] *« The Theory of Games and Economic Behavior »* en 1944.

La théorie des jeux permet de décrire et d'analyser de nombreuses relations économiques et sociales sous la forme de jeux stratégiques. Ses domaines d'application sont multiples. Si les économistes ont été les premiers à s'approprier cet outil, ils ont été depuis rejoint par les sociologues et les chercheurs en sciences politiques.

Nous commencerons par définir la notion de jeu stratégique. Puis, nous montrerons que la théorie des jeux permet de prédire les *équilibres* d'un jeu - c'est à dire les états dans lesquels aucun joueur ne souhaite modifier son comportement compte tenu du comportement des autres joueurs. Nous verrons aussi qu'un jeu est caractérisé par la qualité et la quantité d'informations dont les joueurs disposent. Nous distinguerons les jeux à *information complète* et *incomplète* et les jeux à *information parfaite* et

---

[1] Ce travail s'appuie en grande partie sur le chapitre 7 du manuel « Microeconomics » de A. Schotter.

[2] John Von Neumann et Oskar Morgenstern sont les premiers à avoir appliqué la théorie des jeux à l'économie. Von Neumann (1903-1957) était un mathématicien de l'Institute of Advanced Study à Princeton, et Morgenstern (1902-1977) un économiste de l'Université de Princeton. En fait, Von Neumann inventa la théorie des jeux en 1928 quand il démontra le théorème du minimax. Notons que les mathématiciens français Borel et Ville participèrent également à cette époque à l'élaboration de la théorie des jeux. C'est à Ville que l'on doit par exemple la démonstration géométrique habituellement utilisée pour prouver le théorème du minimax.

imparfaite. Par ailleurs, un jeu peut être répété sur plusieurs périodes. Cette répétition modifie l'ensemble des équilibres du jeu et peut sous certaines conditions générer des équilibres coopératifs.

Nous reviendrons aussi sur le débat qui a opposé deux économistes américains, Fisher et Shapiro, sur l'intérêt réel de la théorie des jeux et sur son influence dans les travaux de recherche en économie industrielle.

Nous mettrons par ailleurs l'accent sur l'économie expérimentale (expériences de laboratoire) qui permet de tester les prédictions de la théorie des jeux.

1 DEFINITION DES JEUX STRATEGIQUES :

Qu'entendons-nous par jeu stratégique ? Une personne est engagée dans un jeu stratégique avec une autre personne (ou plusieurs personnes) quand son utilité et ses gains sont affectés non seulement par les actions qu'il entreprend mais aussi par les actions des autres. Par exemple, les échecs sont clairement un jeu stratégique parce que la victoire ou la défaite d'un des joueurs dépend autant de ses propres choix tactiques que de ceux de son rival. De nombreuses situations économiques se ramènent à des jeux stratégiques. Par exemple, les profits d'une firme automobile comme Renault ne dépendent pas de ses seuls choix en matière de prix, mais aussi des prix annoncés par ses concurrents comme Peugeot, Volkswagen, Fiat ou Ford. De même, les conflits politiques ont souvent les caractéristiques d'un jeu stratégique.

De façon plus précise, **un jeu stratégique** est un ensemble de règles qui encadre ou contraint le comportement des joueurs et qui détermine les gains des joueurs sur la base des actions entreprises. Selon cette terminologie, un jeu stratégique suppose une définition claire des règles de comportements des joueurs. Que doivent spécifier ces règles ?

Premièrement, elles doivent nous dire qui sont les joueurs et si la chance ou le hasard est présent dans le jeu (comme dans les jeux des cartes). Quand la chance intervient et peut affecter l'issue du jeu, il est courant de transformer cette dernière en un joueur imaginaire appelé la "chance".

Deuxièmement, les règles d'un jeu stratégique doivent préciser l'ordre dans lequel les joueurs effectueront leurs choix. Nous devons savoir qui joue le premier, qui joue le second et ainsi de suite. Nous devons aussi savoir quels sont les choix possibles des joueurs.

Enfin, les règles doivent nous dire quelle utilité chaque joueur retirera à la fin du jeu pour chaque combinaison de choix possibles. Quand nous achetons un jeu de société comme le Monopoly, nous trouvons toujours à l'intérieur de la boite une notice ou une règle du jeu donnant toutes ces d'informations.

Les règles du jeu et les gains contingents peuvent être représentées par ce que les théoriciens des jeux appellent un **arbre**. Ce dernier offre une description détaillée des règles du jeu et est aussi appelé la **forme extensive** du jeu. Pour comprendre ce qu'est un arbre ou une forme extensive, considérons l'exemple suivant.

EXEMPLE 1

DELL contre Compaq : les règles d'un jeu de standardisation

Supposons qu'il n'existe que deux firmes dans le monde construisant des ordinateurs, DELL et Compaq. Avant de produire leurs ordinateurs, ces firmes doivent décider de rendre leurs machines compatibles ou non en adoptant le même système d'exploitation. Nous supposons qu'elles ont le choix entre les systèmes d'exploitation LINUX et WINDOWS. Clairement, la compatibilité bénéficierait aux utilisateurs, mais aussi aux deux constructeurs. Elle permettrait à DELL de vendre ses produits périphériques, comme les graveurs ou les lecteurs de DVD, aux utilisateurs d'ordinateurs Compaq et inversement[3]. Cependant, pour des raisons liées à l'histoire des deux firmes, chacune préférerait que ce soit l'autre qui fasse l'effort de s'adapter. Par exemple, nous considérons que DELL préfère le système WINDOWS et Compaq le système LINUX.

Pour décrire ce jeu stratégique, nous supposons que DELL a une avance technologique sur Compaq dans la conception des ordinateurs ce qui lui permet d'annoncer le premier le système d'exploitation qu'il a retenu pour ses ordinateurs. En Janvier de l'année concernée, DELL tient une conférence de presse où il s'engage sur un système, soit LINUX, soit WINDOWS. Après avoir pris acte de cette annonce, Compaq décide de tenir une conférence de presse en Mars pour annoncer sa décision. Une fois que les deux firmes se sont engagées sur un système, la production peut commencer. Les profits de chaque firme sont les suivants. Si les deux ont choisi WINDOWS, le résultat s'interprète comme une victoire de DELL, parce que son système devient le standard du marché. Si les deux firmes choisissent LINUX, c'est Compaq le grand vainqueur. Toutefois, quel que soit le système sélectionné par les deux firmes, l'important c'est de faire le même choix, car la compatibilité des ordinateurs est mieux pour les deux firmes que la non compatibilité.

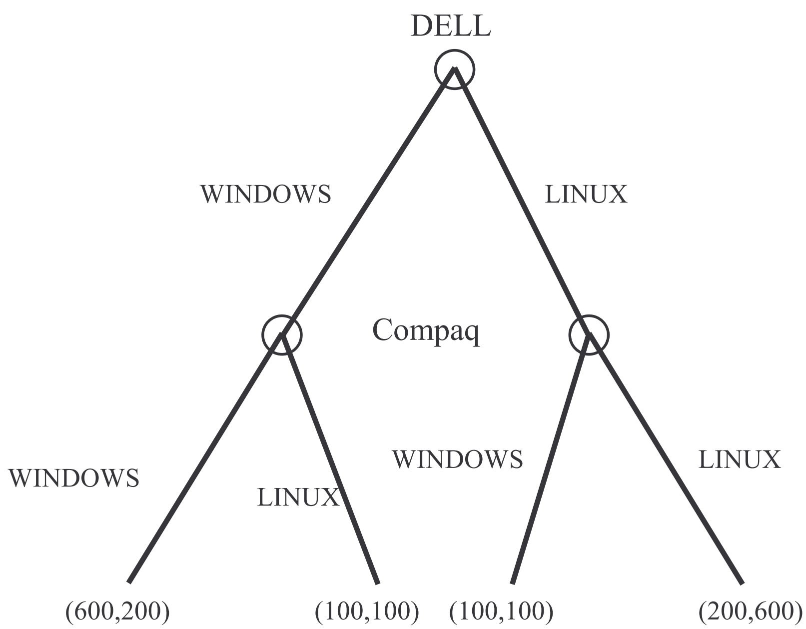
Pour être plus concret, supposons que si les deux firmes choisissent WINDOWS, DELL gagne 600 million de francs et Compaq 200 million de francs. Si les deux utilisent LINUX, le système préféré par Compaq, cette dernière gagne 600 million de francs et DELL seulement 200 million de francs. Si elles ne choisissent pas le

[3]Nous négligeons dans cet exemple les avantages possibles de la non-compatibilité : par exemple, le fait que chacune des firmes serait face à un marché captif.

même système opérationnel (cas de non compatibilité), chacune gagne seulement 100 million de francs. L’arbre de la figure 1(a) retrace ce jeu stratégique.

Figure 1(a) Arbre d'un jeu d'information parfaite

Le joueur 2 (Compaq) sait si le joueur 1 (DELL) s'est déplacé à droite (LINUX) ou à gauche (WINDOWS) dans l'arbre. Ainsi, le joueur 2 sait au moment de faire son choix, à quel noeud il se situe, un noeud étant un lieu de décision dans l'arbre.



L'arbre de la figure 1(a) décrit toutes les règles du jeu relatif au choix des systèmes opérationnels. Remarquons que l'arbre nous informe sur l'identité des joueurs. Dans notre exemple, il y a deux joueurs -DELL et Compaq. La « chance » n’intervient pas dans ce jeu. L'arbre nous dit lequel des joueurs doit se déplacer à chaque lieu ou *noeud* de décisions du jeu. Nous voyons que le jeu commence avec le choix de DELL, suivi du choix de Compaq. Le fait que l'arbre finisse après le choix de Compaq signifie qu'il n'y a que deux déplacements dans ce jeu. A chaque noeud de l'arbre, nous voyons les choix (les branches de l'arbre) qui s'offrent au joueur. Par exemple, au premier noeud de l'arbre de la figure 1(a), nous voyons que DELL a deux alternatives. Soit il sélectionne WINDOWS, soit il sélectionne LINUX. Selon la décision de DELL, Compaq sera soit au noeud de droite, soit au noeud de gauche dans l’arbre. A chacun de ses noeuds, Compaq a aussi deux alternatives tout comme DELL. Les chiffres entre parenthèses au bout de chaque branche de l'arbre indiquent les résultats financiers relatifs aux choix des joueurs. Le chiffre du haut correspond au gain de DELL, celui du bas au gain de Compaq.

Nous pouvons séparer les jeux en deux catégories : les jeux à information parfaite et les jeux à information imparfaite. Ces termes renvoient à l'information dont dispose chaque joueur quand il atteint un noeud de décision dans le jeu.

LES JEUX À INFORMATION PARFAITE ET IMPARFAITE : CE QUE LES JOUEURS CONNAISSENT AU MOMENT DE CHOISIR LEUR STRATEGIE.

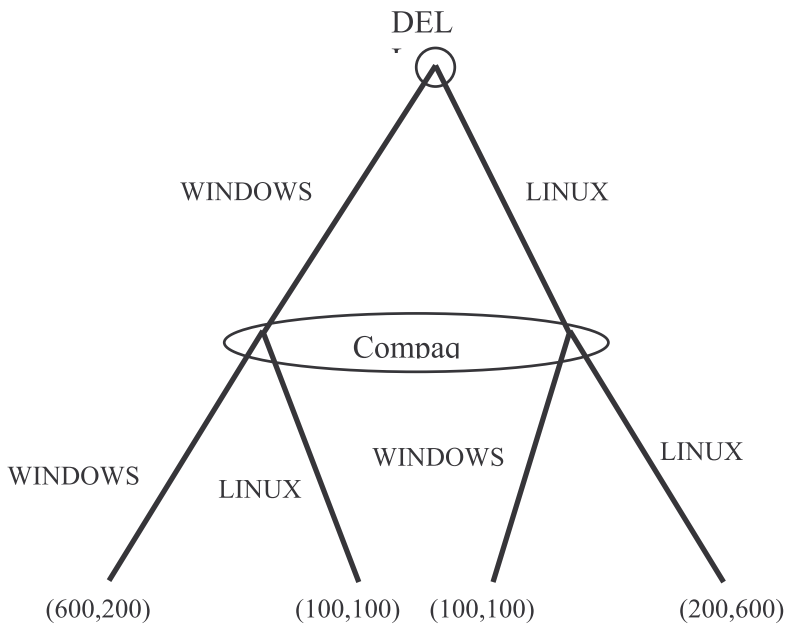
Dans certains jeux, les joueurs au moment de prendre une décision sont au courant de tout ce qui s'est passé auparavant. Dans ce cas, chaque noeud de l'arbre est visible par les joueurs. Dans le jeu décrit à la figure 1(a), lorsque Compaq choisit son système opérationnel, il sait si DELL a choisi WINDOWS ou LINUX à l'étape précédente. Un jeu de ce type est appelé un **jeu à information parfaite**, parce qu'un joueur, au moment de jouer, connaît tous les choix passés des autres joueurs.

Dans certains jeux, cependant, nous devons supposer que lorsqu'un joueur atteint un point de décision, il ne connaît pas tous les choix des autres joueurs qui l'ont précédé. De tels jeux sont appelés **jeux à information imparfaite**. Pour représenter l'information d'un joueur dans ce cas, nous devons introduire la notion d'**ensembles d'information** d'un arbre. Ces ensembles indiquent ce qu'un joueur connaît au moment de se déplacer. La figure 1(b) présente le même arbre de jeu que dans la figure 1(a), excepté que ce jeu a une structure d'information différente, parce que Compaq ne sait pas au moment de faire son choix quel système DELL a sélectionné.

Par exemple, supposons que les compagnies annoncent leurs décisions en même temps. Ainsi, Compaq (DELL) choisit son système sans connaître la décision de DELL (de Compaq). Dans la figure 1(b), l'ovale qui entoure les deux noeuds de décision de Compaq correspond à l'ensemble d'information de Compaq. Son information est imparfaite parce qu'il ne sait pas s'il est au noeud de droite ou de gauche. En d'autres termes, il ne sait pas si DELL a choisi WINDOWS ou LINUX comme système d'exploitation. Dans la figure 1(a), chaque ensemble d'information contient seulement un noeud. L'information est ainsi parfaite car chaque joueur sait exactement où il se situe dans l'arbre et sait exactement ce que les autres joueurs ont fait auparavant.

Figure 1 (b) Arbre du jeu avec information imparfaite

Le joueur 2 (Compaq) ne sait pas si le joueur 1 (DELL) a choisi WINDOWS ou LINUX (s'il s'est déplacé à droite ou à gauche). Ainsi le joueur 2 ne sait pas à quel noeud il se trouve.



Nous ne changeons pas la situation stratégique en remplaçant Compaq par DELL au noeud initial et DELL par Compaq aux noeuds suivants, car les deux firmes choisissent simultanément leur système d'exploitation.

Dans les jeux à information parfaite comme dans les jeux à information imparfaite, l'arbre nous donne les gains des joueurs conditionnels aux choix de ces derniers ou au chemin parcouru dans l'arbre. Par exemple si DELL et Compaq choisissent WINDOWS, les gains seront de 600 pour DELL et de 200 pour Compaq.

DESCRIPTION DU JEU SOUS SA FORME NORMALE

Lorsqu'un jeu implique de multiples joueurs et de multiples choix, l'arbre peut devenir complexe à représenter. Pour éviter de telles difficultés, il est courant de simplifier la présentation du jeu en spécifiant la stratégie de chaque joueur. Par **stratégie**, nous entendons un *plan d'action complet pour chaque joueur spécifiant ce que fera ce dernier à chaque noeud de l'arbre et face à chaque situation pouvant survenir au cours du jeu*. Pour comprendre la notion de stratégie, nous allons changer de méthode d'analyse en passant de la forme extensive à la **forme normale** du jeu. Pour comprendre la différence entre ces deux formes, revenons à la forme extensive du jeu entre DELL et Compaq (figure 1(a)). Puisque DELL se déplace le premier dans le jeu et qu'il ne se déplace plus par la suite, il a seulement deux stratégies possibles : choisir WINDOWS ou LINUX comme système opérationnel pour ses nouveaux ordinateurs. Les stratégies de Compaq, elles, sont définies conditionnellement aux choix de DELL. Par exemple une stratégie pour Compaq pourrait être : «choisir WINDOWS si DELL choisit WINDOWS, choisir LINUX si DELL choisit LINUX ». Appelons cette stratégie (WINDOWS/WINDOWS ; LINUX/LINUX). Le terme derrière la barre correspond au choix de DELL tandis que le terme devant la barre correspond au choix de Compaq conditionnellement au choix de DELL. Nous pouvons alors recenser quatre stratégies pour Compaq (WINDOWS/WINDOWS ; LINUX/LINUX), (WINDOWS/WINDOWS ; WINDOWS/LINUX), (LINUX/WINDOWS ; WINDOWS/LINUX), (LINUX/WINDOWS ; LINUX/LINUX). Remarquons qu'en combinant les stratégies des deux joueurs, nous pouvons définir un chemin complet dans l'arbre du jeu. Par exemple supposons que DELL choisisse (WINDOWS) et Compaq (WINDOWS/ WINDOWS; WINDOWS / LINUX). Les deux joueurs parcourent alors le chemin suivant au cours duquel DELL choisit WINDOWS puis Compaq choisit WINDOWS. Ce chemin confère un gain de 600 à DELL et de 200 à Compaq. Ainsi, pour chaque combinaison de stratégies, il existe une paire de gains. Evidemment, travailler avec des stratégies simplifie l'analyse car nous pouvons réduire le jeu entre DELL et Compaq à la matrice décrite dans la table 1.

Table 1. Jeu sous forme normale entre DELL et Compaq (gain en millions de francs)

Compaq

		(WINDOWS/WINDOWS, LINUX/LINUX)	(WINDOWS/WINDOWS, WINDOWS/LINUX)	(LINUX/WINDOWS, LINUX/LINUX)	(LINUX/WINDOWS, WINDOWS/LINUX)
DELL	WINDOWS	600 , 200	600 , 200	100 , 100	100 , 100
	LINUX	200 , 600	100 , 100	200 , 600	100 , 100

Cette matrice représente la situation stratégique de nos deux compagnies et nous indique les gains que chacune recevra selon les stratégies mises en oeuvre. Le premier nombre dans chaque case correspond au gain de DELL et le second nombre au gain de Compaq. Par exemple supposons que DELL décide de mettre en oeuvre la stratégie WINDOWS et Compaq la stratégie (LINUX/WINDOWS ; WINDOWS/LINUX). Cette stratégie peut s'énoncer du point de vue de Compaq ainsi : « si DELL choisit WINDOWS , nous choisirons LINUX ; si DELL choisit LINUX, nous choisirons WINDOWS ». En regardant la figure 1(a), nous voyons que cette combinaison stratégique conduit à un gain de 100 pour DELL comme pour Compaq. Nous ne disons pas qu'il serait mieux pour DELL et Compaq de choisir WINDOWS ou LINUX. Certainement, chacun préférerait recevoir un gain de 600 ou même un gain de 200 plutôt qu'un gain de 100. Nous ne faisons que spécifier sous la forme normale ce que les joueurs gagneraient pour chaque combinaison stratégique possible.

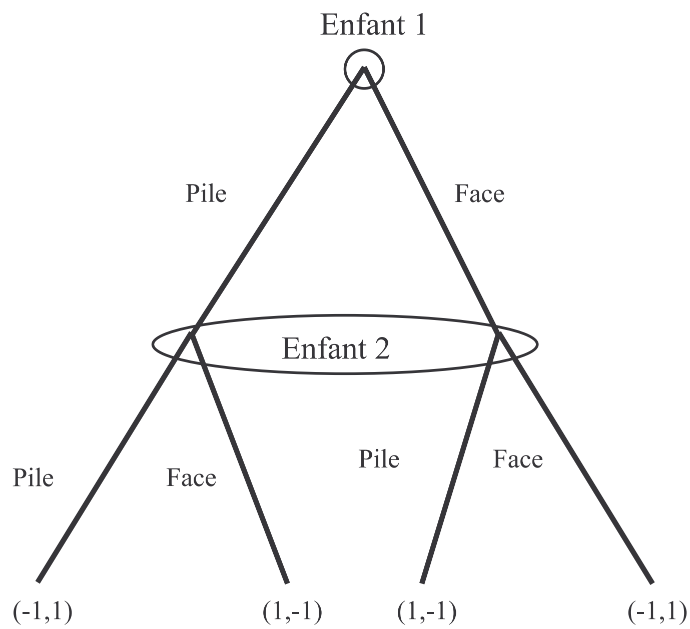
EXEMPLE 2

Pile ou face : un jeu à somme nulle

Pour se familiariser avec les formes normale et extensive, considérons le jeu suivant appelé « pile ou face ». Dans ce jeu simple, deux enfants placent secrètement une pièce de un franc dans le creux de leur main. Puis simultanément, chaque enfant ouvre sa main et montre à l'autre sa pièce. Si les deux pièces sont toutes les deux côté pile ou côté face, l'enfant 1 donne un franc à l'enfant 2. Dans le cas contraire, c'est l'enfant 2 qui donne un franc à l'enfant 1. C'est un jeu à information imparfaite car les deux enfant ouvrent leurs mains simultanément sans savoir comment l'un et l'autre avaient placé la pièce dans leur main. La forme extensive de ce jeu apparaît à la figure 2.

Figure 2. Forme extensive du jeu de « Pile ou face »

L'enfant 2 ne sait pas si l'enfant 1 a choisi pile ou face. L'ensemble d'information de l'enfant 2 contient deux noeuds.



L'arbre de la figure 2 montre que l'enfant 1 se déplace le premier en choisissant pile ou face. Puis l'enfant 2 qui ne sait pas ce que l'enfant 1 a fait, doit choisir entre pile ou face. Quand les deux ont fait le même choix, soit pile soit face, l'enfant 2 reçoit un gain de 1 et l'enfant 1 un gain de -1 (premier et dernier noeuds terminaux sur la figure). Quand les pièces ne coïncident pas (noeuds terminaux du milieu), les gains sont inversés. Remarquons que ce jeu est à **somme nulle**, la somme des gains des deux enfants à chaque noeud terminal étant égale à zéro.

La forme normale de ce jeu est très simple. Puisque les deux enfants ont seulement deux stratégies possibles (choisir pile ou face), les gains peuvent être décrits par la matrice de la table 2.

Table 2. La forme normale du jeu de « Pile ou face »

Enfant 2

Enfant 1

	PILE	FACE
PILE	-1 , 1	1 , -1
FACE	1 , -1	-1 , 1

2 LES EQUILIBRES DU JEU

L'analyse d'un jeu permet de prédire l'équilibre qui émergera si les joueurs sont rationnels. Par **équilibre**, nous entendons un *état ou une situation dans lequel aucun joueur ne souhaite modifier son comportement compte tenu du comportement des autres joueurs*. De façon plus précise, un équilibre est une combinaison de stratégies telle qu'aucun des joueur n'a d'incitation à changer sa stratégie compte tenu des stratégies des autres joueurs. Une fois que l'équilibre est atteint dans un jeu (peu importe la manière dont il a été obtenu), il n'y aucune raison de le quitter.

Afin de pouvoir utiliser le concept d'équilibre d'un jeu dans nos analyses, nous devons être plus précis sur la signification de ce concept. Nous savons qu'un équilibre est constitué d'une combinaison de choix stratégiques (un choix stratégique par joueur) et nous savons qu'une fois les choix arrêtés, aucune modification n'interviendra. C'est-à-dire qu'aucun joueur ou groupe de joueurs n'aura d'incitation à modifier ses actions s'il suppose que ses rivaux ne modifieront pas non plus les leurs. Les jeux que nous étudions ici correspondent à des situations dans lesquelles chaque joueur arrête seul ses choix stratégiques sans consulter les autres joueurs. De tels jeux sont **appelés jeux non coopératifs** parce qu'ils n'offrent pas la possibilité d'une coopération formelle ou liante, c'est à dire d'une coordination des stratégies des différents joueurs [4]. Ainsi, quand nous voudrons déterminer les équilibres d'un jeu non coopératif, nous ne considérerons pas les incitations des groupes de joueurs à

[4] Nous ne parlerons pas des jeux coopératifs ici. Les jeux coopératifs sont des jeux dans lesquels les joueurs peuvent parler entre eux et passer des contrats liants. Pour les jeux de ce type, on utilise un concept d'équilibre différent. Dans la théorie de l'échange, on parle de coeur d'une économie, défini comme l'ensemble des allocations que nul individu ou groupe d'individus ne peut contester en formant une coalition (en nouant des contrats) afin d'obtenir une meilleure allocation des biens. Parce que nous supposons que les gens négocient entre eux et communiquent leurs intentions et que les droits de propriété permettent de passer des contrats liants, un jeu coopératif semblait avoir du sens d'un point de vue théorique. Cependant dans de nombreuses situations économiques, la communication est hors de question. Par exemple sur les marchés oligopolistiques, les lois anti-trusts interdisent aux firmes de communiquer entre elles et de passer des accords notamment sur le prix de leurs produits.

modifier leurs comportements conjointement étant donné le comportement des joueurs restants ; nous considérerons uniquement les incitations des joueurs pris individuellement.

Pour comprendre à quoi ressemble un équilibre, considérons de nouveau la matrice du jeu entre DELL et Compaq (table 1). Regardons la case correspondant aux gains (200, 600) en caractère gras. Nous pouvons soutenir que la paire de stratégies associée à ces gains (LINUX) et (LINUX/WINDOWS ; LINUX/LINUX) est une paire de stratégies d'équilibre du jeu. Pour prouver que cette affirmation est fondée, considérons en premier la position de DELL. Si Compaq choisit (LINUX/WINDOWS ; LINUX/LINUX) comme stratégie, alors ceci s'interprète de la façon suivante : Compaq choisira toujours LINUX comme système opérationnel pour ses ordinateurs quel que soit le choix de DELL. Face à cette stratégie, DELL a le choix entre un gain de 100 si il opte pour WINDOWS et un gain de 200 si il opte pour LINUX. Clairement, sa meilleure réponse est d'opter pour LINUX si la stratégie de Compaq est (LINUX/WINDOWS ; LINUX/LINUX). Si DELL pense que Compaq a une telle stratégie, alors son choix se portera clairement vers LINUX. De la même façon, si Compaq pense que DELL opte pour LINUX, il gagne 100 en choisissant (WINDOWS/WINDOWS ; WINDOWS/LINUX) ou (LINUX/WINDOWS ;WINDOWS/LINUX) comme stratégies et 600 en choisissant (LINUX/WINDOWS ; LINUX/LINUX) ou (WINDOWS/WINDOWS ;LINUX/LINUX). Si Compaq pense que DELL sélectionnera LINUX, (LINUX/WINDOWS ; LINUX/LINUX) est sa meilleure réponse. Dit d'une autre façon, si DELL s'attend à ce que Compaq choisisse (LINUX/WINDOWS ; LINUX/LINUX) et si Compaq s'attend à ce que DELL choisisse LINUX, alors ce sont exactement les choix qu'ils arrêteront parce que chacun de ces choix est meilleure réponse au choix de l'autre (ou du moins meilleure réponse au choix attendu de l'autre).

EQUILIBRE DE NASH

L'équilibre de Nash est un concept fondamental en théorie des jeux [5]. Il décrit une issue dans laquelle aucun joueur ne souhaite modifier son comportement (ou sa stratégie) étant donné le comportement (ou la stratégie) de ses rivaux. Nous pouvons définir un équilibre de Nash de façon plus formelle.

Soient un jeu non-coopératif à n joueurs et $s^*= (s^*_1,...,s^*_n)$ une combinaison de choix stratégiques de ces n joueurs où s^*_1 est le choix stratégique du joueur 1, s^*_2 le choix stratégique du joueur 2 et ainsi de suite. De plus, soit $\pi_i (s^*_1,...,s^*_n)$ le gain du joueur i lorsque s^* est sélectionné, où i peut être n'importe quel joueur i=1,2,...,n. Nous pouvons maintenant donner une définition formelle de l'équilibre de Nash : une combinaison de choix stratégique $s^* = (s^*_1, \ \ ,s^*_n)$ est un **équilibre de Nash** si $\pi_i (s^*_1,...s^*_i ,...,s^*_n) \geq \pi_i (s^*_1,..., s_i ,...,s^*_n)$ pour tout s_i dans S_i et tout joueur i.

[5] L'équilibre de Nash doit son nom au mathématicien et économiste américain John F. Nash, prix Nobel d'Economie en 1994, qui introduisit ce concept en 1951.

Cette définition est simple à comprendre. Considérons l'expression de gauche de cette inégalité π_i (s^*_1,...s^*_i ,...,s^*_n). C'est le gain du joueur i quand il choisit s^*_i et que tous les autres font un choix conforme à s*. Le terme de droite π_i (s^*_1,..., s_i ,...,s^*_n) indique le gain du joueur i quand il dévie de s* et sélectionne une autre stratégie s_i, alors que les n-1 autres joueurs font un choix conforme à s*. Ce que les conditions d'équilibre nous disent, c'est qu'aucun joueur i ne peut bénéficier d'une telle déviation et ce quelle que soit la stratégie qu'il choisit dans son ensemble de stratégies S_i. En d'autres termes, si nul ne peut bénéficier d'une déviation de s*, alors nul ne le fera , ce qui est bien la preuve que s* est un équilibre.

EQUILIBRE EN STRATEGIE DOMINANTE

Le concept d'équilibre de Nash est simplement la définition d'une situation d'équilibre. Pour comprendre ce concept, nous devons supposer initialement que les joueurs ont déjà arrêté une certaine configuration de choix stratégiques. Nous considérons alors uniquement les déviations unilatérales (individuelles) possibles de cette configuration dans laquelle chaque joueur envisageant de dévier suppose que tous les autres joueurs n'ont pas ce dessein. Dans ces circonstances, le concept d'équilibre de Nash nous dit qu'aucun joueur n'aura d'incitation à dévier étant donnée la configuration stratégique. Ce que le concept d'équilibre de Nash ne nous dit pas c'est *comment ou pourquoi une certaine configuration de choix stratégiques est arrêtée initialement*.

Pour certains jeux cependant nous pouvons comprendre pourquoi un équilibre particulier émerge. Considérons la matrice de la table 3 qui applique le célèbre **dilemme du prisonnier** à la concurrence en prix que se livrent les firmes en oligopole. Dans l'exemple présent, les firmes en question sont Renault et Peugeot. Supposons que Renault et Peugeot construisent des voitures presque identiques si bien que le prix demeure la seule variable que le consommateur prend en compte lors de l'achat d'une voiture. Le premier nombre dans chaque case de la matrice est le profit de Renault et le second celui de Peugeot. Chaque firme a deux stratégies possibles pour la tarification de ses voitures : fixer un prix élevé ou un prix bas. La matrice des gains indique les conséquences monétaires de ces différentes stratégies de prix pour chacune des firmes. Remarquons que si Renault et Peugeot S.A. fixent toutes les deux un prix élevé, nous sommes dans une situation collusive qui nuit au consommateur, chaque firme obtenant un profit élevé de 500 millions de francs. Cependant si une firme fixe un prix élevé, alors l'autre firme peut obtenir un profit encore plus grand en baissant son prix (en déviant de la stratégie de prix élevé). Cette dernière enlève de fait à son rival la quasi-totalité du marché et obtient un profit de 700 millions de francs ne laissant à son rival qu'un profit de 100. Si les deux firmes fixent un prix bas, elles se partagent à parts égales un marché plus étendu. Mais compte tenu du faible prix de vente, elles ne gagnent chacune que 300 millions de francs.

Table 3. Jeux en prix du type dilemme du prisonnier (gains en millions de francs)

Peugeot

Renault

	PRIX BAS	PRIX ELEVE
PRIX BAS	300 , 300	700 , 100
PRIX ELEVE	100 , 700	500 , 500

Dans la table 3, la seule combinaison de stratégies conduisant à un équilibre de Nash est celle dans laquelle Renault et Peugeot fixent un prix bas et obtiennent un profit de 300 millions de francs chacune. Si l'une des firmes s'attend à ce que l'autre fixe un prix bas, sa meilleure réponse est aussi de fixer un prix bas. C'est la seule combinaison de stratégies qui conduise à un équilibre, malgré le fait que les deux firmes auraient plutôt un intérêt commun à fixer des prix élevés (leur profit s'élèverai dans ce cas à 500 millions de francs). Mais la combinaison des stratégies de prix élevés incite chacune des firmes à tricher ou à dévier.

L'équilibre en prix bas peut être justifié d'une autre manière. Nous pouvons en effet remarquer que fixer un prix bas est le meilleur choix pour chaque firme quel que soit le choix attendu de son rival. Examinons la décision de Renault. (Peugeot étant dans une situation symétrique, le même raisonnement s'applique pour cette firme). Si Renault s'attend à ce que Peugeot fixe un prix élevé, sa meilleure réponse est de fixer un prix bas car il gagne 700 millions au lieu de 500 millions de francs (gain d'une stratégie de prix élevé). D'autre, part si Renault s'attend à ce que Peugeot fixe un prix bas, sa meilleure réponse est encore de fixer un prix bas. En ne choisissant pas un prix élevé, il évite ainsi de perdre de l'argent : son gain est de 300 au lieu de 100. Clairement Renault est toujours mieux en fixant un prix bas quelle que soit la stratégie attendue de Peugeot. *Quand la stratégie d'un joueur est meilleure réponse face à toutes les stratégies possibles de ses rivaux*, on dit que c'est une **stratégie dominante** (cette stratégie domine toutes les autres stratégies du joueur). Dans l'exemple précédent, les deux firmes ont une stratégie dominante qui consiste à fixer un prix bas. L'équilibre de ce jeu est alors appelé **équilibre en stratégie dominante**.

RESOLUTION DES JEUX PAR ELIMINATION DES STRATEGIES DOMINEES

Un joueur rationnel ne doit jamais utiliser une **stratégie dominée**, c'est-à-dire une stratégie qui est *dominée en terme de gains par au moins une autre de ses stratégies face à toutes les stratégies possibles de ses rivaux*. Lorsque nous sommes opposés à un joueur rationnel, nous pouvons supposer que ce dernier n'utilisera jamais une telle stratégie ; nous pouvons donc l'éliminer de son ensemble de stratégies possibles. Une manière de déterminer les équilibres d'un jeu consiste à éliminer en premier toutes les stratégies dominées puis de rechercher dans le jeu réduit les équilibres. Pour illustrer cette méthode, considérons la table 4. Cette dernière décrit les gains d'un jeu à deux joueurs qui ont chacun deux stratégies possibles (le premier nombre dans chaque case est le gain du joueur 1 et le second celui du joueur 2).

Table 4. Jeu à deux personnes ayant deux stratégies.

Joueur 2

Joueur 1

	Stratégie A	Stratégie B
Stratégie a	3 , 0	4 , 0
Stratégie b	6 , 3	0 , 2

Dans ce jeu, la stratégie *A* du joueur 2 domine faiblement sa stratégie *B* car sa stratégie *A* est équivalente à sa stratégie *B* lorsque le joueur 1 a opté pour la stratégie *a*, et strictement meilleure lorsque le joueur 1 a opté pour la stratégie *b*. Si le joueur 1 pense que le joueur 2 est rationnel, il s'attend à ce que ce dernier ne recoure jamais à sa stratégie *B*. Le joueur 1 éliminera donc la stratégie *B* de l'ensemble des stratégies possibles du joueur 2. Face à la seule stratégie *A* du joueur 2, le joueur 1 a le choix entre la stratégie *a* associée à un gain de 4 et la stratégie *b* associée à un gain de 6. Si ce dernier est rationnel, il optera pour la stratégie *b* car après élimination de la stratégie dominée du joueur 2, sa stratégie *b* domine sa stratégie *a*. En éliminant les stratégies dominées (mêmes faiblement dominées), nous avons déterminé l'équilibre de ce jeu et les gains associés (6 ; 3).

Evidence expérimentale de résolution des jeux par élimination des stratégies dominées.

Il semble évident qu'un joueur rationnel n'utilisera jamais une stratégie dominée. Cependant, quand nous participons à un jeu, nous ne savons pas toujours si notre adversaire est suffisamment rationnel ou intelligent pour saisir que certaines de ses stratégies sont dominées. Lorsque de tels doutes surgissent, il n'est plus tout à fait clair que l'équilibre dérivé par élimination des stratégies dominées soit celui que nous observerons dans la réalité. Pour étudier ce problème, Schotter, Weigelt et Wilson [6] ont demandé à 40 étudiants de participer au jeu décrit précédemment (table 4).

L'expérience a montré que les étudiants dans le rôle du joueur 1 choisissaient la stratégie *a* dans 57% des cas tandis que ceux dans le rôle du joueur 2 choisissaient leur stratégie dominée dans 20% des cas. En d'autres termes, de nombreux étudiants dans le rôle du joueur 1 soupçonnaient nettement leurs adversaires de ne pas être suffisamment intelligents ou rationnels pour comprendre qu'ils ne devaient jamais utiliser la stratégie *B*. Ainsi, afin d'éviter le risque d'un gain nul (cellule en bas à gauche dans la table 4), ils préféraient jouer la sécurité et choisir la stratégie *a* qui leur garantissait un gain minimum de 3.

Schotter, Weigelt et Wilson, au cours de ces expériences, ont découvert que lorsqu'ils faisaient participer d'autres étudiants au même jeu, mais sous sa *forme extensive,* les résultats étaient tout à fait différents. Ainsi ils présentèrent ce jeu sous la forme d'un arbre (voir figure 3) à ces nouveaux étudiants Notons que la situation stratégique sous la forme extensive dans la figure 3 est exactement la même que celle présentée sous la forme normale ou matricielle aux premiers étudiants. Cependant, seulement 9% des nouveaux étudiants dans le rôle du joueur 1 optèrent pour la sécurité (stratégie *a*). Les 91% restants se comportèrent comme si ils pensaient que les joueurs 2 avaient compris qu'une de leur stratégie était dominée. Cette différence d'appréciation entre les deux groupes de joueur 1 quant aux capacités des joueurs 2 à reconnaître une stratégie dominée, est sans doute due au fait que la stratégie *B* du joueur 2 était plus visiblement dominée par la stratégie *A* dans la forme extensive du jeu que dans la forme normale. Si cette explication est fondée, nous sommes en droit de penser que la manière de présenter un jeu (forme normale ou extensive) modifie son issue. Ce résultat expérimental est problématique pour la théorie des jeux car la situation stratégique était bien identique dans les deux expériences[7].

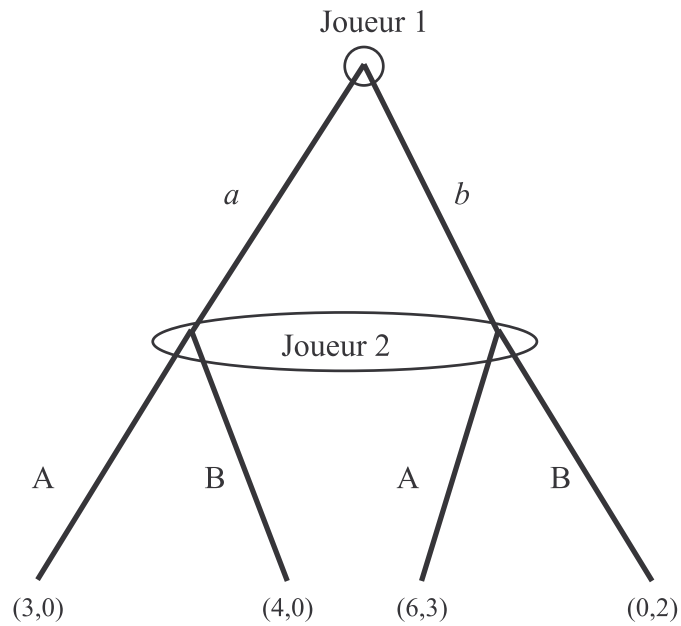
---

[6] Se reporter pour plus de détails à Andrew Schotter, Keith Weigelt, et Charles Wilson, «A Laboratory Investigation of Multi-Person Rationality and Presentation Effects,» dans la revue *Games and Econmic Behavior*, 1993.

[7] Dans les deux cas, les joueurs disposaient de la même information, mais avaient sans doute plus de difficultés à traiter cette information dans le premier cas (forme normale) que dans le second (forme extensive). Ceci permet peut-être d'expliquer les différences de comportement observées.

Figure 3 Forme extensive du jeu dans l'expérience de Schotter, Weigelt et Wilson.

Quand le même jeu est présenté à un groupe dans sa forme normal et à un autre groupe dans sa forme extensive, les résultats sont différents. Le mode de représentation d'un jeu affecte apparemment la façon dont chaque groupe conçoit la situation stratégique et conduit les joueurs à se comporter différemment.



JEUX À EQUILIBRES MULTIPLES

Tous les jeux n'ont pas des équilibres qui peuvent être déterminés par simple élimination des stratégies dominées. De plus, certains jeux sont caractérisés par des équilibres multiples c'est-à-dire de multiples combinaisons de choix stratégiques satisfaisant à la définition d'un équilibre de Nash. Par exemple, considérons **le jeu de coordination** présenté dans la table 5 et dont l'histoire pourrait être la suivante.

A la suite d'une série d'incidents techniques, la plupart des centraux téléphoniques d'une grande ville comme Paris sont hors service. France Télécom est alors dans l'obligation de rationner l'accès au réseau en limitant la durée des appels téléphoniques. La règle serait la suivante : si un appel dépasse cinq minutes, France Télécom coupe la ligne. Pour continuer la conversation, un des deux interlocuteurs doit rappeler l'autre. Nous sommes confrontés au problème suivant : lequel des deux interlocuteurs doit rappeler ? Celui qui a appelé à l'origine ou celui qui a été appelé ?

Si l'appel téléphonique est coûteux, nous pouvons supposer que chaque personne préférera être rappelée. Nous avons deux stratégies pour chaque joueur : *appeler* ou *attendre*. Si les deux attendent, la conversation téléphonique ne peut se poursuivre et le gain de chaque joueur est nul (cellule en haute à gauche dans la matrice 5). Si les deux tentent de se rappeler, chacun tombe sur la tonalité occupée. Le résultat est aussi un gain nul (cellule en bas à droite). Cependant si un des joueurs appelle et l'autre attend alors le gain est de 3 pour celui qui appelle et de 6 pour celui qui est appelé. Ce dernier reçoit un gain supérieur parce qu'il ne supporte pas le coût de l'appel. Quel est l'équilibre d'un tel jeu ? En d'autres termes qui doit appeler et qui doit attendre ? Pour répondre à cette question, regardons plus attentivement la table 5.

Table 5 : le jeu du téléphone, un jeu de coordination avec deux équilibres de Nash

Joueur 2

Joueur 1

	Attendre	Appeler
Attendre	0 , 0	6 , 3
Appeler	3 , 6	0 , 0

Il est clair que l'intérêt des deux joueurs est de coordonner leurs stratégies afin que l'un choisisse la stratégie *attendre* et l'autre la stratégie *appeler*. Seule une telle coordination permet aux deux joueurs d'obtenir un gain positif. Cependant ils peuvent ne pas être d'accord sur la façon d'y parvenir. Tous les deux préfèrent la stratégie *attendre* qui rapporte 6 (le gain de la stratégie *appeler* étant seulement de 3). Dans ce jeu, nous avons deux équilibres de Nash. Le premier correspond à la situation où le joueur 1 choisit la stratégie *attendre* et le joueur 2 la stratégie *appeler*, le second à la situation où le joueur 1 choisit la stratégie *appeler* et le joueur 2 la stratégie *attendre*[8]. Pour vérifier que ces deux paires de stratégies sont des équilibres de Nash, considérons la situation dans laquelle le joueur 1 choisit la stratégie *attendre* et le joueur 2 la stratégie *appeler*. Dans ce cas, si le joueur 1 pense que le joueur 2 va choisir la stratégie *appeler*, le joueur 1 a intérêt à sélectionner la stratégie *attendre* car elle lui donne un gain de 6 (au lieu de 0 si il choisissait la stratégie *appeler*). De même si le joueur 2 pense que le joueur 1 va choisir la stratégie *attendre*, le joueur 2 a intérêt de sélectionner la stratégie *appeler* car le gain de 3 associé à ce choix est supérieur au gain de 0 associé à la stratégie *attendre*. Le même raisonnement est valable lorsque le joueur 1 choisit la stratégie *appeler* et que le joueur 2 choisit la stratégie *attendre*.

[8] En fait il existe un autre équilibre possible dans un tel jeu. Cet équilibre apparaît en stratégies mixtes, c'est-à-dire lorsque chaque joueur utilise ses deux stratégies avec une certaine probabilité. Les stratégies mixtes seront illustrées par un autre jeu dans l'exemple 5.

Cet exemple montre qu'un jeu peut comporter plusieurs équilibres. Initialement, la théorie des jeux ne se préoccupait pas de savoir lequel de ces équilibres allait être sélectionné par les joueurs. Depuis quelques années, la théorie des jeux s'est ouverte à des **concepts de raffinement** qui permettent de réduire le nombre des équilibres. Par exemple, les *équilibres de sous jeu parfait* ou les *équilibres robustes à la renégociation* appartiennent à ces concepts de raffinements. Nous reviendrons plus loin sur le concept de sous-jeu parfait.

Exemple 4

Choix simultané d'un chiffre : un jeu de coordination à équilibres multiples

Nous proposons le jeu de coordination à deux joueurs suivant. Chaque joueur doit choisir un nombre entre 1 et 10. Si le nombre sélectionné par les deux joueurs est le même, chaque joueur reçoit une somme d'argent égale à dix fois ce nombre. Si les nombres ne sont pas identiques, les joueurs ne reçoivent rien. Le jeu sous sa forme normale est représenté dans la table 6. La matrice de la table 6 reproduit les gains de toutes les paires de stratégies possibles du jeu décrit ci-dessus. Remarquons que les seuls gains positifs apparaissent sur la diagonale de la matrice. Ces nombres positifs indiquent le gain des deux joueurs lorsqu'ils choisissent le même nombre. Par exemple quand les deux joueurs choisissent conjointement 3, leur gain est de 30 francs chacun et quand ils choisissent 7, leur gain est de 70 francs. En dehors de cette diagonale, les gains sont de zéro. Les joueurs ont intérêt à coordonner leurs stratégies pour gagner dans ce jeu.

Table 6 Forme normale du jeu de coordination avec 10 équilibres de Nash

Joueur 2

Joueur 1

	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
1	**10 , 10**	0 , 0	0 , 0	0 , 0	0 , 0	0 , 0	0 , 0	0 , 0	0 , 0	0 , 0
2	0 , 0	**20 , 20**	0 , 0	0 , 0	0 , 0	0 , 0	0 , 0	0 , 0	0 , 0	0 , 0
3	0 , 0	0 , 0	**30 , 30**	0 , 0	0 , 0	0 , 0	0 , 0	0 , 0	0 , 0	0 , 0
4	0 , 0	0 , 0	0 , 0	**40 , 40**	0 , 0	0 , 0	0 , 0	0 , 0	0 , 0	0 , 0
5	0 , 0	0 , 0	0 , 0	0 , 0	**50 , 50**	0 , 0	0 , 0	0 , 0	0 , 0	0 , 0
6	0 , 0	0 , 0	0 , 0	0 , 0	0 , 0	**60 , 60**	0 , 0	0 , 0	0 , 0	0 , 0
7	0 , 0	0 , 0	0 , 0	0 , 0	0 , 0	0 , 0	**70 , 70**	0 , 0	0 , 0	0 , 0
8	0 , 0	0 , 0	0 , 0	0 , 0	0 , 0	0 , 0	0 , 0	**80 , 80**	0 , 0	0 , 0
9	0 , 0	0 , 0	0 , 0	0 , 0	0 , 0	0 , 0	0 , 0	0 , 0	**90 , 90**	0 , 0
10	0 , 0	0 , 0	0 , 0	0 , 0	0 , 0	0 , 0	0 , 0	0 , 0	0 , 0	**100,100**

Le jeu présenté ici a dix équilibres de Nash. Ces équilibres apparaissent quand les deux joueurs choisissent le même nombre entre 1 et 10. Les gains le long de la diagonale sont les gains d'équilibre. Chacune des paires de stratégies dans la diagonale correspond à un équilibre de Nash parce qu'aucun des joueurs ne voudrait dévier de cette diagonale pour recevoir un gain nul.

Les expériences à partir de jeux de coordination comme celui de l'exemple 4 ont donné des résultats intéressants. Il serait naturel de penser que les joueurs dans un tel jeu choisissent toujours le meilleur équilibre (celui avec le gain (100,100)), mais les résultats expérimentaux indiquent que tel n'est pas le cas. Dans une série d'études expérimentales, Van Huick, Battalio, Beil et d'autres ont demandé à plusieurs personnes de participer à des jeux de coordinations similaires dans leurs structures à celui décrit dans l'exemple 4 [9]. Ces jeux avaient plusieurs équilibres de Nash qui pouvaient être unanimement rangés du meilleur au pire. Ces études ont montré contre toute attente que les sujets ne convergeaient pas vers le meilleur équilibre quand le jeu était répété un certain nombre de fois. Au contraire, il ressortait que

[9] Pour plus d'informations sur quelques unes de ces expériences, se reporter à John Van Huick, Raymond Battalio et Richard Beil «Tacit Coordination Games, Strategic Uncertainty, and Coordination Failure,» *American Economic Review*, Vol.80, Mars 1990, pp. 234-248.

l'issue apparue au premier coup tendait à se perpétuer aux coups suivants. Par exemple, si la première fois les individus jouaient l'équilibre (4,4), alors ils continuaient à jouer cet équilibre jusqu'à la fin de l'expérience. Le choix de l'équilibre de coordination dépendait plus de l'histoire passée du jeu que d'une réflexion sur les avantages en terme de gains des différents équilibres. Ce résultat va à l'encontre des hypothèses en théorie des jeux selon lesquelles l'issue d'un jeu dépend de ses propriétés stratégiques et de sa matrice de gains et non des accidents historiques qui auraient pu apparaître au cours du jeu.

Tous les jeux ne comportent pas des équilibres de Nash aussi évidents que dans le jeu décrit dans l'exemple 4. Considérons l'exemple 5 qui illustre un jeu avec équilibre en stratégies mixtes.

Exemple 5

Un jeu de guerre sans équilibre en stratégie pure

Nous supposons que deux généraux sont opposés dans une bataille. Chaque général a deux stratégies à sa disposition : attaquer ou battre en retraite. Les gains dans la table 7 représentent la satisfaction que les deux armées peuvent tirer des quatre combinaisons possibles de choix stratégiques. Par exemple, si le général 1 se retire et que le général 2 attaque, il n'y aura pas de bataille et les deux armées recevront un gain de 6 chacune. (Nous supposerons qu'il y a des raisons stratégiques à chaque gain, mais nous ne nous étendrons pas sur les explications car elles ne présentent pas un intérêt direct).

Table 7 un jeu sans équilibre en stratégies pures

Général 2

Général 1

	Attaquer	Battre en retraite
Attaquer	2 , 3	8 , 0
Battre en retraite	6 , 6	5 , 8

A première vue, la paire de choix stratégiques qui fournit le gain (6,6) semble être un candidat à l'équilibre de Nash. Cependant, ce jeu n'a *pas d'équilibre de Nash en stratégies pures*. Par stratégie pure, nous entendons une règle spécifiant l'action (ou les actions) à entreprendre - dans ce cas attaquer ou battre en retraite. Quand nous prétendons que le jeu décrit ici n'a pas d'équilibre de Nash en stratégies pures, nous voulons dire qu'il n'existe pas de paire de stratégies (une pour le général 1 et une pour le général 2) qui puisse constituer un équilibre du jeu. Par exemple, prenons la paire de stratégies associée aux gains (6,6) (le général 1 choisit de se retirer et le général 2 d'attaquer). Ce n'est pas un équilibre de Nash car l'un des généraux a une incitation à dévier de sa stratégie initiale. Si le général 1 choisit de battre en retraite, la meilleure réponse pour le général 2 est aussi de battre en retraite afin d'obtenir un gain de 8. Ce gain est supérieur au gain de 6 obtenu en attaquant. Cependant, cette nouvelle paire de stratégies (battre en retraite, battre en retraite) n'est pas non plus un équilibre de Nash. Les gains associés à cette paire stratégique sont alors (5,8). Le général 1 en déviant de sa stratégie de retraite peut faire mieux que 5 en terme de gain. Si il attaque l'armée du général 2 qui bat en retraite, il reçoit un gain de 8. Les deux autres paires de stratégies (attaquer, battre en retraite), et (attaquer, attaquer) associées respectivement aux gains (8,0) et (2,3) ne mènent pas non plus à des équilibres de Nash.

Il existe une autre méthode pour obtenir un équilibre de Nash dans des jeux du type de celui décrit dans l'exemple 5. Il suffit d'élargir la définition d'une stratégie et d'y inclure non seulement les actions pures (telle que attaquer ou battre en retraite) mais aussi les probabilités de choisir l'une ou l'autre de ces actions. Par exemple, supposons qu'au lieu de simplement attaquer ou battre en retraite, le général 1 décide d'attribuer une probabilité positive à ces deux alternatives. Par conséquent, il se retirera avec une probabilité p et attaquera avec une probabilité (1-p). De même, supposons que le général 2 se retire avec une probabilité q et attaque avec une probabilité de (1-q). En élargissant l'espace de choix des généraux, c'est à dire en leur permettant de recourir à des probabilités, nous sommes en présence de **stratégies mixtes** - stratégies qui définissent les *probabilités avec lesquelles les joueurs choisissent chacune de leurs actions ou de leurs stratégies pures* (ici attaquer ou battre en retraite).

L'ensemble des stratégies mixtes possibles dans notre exemple est l'ensemble de tous les p vérifiant $0 \leq p \leq 1$ et l'ensemble de tous les q vérifiant $0 \leq q \leq 1$. Si les joueurs ont n stratégies pures, une stratégie mixte est une distribution de probabilité sur toutes ces stratégies ; c'est à dire l'ensemble des vecteurs $p = (p_1,.. ,p_n)$ tels que $p_1 \geq 0, p_2 \geq 0, ..., p_n \geq 0$ et $p_1 + p_2 + ...+ p_n = 1$.

Revenons à l'exemple 5 et supposons que le général 2 choisisse de battre en retraite avec la probabilité q et d'attaquer avec la probabilité (1-q). Si le général 1 choisit de battre en retraite, son gain espéré d'après la table 7 est alors égal à $q(5)+(1-q)6=6-q$[10].

La valeur espérée d'une stratégie est le gain que l'on s'attend à recevoir pondéré par les probabilités de choix de l'autre joueur. Notons que si q=1, le général 2 décide de toujours battre en retraite. Dans ce cas si le général 1 bat en retraite, il recevra un gain certain de 5. Si q=0, le général 2 décide de toujours attaquer. En se retirant, le général 1 recevra un gain certain de 6. Quand $0 \leq q \leq 1$, le général 1 recevra en se

[10] Ces gains sont en fait ce que les économistes appellent une espérance d'utilité Von Neumann-Morgenstern.

retirant soit un gain de 5 avec une probabilité de q, soit un gain de 6 avec une probabilité de (1-q). De même, le gain espéré de la stratégie d'attaque du général 1 s'écrit q(8)+(1-q)2=2+6q.

Maintenant si le général 2 choisit q tel que ce choix rende le gain espéré d'une des stratégie pures du général 1 supérieur au gain espéré de l'autre, alors cette meilleure stratégie pure en terme de gain espéré sera choisie avec une probabilité de 1 par le général 1. Par exemple, supposons que le général 2 choisisse la stratégie mixte q=1/2 et (1-q)=1/2. Si le général 1 choisit de se retirer , son gain espéré est de 1/2(5)+ 1/2(6)=5,5. Si il choisit d'attaquer, son gain espéré est de 1/2(8)+ 1/2(2)=5.

Clairement si le général 2 choisit la stratégie mixte q=1/2, (1-q)=1/2, alors la meilleure réponse du général 1 est la retraite. Sachant cela, le général 2 abandonnera sa stratégie mixte et battra lui aussi en retraite. Ainsi une situation dans laquelle le général 2 utilise la stratégie mixte q=1/2, (1-q)=1/2 , ne peut constituer un équilibre en stratégies mixtes.

Détermination des équilibres en stratégie mixte

Le principe qui se dégage de l'exemple précédent, c'est que si un joueur utilise une stratégie mixte qui laisse à l'autre joueur une meilleure réponse unique en stratégie pure, alors un équilibre en stratégies mixtes n'existe pas. La seule situation dans laquelle un **équilibre en stratégies mixtes** apparaît est celle où les stratégies mixtes choisies *laissent les deux joueurs indifférents entre les gains qu'ils peuvent s'attendre à recevoir de l'une ou l'autre de leurs stratégies pures*. Par exemple, dans le jeu décrit précédemment, supposons que le général 2 utilise la stratégie mixte q=4/7 et (1-q)=3/7. Alors le gain espéré du général 1 associé à l'une ou l'autre de ces stratégies pures est le même. Le gain espéré de battre en retraite est 4/7(5) + 3/7(6)=38/7. Le gain espéré d'attaquer est 4/7(8) + 3/7(2)=38/7.

Dans ce cas, le général 1 est indifférent entre ses deux stratégies pures. Il pourrait aussi bien choisir l'une ou l'autre de façon aléatoire, c'est à dire avec les probabilités (p, 1-p). Par exemple, le général peut se retirer avec une probabilité de p=3/5 et attaquer avec une probabilité de (1-p)=2/5. Et dans ce cas, le général 2 est aussi indifférent entre ses deux stratégies pures , chacune lui donnant un gain espéré de 24/5. Une situation dans laquelle tous les joueurs choisissent leurs stratégies mixtes de façon à rendre leurs adversaires indifférents entre les gains espérés de chacune de leurs stratégies pures est appelé **équilibre en stratégies mixtes**[11].

[11] Afin de calculer la stratégie mixte d'équilibre du général 2, notons que le gain du général 1 est q(5)+(1-q)6=6-q s'il se retire et q(8)+(1-q)2=6q+2 s'il attaque. Ces deux gains espérés sont égaux si 6-q=6q+2, le général 1 étant alors indifférent entre ses deux stratégies pures. En résolvant l'équation nous obtenons 7q=4 ou q=4/7. Un calcul similaire permet de déterminer la stratégie mixte d'équilibre du général 1.

3 LES MENACES CREDIBLES

Au commencement de la théorie des jeux, on pensait que les formes extensive et normale d'un jeu étaient des outils équivalents pour l'analyse stratégique et donnaient les mêmes résultats. Aujourd'hui cette croyance a été profondément révisée, notamment grâce aux travaux de Reinhard Selten[12] et nous sommes en mesure de comprendre pourquoi les deux modes de représentation d'un jeu ne sont pas équivalents. Pour illustrer ce point, considérons l'arbre de la figure 4.

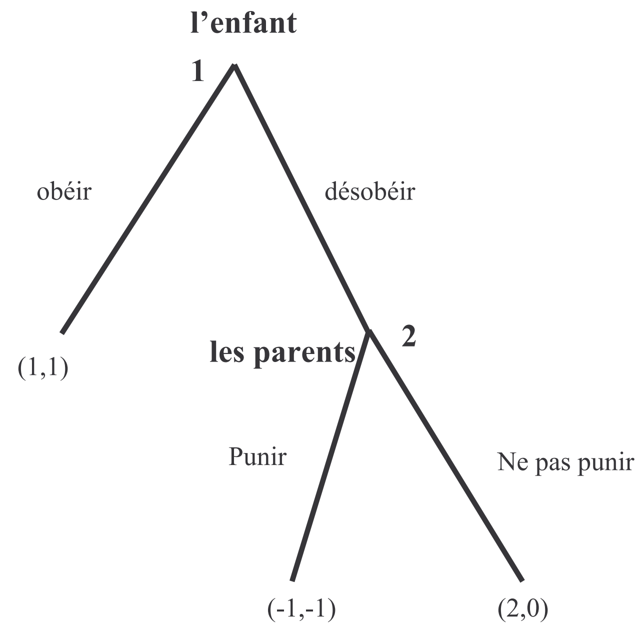
Cet arbre représente la forme extensive d'un jeu que nous appellerons le jeu de « *l'enfant gâté* »[13]. Le scénario de ce jeu est très simple. Un samedi après-midi un enfant capricieux (le joueur 1) souhaite aller au cinéma. Mais ses parents (le joueur 2) ont décidé que toute la famille rendrait visite à la tante Sophie. Le joueur 1 commence à jouer le premier. Il peut accepter d'aller chez la tante Sophie (déplacement à gauche dans l'arbre) ou refuser (déplacement à droite dans l'arbre). Si l'enfant décide d'aller chez la tante Sophie, le jeu est fini et chaque joueur reçoit un gain de 1. Si l'enfant refuse d'y aller et joue à droite alors les parents sont devant le choix suivant : ils peuvent le punir en le privant de sortie (déplacement à gauche) ou céder et toute la famille ira au cinéma (déplacement à droite). Si les parents jouent à gauche, les parents comme l'enfant reçoivent un gain de -1. Si ils jouent à droite, alors l'enfant reçoit un gain de 2 et les parents un gain de 0.

[12] Reinhard Selten est un économiste et un théoricien des jeux allemand qui enseigne à l'université de Bonn. Il a obtenu le Prix Nobel d'Economie en 1994 .

[13]Ce jeu est à relier au célèbre modèle de « l'enfant gâté » (rotten kid) de Becker.

Figure 4 Menace crédible dans un jeu sous forme extensive

L'équilibre (obéir, punir si l'enfant a désobéi) repose sur une menace non crédible de la part des parents de punir leur enfant si ce dernier a désobéi.



Ce jeu contient une menace des parents de punir l'enfant si ce dernier refuse d'aller chez sa tante. Cependant comme nous le verrons plus tard, cette menace n'est pas crédible. En effet le joueur 1 est un *enfant gâté*, il pleurera toute l'après-midi si ses parents le punissent. Pour être tranquille, les parents ne mettront pas à exécution leur menace, bien que l'enfant ait refusé d'aller chez sa tante. Ils préféreront revenir sur leur décision et aller au cinéma

La table 8 présente la forme normale de ce jeu. Remarquons que dans sa forme normale le jeu donne à chaque joueur le choix entre deux stratégies.

Table 8 le jeu de l'enfant gâté : la forme normale du jeu de la figure 4.

		Parents	
		Punir	Ne pas punir
Enfant	Obéir	***1 , 1***	1 , 1
	Désobéir	-1 , -1	**2 , 0**

Dans sa forme normale, le jeu a deux équilibres : le premier correspond aux stratégies suivantes (obéir, punir), le second correspond aux stratégies (désobéir, ne pas punir). Le joueur 2 a une incitation faible à adhérer au premier de ces équilibres ou du moins à ne pas dévier de celui-ci. Car si le joueur 1 choisit d'aller chez la tante, le joueur 2 est indifférent entre ses deux stratégies (punir, ne pas punir). Malgré cela, chacun des équilibres de la forme normale satisfait la définition d'un équilibre de Nash - aucun des joueurs ne fait strictement mieux en déviant de sa stratégie d'équilibre.

Dans la forme extensive du jeu (figure 4), bien que les deux équilibres soient des équilibres de Nash, un des deux (obéir, punir) est moins satisfaisant que l'autre. En effet, il repose sur une menace non crédible - la menace proférée par les parents envers leur enfant.

Pour mieux comprendre la notion de menace non crédible, reformulons l'équilibre (obéir, punir) dans les termes suivants. Les parents préviennent leur enfant « Nous voulons que tu ailles chez ta tante, car ce choix nous donne une satisfaction de 1. Si tu obéis, tu recevras aussi une satisfaction de 1. Par contre, si tu désobéis, nous te punirons, auquel cas tu recevras une satisfaction de -1. Ainsi, tu ferais mieux d'obéir. » L'équilibre reposant sur cette menace est un équilibre de Nash pour la raison suivante. Connaissant la menace du joueur 2, la meilleure réponse du joueur 1 est d'obéir ; et si le joueur 1 choisit d'aller chez sa tante, le choix du joueur 2 n'a aucune importance parce qu'il n'aura pas besoin de jouer ou de répondre au choix du joueur 1.

Cet équilibre pose problème car *la menace du joueur 2 n'est pas crédible*. Par exemple, supposons que les parents tiennent le discours cité précédemment, mais que malgré cette menace, l'enfant désobéisse. Si le joueur 1 défie cette menace, le joueur 2 se retrouve au deuxième noeud de l'arbre (figure 4) confronté aux choix suivants : soit il met à exécution sa menace et reçoit un gain de -1, soit il cède et reçoit un gain de 0. Si les parents sont rationnels, ils préféreront une satisfaction nulle à une satisfaction de -1. Seule la rancune pourrait les conduire à mettre leur menace à exécution. Clairement, (obéir, punir) n'est pas un équilibre satisfaisant car il s'appuie sur une menace non crédible. Mis devant le fait accompli (le refus de leur enfant d'aller chez sa tante), les parents préfèrent aller au cinéma plutôt que de punir.

EQUILIBRES DE SOUS-JEUX PARFAITS (AVEC MENACE CREDIBLE)

Le discours du joueur 2 cité précédemment spécifie un plan d'action qui s'applique à l'ensemble du jeu. Le joueur 2 précise ce qu'il fera face à tous les choix possibles du joueur 1. Si le joueur 1 se déplace à droite au lieu d'aller à gauche le jeu atteint le noeud 2 et nous pouvons considérer que la partie restante de l'arbre qui part de ce noeud constitue un sous-jeu du jeu entier.

Les équilibres de Nash s'appuient souvent sur des menaces à travers lesquelles les joueurs s'engagent à punir leurs adversaires, si le jeu atteignait un sous-jeu particulier. Cependant nous souhaitons restreindre l'ensemble des équilibres aux seuls équilibres reposant sur des menaces crédibles. Une menace est **crédible** si cette menace est *effectivement mise en oeuvre lorsque le jeu atteint le noeud où elle est supposée prendre effet*.

Dans notre exemple (figure 4), le joueur 2 ne met pas à exécution sa menace dans le sous jeu partant du noeud 2. En effet, il n'a aucune incitation à le faire même s'il avait déclaré le contraire au début du jeu. Les stratégies des joueurs 1 et 2 ne conduisent pas à un équilibre dans le sous-jeu partant du noeud 2. Ces considérations nous amènent à définir un **équilibre de sous-jeu parfait** comme une combinaison de stratégies (une stratégie par joueur) telle que *les actions prescrites par ces stratégies constituent un équilibre de Nash dans tous les sous-jeux*.

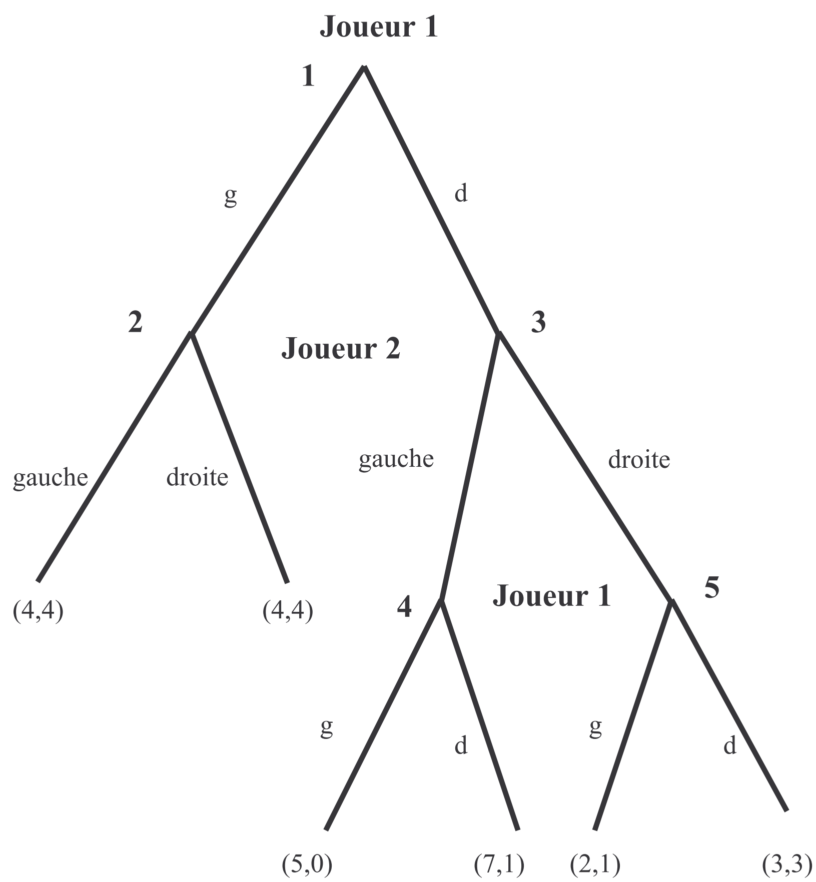
Nous n'approfondirons pas ici la notion de sous-jeu . Pour notre propos, il suffit de définir un **sous-jeu** comme le *noeud d'un arbre et toutes les branches partant de ce noeud*.

INDUCTION A REBOURS ET EQUILIBRES DE SOUS-JEUX PARFAITS

Dans les jeux à information parfaite, il existe une méthode simple pour déterminer les équilibres de sous-jeux parfaits. Il s'agit de l'**induction à rebours**, un *processus de résolution des jeux qui consiste à commencer par la fin du jeu puis à remonter jusqu'au point de départ pour comprendre la façon dont chaque joueur va se comporter*. Considérons l'arbre dessiné à la figure 5.

Figure 5 Induction à rebours

Raisonner à rebours depuis les noeuds terminaux jusqu'au noeud initial élimine les équilibres qui reposent sur des menaces non crédibles.



Dans ce jeu, le joueur 1 se déplace le premier soit à gauche (g) soit à droite (d). Si il se déplace à gauche , le joueur 2 a le choix entre droite ou gauche, mais quoi qu'il fasse le jeu se terminera sur un gain de 4 pour les deux joueurs. Si le joueur 1 se déplace à droite, le joueur 2 a le choix entre gauche et droite. Mais chacun de ces deux choix conduit le joueur 1 à un nouveau noeud de décisions (noeuds 4ou 5). Il doit décider de nouveau entre gauche et droite pour que le jeu se termine. Les gains que touchent les joueurs à l'issue du jeu dépendent du chemin emprunté dans l'arbre c'est-à-dire des choix successifs des joueurs 1 et 2.

Pour déterminer les équilibres de sous-jeux parfaits, nous parcourons l'arbre à rebours en partant des derniers noeuds de décision. Par exemple, si le jeu atteint le noeud 5, quelle sera la décision du joueur 1 ? S'il choisit droite, lui et le joueur 2 recevront chacun un gain de 3. S'il choisit gauche, il recevra seulement un gain de 2 et le joueur 2 un gain de 1. Si le joueur 1 est rationnel, il choisira finalement droite à ce noeud de décision et retirera un gain de 3. De même, si le jeu atteint le noeud 4, quelle est la meilleure stratégie du joueur 1 ? S'il choisit droite, il recevra 7 et le joueur 2 recevra 1. Si le joueur 1 se déplace à gauche, lui et le joueur 2 recevront respectivement 5 et 0. Clairement si le joueur 1 est rationnel, il se déplacera à droite et recevra un gain de 7.

Revenons maintenant au noeud précédent (c'est à dire le noeud 3). Le joueur 2 doit choisir entre gauche et droite. Au moment d'envisager l'un ou l'autre des déplacements, il sait que s'il choisit droite le joueur 1 choisira ensuite droite et son gain sera de 3. Mais s'il choisit, gauche le joueur 1 choisira droite et son gain sera seulement de 1. Comme le joueur 2 est rationnel, il choisira droite. La valeur de ce noeud de décision pour le joueur 2 est donc de 3. Nous pouvons remplacer ce noeud par la paire de gains **(3,3)** car nous savons que si le jeu atteint ce noeud, il se poursuivra jusqu'au noeud terminal (3,3). Finalement, revenons au noeud de départ (le noeud 1). Au moment où le joueur 1 débute le jeu, il sait que s'il choisit droite le jeu se déplacera vers un gain final de 3. Si le joueur 1 choisit gauche, il touchera quel que soit le choix du joueur 2 un gain de 4. Donc si le joueur 1 est rationnel, il choisira gauche initialement.

La stratégie consistant pour le joueur 1 à jouer gauche au noeud 1, pour le joueur 2 à jouer droite au noeud 3, et enfin pour le joueur 1 à jouer droite au noeud 5 est un équilibre de sous-jeu parfait obtenu par un processus d'induction à rebours. Ce processus élimine les équilibres avec menace non crédible, car il détermine ce que les joueurs feront dans chaque sous-jeu, en partant des noeuds terminaux jusqu'au noeud initial.

4 RATIONALITE ET EQUITE

La théorie néoclassique reposent sur certaines hypothèses relatives au comportement humain - notamment que les individus sont rationnels et intéressés. Les théoriciens des jeux font aussi ces hypothèses. Ainsi lorsqu'ils considèrent un jeu, ils fondent leur analyse stratégique uniquement sur les gains que recevront les joueurs. Les théoriciens des jeux supposent qu'un joueur est intéressé par ses seuls gains et ne se soucie des gains de ses adversaires que dans la mesure où ces gains orientent les choix de ces derniers.

QUELQUES EVIDENCES EXPERIMENTALES

Cette vision traditionnelle du comportement humain a récemment été contestée par certains résultats expérimentaux. De nombreux économistes ont montré que les individus placés dans des situations de jeu étaient très soucieux d'équité dans l'issue du jeu. Evidemment, les résultats de telles études violent les hypothèses traditionnelles d'égoïsme et de rationalité. Une des expériences les plus célèbres a été réalisé en Allemagne par Guth, Schmittberger et Schwarze[14]. Ils ont demandé à des individus de participer à un jeu simple d'ultimatum Dans ce jeu à deux personnes, le joueur 1 partage une somme d'argent C entre lui et le joueur 2. Il annonce la part qu'il souhaite garder pour lui. Soit a_1 la somme que le joueur veut conserver et $C- a_1$ la somme qu'il donne au joueur 2. Le joueur 2 peut soit accepter soit refuser le partage proposé par le joueur 1. Si le joueur 2 accepte , il reçoit $C- a_1$ et le joueur 1 a_1. Si le joueur 2 rejette le partage, le deux joueurs perdent cette somme d'argent.

Si nous utilisons l'induction à rebours pour analyser ce jeu, il devient clair qu'un joueur 1 rationnel offrira au joueur 2 une part de C aussi petite que possible. A la dernière étape, le joueur 2 a le choix entre un gain positif (même petit) ou nul. S'il est rationnel, il acceptera le partage quelle que soit la somme proposée par le joueur 1, parce que c'est toujours mieux que rien. D'après les hypothèses traditionnelles en théorie des jeux sur le comportement humain, nous prédisons que l'argent devrait être partagé de telle manière que le joueur 1 recoive presque tout et le joueur 2 se contente d'une somme dérisoire.

Curieusement, ce n'est pas le résultat observé dans les expériences menées par Guth, Schmittberger et Schwarze. Ces expériences ont montré que les individus dans le rôle du joueur 1 réclamaient seulement 50 à 60% de la somme totale, malgré l'avantage stratégique qu'ils détenaient. Ils ne profitaient pas pleinement de cet avantage stratégique contrairement à ce que prédisaient la méthode d'induction à rebours. De plus, les individus dans le rôle du joueur 2 rejetaient souvent des partages proposés quand ils jugeaient leur part trop faible. En d'autres termes, ils souhaitaient ne rien recevoir plutôt que d'accepter un partage qu'ils estimaient injuste, inéquitable. Evidemment, ces individus n'adoptaient pas un comportement « rationnel ». Ils ne réagissaient pas selon le principe qu'il vaut mieux obtenir un peu que rien du tout.

5 LA THEORIE DES JEUX EN QUESTION : LE DEBAT FISHER-SHAPIRO

Un des domaines d'application majeur de la théorie des jeux est sans aucun doute l'économie industrielle. Les qualités de rigueur et de discipline de la théorie des jeux dans l'analyse les comportements stratégiques des entreprises expliquent la place prépondérante qu'elle occupe en économie industrielle. Plus qu'une boîte à outils, la théorie des jeux est un mode de réflexion stimulant qui, en moins de vingt ans, a redonné à l'économie industrielle une seconde jeunesse.

[14] Se reporter à Werner Guth, Rolf Schmittberger et Bernd Schwarze «An Experimental Analysis of Ultimatum Bargaining,» *Journal of Economic Behavior and Organization* , Vol.3, 1982, pp.367-388.

Cet attrait pour la théorie des jeux n'est cependant pas partagé par l'ensemble des économistes. Ainsi, Fisher[15] reproche aux jeunes économistes leur tendance à penser tous les problèmes en termes de théorie des jeux, même des problèmes plus faciles à traiter sous d'autres formes. Plus généralement, Fisher semble très sceptique sur l'apport de la théorie des jeux à la théorie de l'oligopole. Loin de parvenir à une théorie universelle des comportements, avec des relations claires entre structures, comportements et performances, la théorie des jeux a conduit à une accumulation de modèles dont les résultats sont extrêmement sensibles aux hypothèses ou au contexte.

« Le statut de la théorie de l'oligopole est celle d'une théorie de l'exemple. Nous savons qu'une diversité de choses peuvent arriver. Nous n'avons pas une théorie cohérente et formelle de ce qui doit se passer ou une théorie qui nous explique comment ce qui se passe dépend de variables bien définies et mesurables. [...] La théorie de l'oligopole consiste pour le moment en un grand nombre d'histoires, chacune décrivant ce qui devrait se passer dans une situation particulière »[16].

Plus grave encore, Fisher constate que les théoriciens se soucient plus de l'élégance formelle de leurs modèles que de leur portée pratique. Un grand nombre de modèles ne partent d'aucune observation réelle ou ne répondent à aucun enjeu économique[17].

« Il existe une forte tendance, même chez les bons théoriciens, à se concentrer sur des questions d'ordre analytique, plutôt que sur des questions ayant un intérêt pour l'étude des industries réelles. Le résultat est souvent une série d'analyses parfaitement fascinantes. Mais tant que cette tendance continuera, ces analyses demeureront simplement un jeu d'économistes »[18].

Shapiro[19] répond aux critiques de Fisher en deux temps. Premièrement, en tant qu'ancien étudiant de Fisher au MIT, il explique au lecteur que le professeur Fisher est coutumier de ce genre de critiques. Il se rappelle que chaque année, Fisher, voulant stimuler l'ardeur de ses étudiants, les avertissait avant l'examen que le niveau atteint était très insatisfaisant. Dans ces conditions, la critique de Fisher peut être comprise par les théoriciens de l'économie industrielle comme une invitation à redoubler d'efforts. Deuxièmement et plus fondamentalement, Shapiro ne voit aucune raison à l'existence d'une théorie générale qui aboutirait à des prédictions uniques et indépendantes de la nature du marché. La diversité des hypothèses et des résultats est le signe, au contraire, d'un progrès des connaissances dans la mesure où elle répond à la richesse des comportements observés sur les marchés. A cet effet, Shapiro établit un parallèle entre le

[15] Fisher, F. (1989) « Games Economists Plays : a Noncooperative View », *Rand Journal of Economics* 20, 113-124.

[16] Fisher [1989], p118.

[17] Voir aussi sur ce point Milgrom et Roberts [1988] « Economic Theories of the Firm, past, present and future », *Canadian Journal of Economics* 21.

[18] Fisher [1989], p123.

[19] Shapiro, C. (1989a) « The Theory of Business Strategy », *Rand Journal of Economics* 20, 125-137.

biologiste qui s'efforce de recenser les différentes stratégies d'adaptation et de survie des espèces sur terre et l'économiste dont l'objectif serait d'établir une classification des comportements stratégiques des firmes. La théorie des jeux contribue largement à cet objectif. Elle est à l'origine de nombreuses avancées et d'un renouveau de l'analyse dans trois principales directions : les asymétries d'information, la crédibilité des engagements et la dynamique des comportements.

Même Fisher [1987] reconnaît sur ce dernier point quelque mérite à la théorie des jeux. Il concède que l'approche de la collusion par les jeux répétés a donné lieu à des travaux de qualité même s'il regrette que cette question n'occupe pas une place centrale en économie industrielle.

« La question cruciale pour la théorie de l'oligopole n'est pas de connaître l'issue des jeux statiques. En fait, elle porte sur les facteurs et les conditions conduisant à une issue coopérative qui maximise les profits joints dans un jeu répété. En résumé, je pense que les théoriciens se trompent d'objet d'étude. Ils accumulent de nombreux résultats anecdotiques sur les jeux oligopolistiques statiques alors que l'on voudrait savoir quels sont les facteurs qui font que l'équilibre collusif est choisi dans un jeu répété. Autant que je puisse le voir, la nouvelle théorie de l'oligopole a fait très peu de progrès sur cette question centrale »[20].

La section suivante est consacrée à une présentation rapide de la théorie des jeux répétés.

6 LES JEUX REPETES

Jusqu'à présent, nous avons supposé qu'un jeu était joué une seule fois en information complète ou incomplète. Nous savons cependant que dans la réalité les agents économiques jouent le même jeu plusieurs fois de suite. Par exemple, chaque année, Renault et Peugeot, les deux principaux constructeurs automobiles français, choisissent le prix et le style de leurs voitures, puis se font concurrence sur le marché. Bien que les conditions de ce jeu évoluent au cours du temps, nous pouvons le concevoir comme la répétition du même jeu. Clairement, les jeux répétés constituent une catégorie de jeu essentielle dans la réalité.

Qu'entendons-nous précisément par **jeux répétés**? Nous pouvons les définir comme des jeux dans lesquels un *ensemble défini de joueurs se rencontrent de façon répété*. Dans cette appendice nous analysons les jeux répétés dont les conditions ne changent pas au cours du temps et dont les gains de chaque période ne sont pas affectés par les gains des périodes précédentes[21].

[20] Fisher [1989], p122.
[21] Nous parlons de jeu répété stationnaire.

La plupart des manuels de théorie des jeux introduisent la notion de jeux répétés à partir du dilemme du prisonnier. Selon Luce et Raïffa[22], ce jeu à deux joueurs et à somme non nulle peut être attribué à Tucker. L'histoire est la suivante. La police arrête deux suspects et les place en garde à vue. La police est convaincue qu'ils ont commis un hold-up mais ne dispose pas de preuves suffisantes. Les policiers décident alors d'interroger les deux suspects séparément, pour obtenir des aveux. Chaque suspect se voit offrir deux choix possibles, soit il se tait, soit il dénonce son complice. Si les deux gardent le silence, ils ne peuvent être condamnés que pour un délit mineur comme le port d'armes et ne resteront pas longtemps en prison. Si l'un dénonce et l'autre se tait, alors le premier est relâché et le second écope d'une longue peine de prison. En revanche si les deux se dénoncent, ils sont envoyés en prison mais la sentence est légèrement moins sévère que si un seul est dénoncé.

Cette situation stratégique peut être décrite de manière plus formelle. Soient deux joueurs, le suspect 1 et le suspect 2. Chacun a deux stratégies possibles (dénoncer ou se taire). A chaque combinaison de choix sont associées une peine de prison pour le suspect 1 et une peine de prison pour le suspect 2. Le tableau 9 nous donne des exemples de peines. En ligne nous avons le choix du suspect 1 et en colonne celui du suspect 2. Dans chacune des cases du tableau, la première peine de prison est celle du suspect 1 et la seconde peine celle du suspect 2. Par exemple, si le suspect 1 dénonce et que son complice se tait, le premier est relâché et le second est condamné à six ans de prison. Si les deux se dénoncent, ils sont condamnés à quatre ans de prison chacun. Si les deux se taisent, ils resteront une année en prison.

Table 9 les années de prisons dans le dilemme du prisonnier

		suspect 2	
		dénoncer	se taire
suspect 1	dénoncer	**(4 ; 4)**	**(0 ; 6)**
	se taire	**(6 ; 0)**	**(1 ; 1)**

Si chaque suspect cherche à maximiser son utilité directe qui est une fonction décroissante du temps passé en prison, le choix « dénoncer » est une stratégie dominante pour les deux suspects. En effet, si le suspect 1 s'attend à ce que son complice se taise, il est relâché s'il le dénonce et il est condamné à 4 ans s'il se

[22] Luce, R., & H. Raiffa (1957) *Games and Decision,* New-York, Wiley.

tait. S'il s'attend à ce que son complice dénonce, sa meilleure réponse est de dénoncer, car il est condamné à 4 ans contre 6 ans s'il se tait. Quel que soit le choix de son complice, le suspect 1 obtient une plus grande utilité en choisissant de dénoncer. Le raisonnement est similaire pour le suspect 2. Le seul équilibre de ce jeu[23] est donc (dénoncer, dénoncer).

Cet équilibre est Pareto dominé par l'issue (se taire, se taire), car les suspects pourraient réduire leur peine de prison de 4 ans à 1 ans en se taisant. Cette sous-optimalité de l'équilibre de Nash constitue le dilemme du prisonnier, dilemme que nous observons dans de nombreuses situations stratégiques (concurrence oligopolistique, politique commerciale entre pays, course aux armements,...). Le dilemme du prisonnier décrit une situation dans laquelle les joueurs ont intérêt collectivement à adopter un comportement coopératif (se taire) mais sont incités individuellement à adopter un comportement agressif ou opportuniste (dénoncer).

JEUX REPETES EN HORIZON FINI

Compte tenu de ce que nous savons sur les stratégies dominantes, nous pouvons prédire que chacun dénoncera si le jeu est joué une seule fois. Pouvons-nous nous attendre à un comportement différent si le jeu est répété 100 fois ou 100 000 fois ? Notre première réaction serait de répondre oui. Nous pouvons penser que si les deux joueurs ont plus de temps pour observer le résultat de leurs interactions stratégiques, ils peuvent prouver leur bonne foi et établir un climat de confiance mutuelle. Dans un jeu qui n'est joué qu'une seule fois, il n'y a pas d'horizon futur et les joueurs ne peuvent espérer tirer un gain de leur bonne volonté présente. Cette intuition quoique logique se révèle incorrecte.

Si nous utilisons l'induction à rebours (voir la section 3), nous pouvons voir qu'ajouter un horizon fini au dilemme du prisonnier ne change rien à l'issue d'équilibre. A chaque période, les joueurs dénonceront. Répéter le dilemme du prisonnier un nombre fini de fois ne transforme pas ce dernier en jeu coopératif. Cependant, cela ne signifie pas que si ce jeu se déroulait dans la réalité ou dans un cadre expérimental, nous observerions que les gens se confessent toujours. En fait, les études expérimentales menées par Rapoport et Chammah traitent cette question et montrent que dans les premières périodes d'un jeu fini, les sujets coopèrent. Cette coopération cesse seulement dans les dernières périodes[24].

Afin de comprendre pourquoi la théorie des jeux prédit que les suspects se dénonceront à chaque période, regardons la dernière période du jeu à horizon fini. A cette période il n'y a plus d'horizon futur pour les joueurs. La situation peut donc se ramener à celle d'un jeu joué une seule fois. Les deux joueurs dénonceront parce qu'ils ne se font pas confiance et que la dénonciation est une stratégie dominante. Mais cela implique que les joueurs à l'avant dernière période connaîtront l'issue de la dernière période . Il n'y aura donc pas non plus d'horizon futur à cette avant-

[23] C'est un équilibre en stratégies dominantes.

[24] Anatol Rapoport et Albert Chammah, *Prisonner's dilemma* (Ann Arbor, Michigan : University of Michigan Press, 1965).

dernière période. Ainsi les joueurs n'auront aucune raison de se faire confiance à cette période là. A l'avant-dernière période comme à la dernière période, les deux joueurs s'accuseront mutuellement. En poursuivant ce raisonnement à rebours, nous parvenons à la première période du jeu et nous concluons que les joueurs choisiront de dénoncer à la première période et à toutes les périodes suivantes. Le même raisonnement tient si le jeu est répété un million de fois. Lorsque nous avons un jeu à horizon fini, l'induction à rebours permet de montrer que l'issue est identique à celle d'un jeu non répété.

JEUX REPETES A HORIZON INFINI

Que se passe-t-il lorsque le jeu est infiniment répété ? Comme nous le verrons, il existe des équilibres dans lesquels les joueurs coopèrent à chaque période du jeu à horizon infini si le facteur d'actualisation est suffisamment élevé. Le facteur d'actualisation mesure la valeur qu'un joueur accorde à ses gains futurs par rapport à ses gains présents.

Supposons que les joueurs participent à un jeu infini. Evidemment, leur vie est limitée dans le temps et ils n'auront pas la possibilité de jouer ce jeu jusqu'à son terme. Nous supposons simplement qu'ils représentent des groupes de personnes ou d'intérêt qui sont engagés indéfiniment dans ce jeu. Par exemple, le président de la République Française peut penser qu'il prend ses décisions au nom d'une entité qui existera éternellement, notamment à travers les présidents qui lui succéderont.

A chaque période, les joueurs arrêtent des choix et selon ces choix reçoivent un paiement. Cependant, comme la plupart des gains sont perçus dans des périodes futures, nous avons besoin d'une mesure pour comparer les revenus présents et les revenus futurs. A priori, une somme d'argent reçue aujourd'hui est plus appréciée que la même somme reçue un an plus tard. Les joueurs ont toujours la possibilité d'attendre une année avant de dépenser cet argent, mais ils peuvent tout aussi bien l'utiliser immédiatement. Par exemple, si un joueur reçoit cent francs aujourd'hui, il peut en profiter immédiatement en achetant ce qu'il veut ou il peut le déposer dans une banque et toucher des intérêts. Ainsi, dans un an, il disposera de cent francs plus les intérêts.

Plus précisément, supposons qu'un joueur dispose de A francs et dépose cette somme dans une banque durant une année à un taux d'intérêt de r % par an. A la fin de l'année, il disposera de $A(1+r)$ francs. Ainsi, A francs aujourd'hui sont équivalents à $A(1+r)$ francs un an plus tard. Si le joueur dépose A francs dans cette banque durant deux années, il disposera de $A(1+r)(1+r)$ ou $A(1+r)^2$ à l'issue des deux années. De façon plus générale, A francs aujourd'hui sont équivalents à $A(1+r)^t$ francs, t années plus tard.

Estimons la valeur d'un flux de revenus futurs. Nous pouvons poser la question suivante. Quelle est la valeur présente de B francs versés au joueur dans t années ? Pour obtenir B francs dans t année, nous devrions déposer à la banque aujourd'hui seulement $\frac{B}{(1+r)^t}$. Ainsi, $\frac{B}{(1+r)^t}$ est la valeur présente de B francs disponibles dans t années. Pour appliquer ce concept aux jeux stratégiques, supposons que les joueurs 1 et 2 sont engagés dans un jeu à horizon infini et que les stratégies d'équilibres mises en oeuvre leur confèrent chacun un flux de revenu $a = (a_0, a_1, ..., a_t, ...)$ où a_0 est le revenu à la période initiale (t=0), a_1 est le revenu à la période suivante (t=1) et a_t le revenu à la t$^{\text{ième}}$ période du jeu. Comme le jeu est à horizon infini, le flux de revenu s'étend à l'infini. Si nous appelons la période initiale période zéro, la valeur présente de ce flux de revenu s'écrit :

$$\pi_i = \frac{a_0}{(1+r)^0} + \frac{a_1}{(1+r)^1} + \frac{a_2}{(1+r)^2} + \dots ou\ \pi_i = \sum_{t=0}^{\infty} \frac{a_t}{(1+r)^t}$$ où

$\sum_{t=0}^{\infty}$ est une somme de zéro à l'infini.

Cette expression représente le gain actualisé d'un joueur dans le cadre d'un jeu infiniment répété, lorsque son flux de revenu est $(a_0, a_1, ..., a_t, ...)$. Notons que le gain à la période 0 est simplement $\frac{a_0}{(1+r)^0}$ ou a_0 car $(1+r)^0 = 1$. Le gain de la période suivante est équivalent à un revenu présent de $\frac{a_1}{(1+r)^1}$ et le gain de la période t à un revenu présent de $\frac{a_t}{(1+r)^t}$ Notons que lorsque t devient grand, $\frac{a_t}{(1+r)^t}$ tend vers zéro (car $r > 0$). Ainsi, les revenus perçus dans un avenir très lointain n'ont guère de valeur présente pour le joueur. Si nous appelons $\delta = \frac{1}{(1+r)^t}$ le facteur d'actualisation d'un joueur, il est clair que plus δ est petit et moins le joueur accorde de valeur à ses revenus futurs (car tout revenu futur a_t est multiplié par δ^t, donc si δ^t diminue, la valeur présente de a_t diminue aussi).

Finalement, notons que si un joueur devait recevoir le même revenu $\bar{a}$ à chaque période, alors la valeur présente de ce flux de revenu serait égale à $\pi_i = \sum_{t=0}^{\infty} \delta^t \bar{a}$. Bien que ce soit une somme sur l'infini, ce flux actualisé a une valeur finie. En fait, nous pouvons montrer que cette somme est égale à $\frac{\bar{a}}{(1-\delta)}$.

Revenons maintenant au dilemme du prisonnier. Nous voulons démontrer que dans un jeu à horizon infini il est possible d'observer de la coopération entre les joueurs à toutes les périodes du jeu. (Bien sûr nous savons que ce type de coopération n'est pas possible dans un jeu à horizon fini). Soit D l'action de dénoncer et N celle de nier. Nous considérons désormais le tableau de gains suivant associés à chaque situation stratégique.

Table 10 les gains dans le dilemme du prisonnier

suspect 2

suspect 1

	D (dénoncer)	N (nier)
D (dénoncer)	**(4 ; 4)**	**(12 ; 0)**
N (nier)	**(0 ; 12)**	**(6 ; 6)**

Posons la stratégie suivante :

1) je ne dénonce pas à la période initiale (période zéro).

2) je continue à ne pas dénoncer aux périodes suivantes tant que mon complice n'a pas dénoncé.

3) si mon complice m'a dénoncé, alors je le dénonce à toutes les périodes suivantes.

Si cette stratégie est utilisée par les deux complices, on est en présence d'un accord implicite de coopération avec menace de punition infinie si l'un des deux refuse de coopérer. Le terme de **stratégie de déclic** (*trigger strategy* en anglais) est employé pour décrire ce type de stratégies, car une seule déviation suffit à déclencher une punition infinie. Les déviations servent de déclic dans la mise en oeuvre des punitions. C'est une stratégie qui repose sur des punitions extrêmement sévères.

Si chaque joueur utilise une telle stratégie et si le facteur d'actualisation des joueurs δ est suffisamment élevé, alors cette paire de stratégies constitue un équilibre de Nash du jeu répété. Pour tester la validité de cette proposition, supposons que chaque joueur utilise la stratégie décrit précédemment. Si à chaque période les joueurs coopèrent (joue N) , ils recevront le flux de gain associé à (N; N). La valeur présente de ce flux de gains selon les valeurs de la table 10, est égale à $6/(1-\delta)$. Si la stratégie décrite ci dessus conduit à un équilibre de Nash, aucun des joueurs ne doit avoir d'incitation à dévier de cette stratégie. Vérifions que tel est bien le cas. Par exemple, supposons que le joueur 1 envisage de dévier à la date t en dénonçant le joueur 2 à la police. Sa stratégie est la suivante : « je choisirai N de la période 0 à la période t-1, puis à la période t je dévierai en choisissant D. A partir de cette date, sachant que mon complice me punira pour toujours en choisissant D, ma meilleure réponse sera aussi de choisir toujours D. Un telle stratégie de déviation rapporte au joueur 1 le flux de gain suivant a_0^1(N ; N),...., a_{t-1}^1(N ; N), a_t^1(D ; N),), a_{t+1}^1(D ; D), a_{t+2}^1(D ; D),...où a_0^1 est le gain du joueur 1 à la période initiale (t=0), a_t^1 le gain du joueur 1 à la période t. Si le joueur 1 prévoit de dévier à la date t, et que le joueur 2 reste fidèle à la stratégie initiale de coopération, alors le joueur 1 recevra le gain de coopération (soit 6) de la période initiale à la période t-1. A la date t, en déviant, il recevra le gain a^1(D ; N) soit 12. A partir de cette date, son gain à chaque période sera a^1(D ; D) soit 4. Ce dernier gain est beaucoup plus faible que le gain résultant de la coopération. Est-ce qu'une déviation est profitable sachant que l'autre joueur respecte la stratégie initiale de coopération ? En d'autres termes, est-ce que le gain supplémentaire que le joueur obtient à la date t en trahissant le joueur 2 est suffisamment attractif pour qu'il renonce aux bénéfices de la coopération aux périodes suivantes ?

Pour définir les conditions sous lesquelles aucune déviation n'est profitable, posons P_1 la valeur présente des gains du joueur 1 dans ce jeu répété. Si le joueur 2 maintient sa stratégie initiale, de coopération alors la valeur actualisée des gains du joueur 1 en cas de déviation s'écrit :

$$P_1 = \sum_{\rho=0}^{t-1} \delta^{\rho} a^1(\mathrm{N}\,;\mathrm{N}) + \delta^t a^1(\mathrm{D}\,;\mathrm{N}) + \sum_{\rho=t+1}^{\infty} \delta^{\rho} a^1(\mathrm{D}\,;\mathrm{D}).$$

La valeur associée à la coopération parfaite s'écrit en revanche :

$$P_1 = \sum_{\rho=0}^{\infty} \delta^{\rho} a^1(\mathrm{N}\,;\mathrm{N}).$$

Notons que jusqu'à la date t, les deux stratégies donnent les mêmes gains, car elles prescrivent les mêmes actions (N). A partir de la date t, les gains diffèrent. Le joueur sera-t-il incité à dévier à la date t ? Une telle déviation sera profitable si

$$\delta^t a^1(\mathrm{D}\,;\mathrm{N}) + \sum_{\rho=t+1}^{\infty} \delta^{\rho} a^1(\mathrm{D}\,;\mathrm{D}) \geq \sum_{\rho=t}^{\infty} \delta^{\rho} a^1(\mathrm{N}\,;\mathrm{N}).$$

Le terme de gauche dans l'inégalité représente la valeur présente des gains associés à la stratégie de déviation de la date t à l'infini et le terme de droite la valeur présente des gains associés à la stratégie de coopération sur cette même période. Cette inégalité peut être réécrite ainsi :

$$\delta^t a^1(\mathrm{N}\,;\mathrm{N})/(1-\delta) \leq \delta^t a^1(\mathrm{D}\,;\mathrm{N}) + \delta^{t+1} a^1(\mathrm{D}\,;\mathrm{D})/(1-\delta).$$

Après quelques transformations, nous obtenons qu'une déviation est profitable si et seulement et si :

$$\delta \leq [a^1(\mathrm{D}\,;\mathrm{N}) - a^1(\mathrm{N}\,;\mathrm{N})]/[\,a^1(\mathrm{D}\,;\mathrm{N}) - a^1(\mathrm{D}\,;\mathrm{D})]$$

En remplaçant dans cette inégalité les a^1 par leur valeur (voir table 10) une déviation est profitable si et seulement si :

$$\delta \leq [12 - 6]/[12-4] = 3/4$$

Plus les joueurs ont un facteur d'actualisation bas et plus la probabilité qu'une coopération infinie soit la stratégie d'équilibre, est faible. En effet, dans ce cas, les joueurs valorisent plus les gains qu'ils peuvent obtenir immédiatement en déviant que les pertes de revenus futurs liées à la punition qui s'en suit.

7 RESUME

Dans cette étude, nous avons défini un jeu stratégique comme un ensemble de règles qui contraignent le comportement des joueurs et spécifient leurs gains sur la base des actions mises en oeuvre. Nous avons vu que les jeux peuvent être classés selon différents critères. Par exemple, ils peuvent être classés selon la structure des gains, on distingue alors les jeux à somme nulle (la somme des gains de tous les joueurs est toujours égale à zéro quelle que soit l'issue du jeu) et les jeux à somme non nulle. Les jeux peuvent être classés sur la base de l'information dont disposent les joueurs (jeux à information parfaite ou imparfaite, à information complète ou incomplète). Une autre façon de classer les jeux consiste à distinguer ceux dont les règles permettent aux joueurs de communiquer entre eux (jeux coopératifs) et ceux dont les règles interdisent une telle communication (jeux non coopératifs).

En utilisant l'idée de fonction de meilleure réponse, nous avons défini les équilibres d'un jeu comme étant des équilibres de Nash - c'est à dire des états dans lesquels aucun joueur n'a d'incitation à modifier son comportement, compte tenu du comportement des autres joueurs. Nous avons vu qu'un jeu comporte de nombreuses combinaisons stratégiques. Pour qu'une combinaison de choix stratégiques constitue un équilibre de Nash, il faut qu'aucun joueur ne souhaite dévier unilatéralement de cette combinaison stratégique. Nous avons illustré ce concept par de nombreux exemples, y compris par un exemple de jeu dans lequel il n'existait pas d'équilibre de Nash en stratégies pures. Nous avons alors fait appel à des stratégies mixtes (des stratégies pures probabilisées). Nous avons aussi examiné la différence entre menaces crédibles et menaces non crédibles afin d'introduire la notion d'équilibres de sous-jeux parfaits - des équilibres qui s'appuient sur des menaces crédibles.

A plusieurs reprises au cours de cet article, nous avons présenté des études expérimentales (ou expériences de laboratoire) menées par des économistes afin de tester des hypothèses clés en théorie des jeux. Nous avons vu à travers les expériences de Schotter, Weigelt et Wilson que la façon dont était présenté un jeu (forme normale ou forme extensive) influençait le comportement des joueurs et l'issue de ce jeu. D'autre part, les expériences de Guth, Schmittberger et Schwarze ont souligné que les joueurs étaient moins égoïstes dans la réalité que ne le laissait supposer la théorie des jeux et qu'ils étaient très sensibles à la notion d'équité.