

Un résultat de décroissance des poches de tourbillon axisymétriques

H. ABIDI* AND T. HMIDI†

11 février 2005

Résumé

Nous étudions en dimension trois une équation de transport-diffusion relative à un champ de vecteurs log-lipschitz. Nous montrons en particulier que pour des données axisymétriques la norme L^2 de la solution décroît vers zéro, quand la viscosité tend vers zéro, loin du transporté du support initial par le flot. Ceci nous permet de montrer un résultat de limite non visqueuse pour le système de Navier-Stokes incompressible dans le cadre des poches de tourbillon axisymétriques dont le bord est supposé rectifiable.

Abstract

We study in dimension three a transport-diffusion equation with respect to log-lipschitz vector field. We show in particular that for axisymmetric initial data the L^2 norm of the solution decreases to zero, as the viscosity vanishes, far from the image through the flow of the initial support. This allows us to prove an inviscid limit result for incompressible Navier-Stokes system in the case of axisymmetric vortex patches having a rectifiable boundary.

1 INTRODUCTION

Considérons le système de Navier-Stokes incompressible décrivant la vitesse $v_\nu(t, x)$ d'un fluide évoluant dans l'espace tout entier \mathbb{R}^3 :

$$(NS_\nu) \begin{cases} \partial_t v_\nu + v_\nu \cdot \nabla v_\nu - \nu \Delta v_\nu = -\nabla p_\nu \\ \operatorname{div} v_\nu = 0 \\ v_\nu|_{t=0} = v^0, \end{cases}$$

où ν est un paramètre positif désignant la viscosité du fluide, supposée indépendante du temps et de l'espace. La pression $p_\nu(t, x)$ est un scalaire. Quand la viscosité est nulle, ce qui est le cas pour un fluide parfait, alors le système correspondant est appelé système d'Euler incompressible :

$$(E) \begin{cases} \partial_t v + v \cdot \nabla v = -\nabla p \\ \operatorname{div} v = 0 \\ v|_{t=0} = v^0. \end{cases}$$

L'étude de l'existence et l'unicité de solutions pour les systèmes (NS_ν) et (E) s'avère un thème qui est loin d'être achevé. C'est au début des années trente que J. Leray [4] montre qu'en

*Laboratoire Jacques-Louis Lions, 175 rue du Chevaleret, 75013 Paris. e-mail: abidi@ann.jussieu.fr

†IRMAR Université de Rennes 1, Campus de Beaulieu, 35042 Rennes. e-mail: thmidi@univ-rennes1.fr

dimension trois le système de Navier-Stokes incompressible possède une solution faible globale avec une donnée initiale dans $L^2(\mathbb{R}^3)$. L'unicité reste jusqu'à nos jours un problème ouvert. Cependant T. Kato [6] montre que si la donnée initiale est suffisamment régulière, typiquement dans l'espace de Sobolev H^s , avec $s > \frac{3}{2}$ (resp. $s > \frac{5}{2}$), alors on a un résultat local d'existence et d'unicité pour le système de (NS_ν) (resp. pour (E)). Malheureusement, l'existence globale pour le système (NS_ν) n'est pas encore élucidée. Par contre nous pouvons avoir une durée de vie infinie si l'on se restreint à des données initiales ayant des formes particulières. Par exemple, si la donnée initiale appartient à H^2 et axisymétrique, c'est-à-dire de la forme

$$v^0 = v_r^0(r, z)e_r + v_z^0(r, z)e_z,$$

alors nous avons un résultat global (voir [5]). Nous avons adopté le système de coordonnées cylindriques (r, θ, z) et

$$e_r = (\cos \theta, \sin \theta, 0), \quad e_\theta = (-\sin \theta, \cos \theta, 0) \quad \text{et} \quad e_z = (0, 0, 1).$$

En dessous de cette régularité et sous d'autres hypothèses sur la donnée initiale, portant essentiellement sur son tourbillon, on a effectivement un résultat global. Nous rappelons que le tourbillon est la matrice antisymétrique dont les coefficients sont

$$(\omega_\nu)_{i,j} = \partial_i v_\nu^j - \partial_j v_\nu^i, \quad 1 \leq i, j \leq 3.$$

Voici maintenant le résultat, dû à M. Ukhovskii et V. Yudovich [8], et qui sera le cadre dans lequel on va se placer.

Théorème 1. *Soit v^0 un champ de vecteurs axisymétrique, de divergence nulle et appartenant à H^1 . On suppose que son tourbillon initial ω^0 vérifie $\omega^0, \omega^0/r \in L^2 \cap L^\infty$. Alors, pour tout $\nu \geq 0$, le système (NS_ν) admet une unique solution v_ν dans $L^\infty(\mathbb{R}_+; L^2)$. Elle est axisymétrique et de plus $\omega_\nu \in L_{loc}^\infty(\mathbb{R}_+; L^2 \cap L^\infty)$ et $\omega_\nu/r \in L^\infty(\mathbb{R}_+; L^2 \cap L^\infty)$. Plus précisément, il existe un polynôme $P(t)$ de degré 3 et dont les coefficients dépendent seulement des quantités $\|v^0\|_{L^2}, \|\omega^0\|_{L^2 \cap L^\infty}$ et $\|\omega^0/r\|_{L^2 \cap L^\infty}$, tel que,*

$$\begin{aligned} \|\omega_\nu(t)\|_{L^2} &\leq \|\omega^0\|_{L^2} + Ct\|v^0\|_{L^2}\|\omega^0/r\|_{L^\infty}, \\ \|\omega_\nu(t)\|_{L^\infty} &\leq P(t), \\ \|\omega_\nu(t)/r\|_{L^p} &\leq \|\omega^0/r\|_{L^p}, \forall p \in]1, +\infty]. \end{aligned}$$

On déduit à partir de ce théorème le corollaire suivant :

Corollaire 1. *Sous les hypothèses du théorème ci-dessus, la solution v_ν appartient à l'espace $L_{loc}^\infty(\mathbb{R}_+; C_*^1)$, uniformément en ν . Plus précisément, il existe un polynôme P de degré 3 -comme dans le théorème précédent- tel que*

$$\|v_\nu(t)\|_{C_*^1} \leq P(t).$$

Signalons que si v^0 est axisymétrique alors le tourbillon ω_ν se réduit à $\omega_\nu(t) = \omega^\nu(t, r, z)e_\theta$. Ainsi en identifiant le vecteur ω_ν au scalaire ω^ν , on s'aperçoit que la quantité $a_\nu = \omega_\nu/r$ satisfait l'équation

$$\partial_t a_\nu + v_\nu \cdot \nabla a_\nu - \nu(\partial_r^2 + \partial_z^2 + 3r^{-1}\partial_r)a_\nu = 0.$$

Nous envisageons dans cet article d'étudier la répartition spatiale, en fonction de la viscosité, de la norme L^2 de $a_\nu(t)$, lorsque la donnée initiale est de type poche de tourbillon, c'est-à-dire de la forme $a_\nu|_{t=0} = a^0 = \mathbf{1}_\Omega$, avec Ω un domaine borné axisymétrique. Quand la viscosité est nulle alors une simple constatation nous assure que cette structure de poche se préserve en tout temps. Ceci n'est pas évidemment le cas pour des viscosités non nulles. Pourtant R. Danchin et J. Ben Amer [2] ont montré que si le bord de Ω est suffisamment régulier alors la norme L^2 est quasiment concentrée autour du transporté de Ω par le flot visqueux $\psi_\nu(t)$. L'importante information dont ils se servent est que le champ v_ν est lipschitzien avec un contrôle uniforme en ν . Ceci n'est plus vrai pour un domaine Ω non régulier, avec des coins par exemple. L'information qui persiste (voir le corollaire 1) est que le champ v_ν est contrôlé uniformément en ν dans la classe de Zygmund C_*^1 . Moyennant cette information et en reproduisant une démarche similaire à [7], nous avons réussi à établir un résultat de décroissance uniquement sous l'hypothèse que Ω est axisymétrique et que la mesure de Lebesgue de son bord est nulle. Nos résultats reposent sur des estimations pour le système de transport-diffusion suivant

$$(TD_\nu) \begin{cases} \partial_t a_\nu + v_\nu \cdot \nabla a_\nu - \nu(\partial_r^2 + \partial_z^2 + 3/r\partial_r)a_\nu = 0 \\ a_\nu|_{t=0} = a^0, \end{cases}$$

dans lequel aucun lien entre le champ v_ν et a_ν n'est requis. De plus le champ v_ν sera supposé de divergence et appartenant à la classe des fonctions log-lipschitziennes, notée C_{LL} . Cet espace contient l'espace C_*^1 .

Nous allons fixer quelques notations de base qui seront utiles pour la description de la décroissance de a_ν . On note $\psi_\nu(t, x)$ le flot régi par l'équation

$$\begin{cases} \partial_t \psi_\nu(t, x) = v_\nu(t, \psi_\nu(t, x)) \\ \psi_\nu(0, x) = x. \end{cases}$$

On le note simplement ψ lorsqu'il s'agit du flot de v . Signalons au passage l'existence et l'unicité du flot pour les champs log-lipschitziens dans la classe des fonctions continues [3]. On verra une formulation plus précise de ce résultat dans le théorème 4. On pose

$$\Omega = \text{supp}(a^0), \quad \Omega_t = \psi(t, \Omega) \quad \text{et} \quad \Omega_{t,\nu} = \psi_\nu(t, \Omega). \quad (1)$$

Remarque : Dans la suite le support de a^0 sera supposé compact et axisymétrique. Soit A un ensemble de \mathbb{R}^d et h une longueur. On définit les ensembles

$$A_h^c = \{x \in \mathbb{R}^d, \text{dist}(x, A) \geq h\} \quad \text{et} \quad (A^c)_h = \{x \in \mathbb{R}^d, \text{dist}(x, A^c) \geq h\}.$$

On définit aussi pour tout s et t positifs et pour l fixé dans $[\frac{1}{2}, 1]$

$$V_\nu(t, s) = \left| \int_s^t \|v_\nu(\tau)\|_{LL} d\tau \right|, \quad V_\nu(t) = V_\nu(t, 0) \quad \text{et} \quad \delta_\nu(t, h) = el \left(\frac{h}{el} \right)^{\exp V_\nu(t)}.$$

On souligne que le réel l représente l'unité de longueur. On l'a introduit pour adimensionner les quantités mises en jeu. On désigne par $(C_{LL}, \|\cdot\|_{LL})$ l'espace normé des fonctions v vérifiant

$$\|v\|_{LL} = \frac{\|v\|_{L^\infty}}{l} + \sup_{0 < |x-x'| \leq l} \frac{|v(x) - v(x')|}{|x - x'| \log \frac{el}{|x-x'|}} < \infty.$$

Remarque

Chaque fois qu'il s'agit de manipuler la même quantité dans le cas du système (T) , on lui attribue la même notation que (TD_ν) , mais sans l'indexer par ν .

En utilisant des troncatures exponentielles et en développant une méthode analogue à [2], nous avons réussi à établir un résultat local de décroissance exponentielle :

Théorème 2. *Il existe deux constantes C_0 et C , telles que on a les propriétés suivantes. Soit $(v_\nu)_\nu$ est une famille de champs de vecteurs axisymétriques, de divergence nulle et appartenant à $L^1_{loc}(\mathbb{R}_+; C_{LL}(\mathbb{R}^3))$. On suppose qu'il existe un réel $T > 0$ vérifiant*

$$\tilde{V}(T) \stackrel{\text{déf}}{=} \sup_{0 < \nu \leq 1} \int_0^T \|v_\nu(\tau)\|_{LL} d\tau \leq \frac{1}{C_0}.$$

Si $a_\nu(t, r, z)$ vérifie (TD_ν) , avec a^0 axisymétrique dans $L^2(\mathbb{R}^3)$ et dont le support est un compact axisymétrique de \mathbb{R}^3 , alors pour tout $t \in [0, T[$, pour tout $h \in [0, l]$ et pour tout ν vérifiant

$$\frac{\nu t}{l^2} \leq \left(\frac{h}{Cl}\right)^{\frac{C}{1-C_0\tilde{V}(T)}}, \quad (2)$$

on aura l'estimation

$$\|a_\nu(t)\|_{L^2((\Omega_{t,\nu})^c_h)} \leq C \|a^0\|_{L^2} \exp\left(-\frac{e}{4}\left(\frac{l^2}{\nu t}\right)^{\frac{1}{3}} \left(\frac{h}{el}\right)^{\exp \tilde{V}(T)}\right).$$

De plus, si Ω est un domaine borné axisymétrique de \mathbb{R}^3 . Alors en posant $a^0 = \mathbf{1}_\Omega$ et en se restreignant à des réels $t \in [0, T[$, $h \in [0, l]$ et ν satisfaisant (2), on aura l'estimation suivante

$$\|a_\nu(t) - \mathbf{1}_{\Omega_{t,\nu}}\|_{L^2((\Omega_{t,\nu})_h)} \leq C \|a^0\|_{L^2} \exp\left(-\frac{e}{4}\left(\frac{l^2}{\nu t}\right)^{\frac{1}{3}} \left(\frac{h}{el}\right)^{\exp \tilde{V}(T)}\right). \quad (3)$$

Afin d'avoir un résultat de décroissance global, nous avons modifié légèrement la méthode utilisée dans la preuve du théorème 2. Cependant le prix que nous avons payé est évidemment sur le taux de décroissance qui est polynomial en ν avec une puissance qui se dégrade en fonction du temps.

Théorème 3. *Il existe une constante $C > 0$, telle que on a les propriétés suivantes. Soit $(v_\nu)_\nu$ est une famille de champs de vecteurs axisymétriques, de divergence nulle et appartenant à $L^1_{loc}(\mathbb{R}_+; C_{LL}(\mathbb{R}^3))$. On suppose que pour tout $T > 0$, on a*

$$\tilde{V}(T) \stackrel{\text{déf}}{=} \sup_{0 < \nu \leq 1} \int_0^T \|v_\nu(\tau)\|_{LL} d\tau < +\infty.$$

Si $a_\nu(t, r, z)$ vérifie (TD_ν) , avec a^0 axisymétrique dans $L^2(\mathbb{R}^3)$ et dont le support est un compact axisymétrique de \mathbb{R}^3 , alors pour tout nombre réel $\alpha \in]0, \frac{1}{2}[$ et $h \in [0, l]$, si ν vérifie

$$\frac{\nu T}{l^2} \leq \min \left\{ \left(\frac{h}{Cl}\right)^{C \exp\left(\frac{\tilde{V}(T)}{1-2\alpha}\right)^2} \left(\frac{e^{1-\exp C\tilde{V}(T)}}{C\tilde{V}(T)}\right)^{\frac{4}{1+\alpha}} \right\}, \quad (4)$$

on aura pour tout $t \in [0, T]$

$$\|a_\nu(t)\|_{L^2((\Omega_{t,\nu})_h^c)} \leq C \left(\frac{\nu t}{l^2}\right)^{\frac{\alpha}{2}} \left(\frac{Cl}{h}\right)^{\exp\left(\frac{C\bar{V}(T)}{1-2\alpha}\right)^2} \|a^0\|_{L^2}.$$

De plus, considérons la donnée initiale $a^0 = \mathbf{1}_\Omega$, avec Ω un domaine borné axisymétrique. Alors pour tout h et ν vérifiant la condition (4) et pour tout $t \in [0, T]$, on aura l'estimation

$$\|a_\nu(t) - \mathbf{1}_{\Omega_{t,\nu}}\|_{L^2((\Omega_{t,\nu})_h)} \leq C \left(\frac{\nu t}{l^2}\right)^{\frac{\alpha}{2}} \left(\frac{4el}{h}\right)^{\exp C\left(\frac{\bar{V}(T)}{1-2\alpha}\right)^2} \|a^0\|_{L^2}.$$

Ce théorème permet de montrer un résultat global de limite non visqueuse dans le cadre des poches de tourbillon axisymétriques (i.e $\omega^0 = r\mathbf{1}_\Omega$.) Dans ce contexte, nous avons par le corollaire 1 une borne uniforme en la viscosité de $\|v_\nu(t)\|_{C_*^1}$, et en conséquence pour $V_\nu(t)$ (car on a l'injection $C_*^1 \hookrightarrow C_{LL}$)

Corollaire 2. Soit Ω un domaine borné axisymétrique tel que $\partial\Omega \cap \{0\} \times \mathbb{R}^2$ est une courbe simple rectifiable de longueur L . Désignons respectivement par ω_ν et ω les tourbillons de (NS_ν) et (E) correspondant à la même donnée initiale $\omega^0 = r\mathbf{1}_\Omega$. Alors, on a

$$\lim_{\nu \rightarrow 0} \|\omega_\nu(t)/r - \mathbf{1}_{\Omega_t}\|_{L^\infty(\mathbb{R}_+; L^2)} = 0.$$

Plus précisément, pour tout réel positif T et pour tout $h \in [0, l]$, il existe une fonction $f_0(T)$ strictement décroissante vers zéro et dépendant des quantités $\|v^0\|_{L^2}$, $\|\omega^0\|_{L^2 \cap L^\infty}$ et $\|\frac{\omega^0}{r}\|_{L^2 \cap L^\infty}$, telle que si $\frac{\nu T}{l^2} \leq f_0(T)$, alors

$$\|\omega_\nu(t)/r - \mathbf{1}_{\Omega_t}\|_{L^\infty([0, T]; L^2)} \leq C(L+l)\sqrt{l} \left(\frac{\nu T}{l^2}\right)^{C-1} \exp -C\left(\int_0^T |P(t)| dt\right)^2 \|\omega^0/r\|_{L^2 \cap L^\infty},$$

avec C une constante universelle et P le polynôme déjà introduit dans le corollaire 1.

Remarque : Le résultat de limite non visqueuse est en fait valable pour tout $p \in [2, +\infty[$. Pour ce faire, on interpole entre L^2 et L^∞ . Ensuite, on utilise la convergence L^2 du corollaire précédent à laquelle on associe l'estimation uniforme en ν de la quantité $\|\omega_\nu(t)/r\|_{L^\infty}$, fournie par le théorème 1.

2 Quelques outils de base

2.1 Autour de la théorie de Littlewood-Paley

Dans ce paragraphe, nous allons introduire les opérateurs de Littlewood-Paley et nous verrons à la fin une caractérisation dyadique des fonctions logarithmiquement lipschitziennes. Pour la preuve de la proposition ci-après, on peut consulter par exemple [3] :

Proposition 1. Il existe deux fonctions χ et ϕ radiales appartenant respectivement à $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ et à $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d \setminus \{0\})$ telles que :

$$\begin{aligned}\chi(\xi) + \sum_{q \geq 0} \phi(2^{-q}\xi) &= 1, \quad \frac{1}{3} \leq \chi^2(\xi) + \sum_{q \geq 0} \phi^2(2^{-q}\xi) \leq 1, \\ |p - q| \geq 2 &\Rightarrow \text{supp } \phi(2^{-p}\cdot) \cap \text{supp } \phi(2^{-q}\cdot) = \emptyset,\end{aligned}$$

$$q \geq 1 \Rightarrow \text{supp } \chi \cap \text{supp } \phi(2^{-q}) = \emptyset.$$

On note

$$\Delta_{-1}v = \mathcal{F}^{-1}(\chi(\xi)\widehat{v}(\xi)) ; \quad \Delta_q v = \mathcal{F}^{-1}(\phi(2^{-q}\xi)\widehat{v}(\xi)), \quad q \geq 1.$$

$$\forall q \leq -2, \quad \Delta_q v = 0 \quad \text{et} \quad S_q v = \sum_{p \leq q-1} \Delta_p v.$$

Définition 1. Fixons un réel $l \in [\frac{1}{2}, 1]$. Alors on désigne par C_{LL} (pour alléger les notations on omet l'indice l) l'espace des fonctions v bornées sur \mathbb{R}^d telles que :

$$\sup_{0 < |x-x'| \leq l} \frac{|v(x) - v(x')|}{|x - x'| (1 + \log \frac{l}{|x-x'|})} < \infty.$$

La norme naturelle associée à cet espace est

$$\|v\|_{LL} = \frac{\|v\|_{L^\infty}}{l} + \sup_{0 < |x-x'| \leq l} \frac{|v(x) - v(x')|}{|x - x'| (1 + \log \frac{l}{|x-x'|})}.$$

Dans le cadre de la décomposition de Littlewood-Paley inhomogène, les espaces de Hölder peuvent être définis comme suit :

Définition 2. Soit r un nombre réel. On note C^r l'ensemble des distributions tempérées v telles que

$$\|v\|_r = \sup_q 2^{qr} \|\Delta_q v\|_{L^\infty} < \infty.$$

Si r est un entier on note C_*^r au lieu de C^r .

Il s'agit maintenant de fournir la caractérisation des éléments de l'espace C_{LL} en terme d'estimations L^∞ de leurs troncatures en fréquence. Pour la preuve, voir par exemple [1].

Proposition 2. Il existe une constante $C > 0$ telle que pour toute fonction $v \in C_{LL}$ on ait :

$$C^{-1} \|v\|_{LL} \leq \frac{\|\Delta_{-1}v\|_{L^\infty}}{l} + \sup_q \frac{\|\nabla S_q v\|_{L^\infty}}{2+q} \leq C \|v\|_{LL} \quad \text{et} \quad \|\Delta_q v\|_{L^\infty} \leq Cl \|v\|_{LL} (2+q) 2^{-q}.$$

Le lemme que allone énoncer est très utile dans l'élaboration des résultats de décroissance. On désigne par S_λ l'opérateur de troncature en fréquence défini par

$$S_\lambda v = \sum_{p \leq [\log_2 \lambda l]} \Delta_p v. \tag{5}$$

La fonction $S_\lambda v$ est très régulière. Elle jouit en particulier des estimations suivantes, qui sont une conséquence de la proposition 2.

Lemme 1. *Il existe une constante $C_0 > 0$ telle que pour tout champ v dans C_{LL} et pour tout réel $\lambda \geq e$ on a :*

$$\begin{aligned}\|S_\lambda v - v\|_{L^\infty} &\leq C_0 \lambda^{-1} \log(\lambda) \|v\|_{LL}, \\ \|\nabla S_\lambda v\|_{L^\infty} &\leq C_0 \log(\lambda) \|v\|_{LL}, \\ \|S_\lambda v\|_{LL} &\leq C_0 \|v\|_{LL}.\end{aligned}$$

Nous envisageons maintenant de décrire quelques propriétés des fonctions axisymétriques, en discutant notamment quelques lois de compositions. D'abord, nous allons introduire les définitions suivantes :

Définition 3. • *Soit f une fonction de \mathbb{R}^3 dans \mathbb{R} et (r, θ, z) le système de coordonnées cylindriques. On dit que f est axisymétrique, si elle ne dépend pas de la variable θ .*

• *Soit Ω une partie de \mathbb{R}^3 . On dit que Ω est axisymétrique s'il est invariant par toute rotation d'axe (Oz) .*

Lemme 2. *Soient v un champ de vecteurs régulier et axisymétrique et f une fonction de \mathbb{R}^d dans \mathbb{R} axisymétrique. Alors on a les deux propriétés suivantes*

- 1) $S_\lambda v$ est axisymétrique.
- 2) Si g est un champ de vecteurs de \mathbb{R}^d axisymétrique, alors $f \circ g$ est axisymétrique.

2.2 Quelques propriétés du flot

L'objet de ce paragraphe est de décrire en premier lieu la régularité du flot à deux paramètres, dit flot généralisé. Nous présenterons également quelques aspects de la dynamique d'un ensemble transporté par le flot. Soient t et s deux réels positifs, nous définissons le flot $\psi_s(t, x)$ par l'équation intégrale suivante :

$$\psi_s(t, x) = x + \int_s^t v(\tau, \psi_s(\tau, x)) d\tau. \quad (6)$$

En d'autres termes, dans un écoulement fluide, $\psi_s(t, x)$ n'est autre que la position à l'instant t de la particule qui, à l'instant s , se trouve en x . Le théorème qu'on va énoncer répond à la question de l'existence et l'unicité d'un flot à un champ de vecteurs supposé uniquement log-lipschitzien. Il décrit la dégénérescence de sa régularité en fonction du temps. Pour la preuve en détail, voir par exemple [3].

Théorème 4. *Soit v un champ de vecteurs appartenant à l'espace $L^1_{loc}(\mathbb{R}_+; C_{LL})$. Alors*

1. *pour tout $s \geq 0$, il existe une unique fonction ψ_s de $\mathcal{C}(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d; \mathbb{R}^d)$ solution de :*

$$\psi_s(t, x) = x + \int_s^t v(\tau, \psi_s(\tau, x)) d\tau.$$

De plus pour tout $t \in \mathbb{R}_+$

$$\psi_s(t, \cdot) - Id \in C^{e^{-|\int_s^t \|v(\tau)\|_{LL} d\tau}}.$$

D'une façon précise on a :

$$|x - y| \leq le^{1-e^{V(t,s)}} \Rightarrow |\psi_s(t, x) - \psi_s(t, y)| \leq el \left(\frac{|x - y|}{el} \right)^{e^{-V(t,s)}},$$

$$\text{avec } V(t, s) = \left| \int_s^t \|v(\tau)\|_{LL} d\tau \right|.$$

2. Pour tout t et s positifs $\psi_s(t, \cdot)$ est un homéomorphisme de \mathbb{R}^d , d'inverse $\psi_t(s, \cdot)$. De plus, si v est de divergence nulle, alors $\psi_s(t)$ laisse invariante la mesure de Lebesgue.

Comme application immédiate de ce théorème, on a le résultat suivant :

Corollaire 3. Soit v un champ de vecteurs appartenant à l'espace $L_{loc}^1(\mathbb{R}_+; C_{LL})$. Alors pour tout $t \geq 0$, $\psi(t, \cdot)$ et $\psi^{-1}(t, \cdot)$ appartiennent à $Id + C^{e^{-V(t)}}$.

Le lemme suivant, dont on peut trouver une preuve dans [7], décrit la dynamique d'un ensemble donné à travers les flots mis en jeu. Avant de l'énoncer on va introduire une quantité qui interviendra souvent dans nos estimations. On pose pour tout réel positif λ et pour tout temps $t \geq 0$

$$\bar{\delta}(t, \lambda) = 2el \left(\frac{\log \lambda l}{\lambda l} \right)^{\exp -C_0 V(t)}.$$

Signalons que cette quantité est indexée par ν quand elle est associée à v_ν .

Lemme 3. Il existe une constante $C_0 > 1$ telle que pour tout champ de vecteurs $v \in L_{loc}^1(\mathbb{R}_+; C_{LL})$ et pour tout ensemble A de \mathbb{R}^d on a

1. $\psi(t, A)_h^c \subset \psi(t, A_{\bar{\delta}(t,h)}^c), \forall h \in [0, l]$.
2. $\psi(t, A_h^c) \subset (\psi(t, A))_{\bar{\delta}(t,h)}^c, \forall h \in [0, l]$.
3. Soient λ un réel vérifiant $\lambda l \geq e$ et $h \in [0, l]$. Alors pour tout temps positif t vérifiant

$$C_0 V(t) \frac{\log \lambda l}{\lambda l} < e^{1-\exp C_0 V(t)}, \text{ on a}$$

$$\psi_\lambda^{-1}(t) \circ \psi(t, A_h^c) \subset A_{h-\bar{\delta}(t,\lambda)}^c.$$

De plus, pour tout réel τ positif, on a

$$\psi_{\tau,\lambda}^{-1}(t) \circ \psi(t, A_h^c) \subset \psi(\tau, A)_{\bar{\delta}(\tau,h)-\bar{\delta}(t,\lambda)}^c,$$

avec $\psi_{\tau,\lambda}(t, \cdot)$ le flot généralisé associé à $S_\lambda v$ fixant l'espace à l'instant τ . Alors que le flot $\psi_\lambda(t)$ est défini par $\psi_\lambda(t) = \psi_{0,\lambda}(t, \cdot)$.

4. Soient λ un nombre réel vérifiant les hypothèses de la partie 3. et $h \in [0, l]$. Alors pour tous les réels positifs $0 \leq \tau \leq t$, on a

$$\psi_{\tau,\lambda} \left(t, (\psi(\tau, A))_h^c \right) \subset \left(\psi_\lambda(t, A) \right)_{\delta^{(2)}(t,h)-2\bar{\delta}(t,\lambda)}^c,$$

à condition que $2\bar{\delta}(t, \lambda) \leq \delta^{(2)}(t, h)$. On note par $\delta^{(2)}(t, h) = \delta(t, \delta(t, h))$.

3 Preuve des résultats énoncés

3.1 Démonstration du théorème 2

La preuve du théorème est fondée essentiellement sur les étapes suivantes :

- 1) Régularisation du champ de vecteurs v via l'opérateur de troncature en fréquences défini dans (5).
- 2) L'utilisation de troncatures exponentielles suivie d'une estimation d'énergie L^2 .
- 3) Un choix judicieux du paramètre de régularisation λ .

3.1.1 Décroissance en dehors de Ω_t

On commence par écrire le système (TD_ν) sous la forme suivante

$$(TD_\nu) \begin{cases} \partial_t a + S_\lambda v \cdot \nabla a - \nu(\partial_r^2 + \partial_z^2 + \frac{3\partial_r}{r})a = (S_\lambda v - v) \cdot \nabla a \\ a|_{t=0} = a^0. \end{cases}$$

Signalons qu'on a omis l'indice ν pour alléger les notations. On pose

$$f_\lambda(x) = \lambda \min \{l, \text{dist}(x, \Omega)\}.$$

Comme Ω est axisymétrique, alors f_λ est une fonction axisymétrique. Notons que cette fonction n'est pas régulière. Elle est juste lipschitzienne. Donc pour effectuer le calcul sans se soucier des éventuels problèmes de régularité, on doit régulariser par exemple via une approximation de l'identité (voir [7], section 3 pour plus de détails). dans un souci de concision, nous omettons cette régularisation mais on tient à signaler que les inégalités importantes sont stables par passage à la limite. La preuve suit de près celle de [2]. Considérons le propagé de f_λ le long des lignes du flot régularisé ψ_λ . Il est décrit par

$$\phi_\lambda(t, x) = f_\lambda(\psi_\lambda^{-1}(t, x)).$$

Nous faisons remarquer que la fonction ϕ_λ est axisymétrique, grâce au lemme 2. Introduisons la fonction $\Phi_\lambda(t, x) = \exp \phi_\lambda(t, x)$, qui est à son tour axisymétrique, et tronquons la solution a par cette fonction. Comme la fonction Φ_λ est constante le long des lignes de flot de ψ_λ , alors on a

$$(\partial_t + S_\lambda v \cdot \nabla)\Phi_\lambda = 0$$

Donc un calcul élémentaire montre que $a\Phi_\lambda$ satisfait l'équation suivante

$$\begin{aligned} (\partial_t + S_\lambda v \cdot \nabla - \nu(\partial_r^2 + \partial_z^2 + 3r^{-1}\partial_r))(a\Phi_\lambda) &= \Phi_\lambda(S_\lambda v - v) \cdot \nabla a - \nu a(\partial_r^2 + \partial_z^2 + 3r^{-1}\partial_r)\Phi_\lambda \\ &\quad - 2\nu \nabla a \cdot \nabla \Phi_\lambda. \end{aligned}$$

En faisant le produit scalaire L^2 avec $a\Phi_\lambda$ et en intégrant par parties tout en tenant compte du fait que v est de divergence nulle et que toutes les fonctions mises en jeu sont axisymétriques, alors on obtient l'inégalité différentielle

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|a\Phi_\lambda\|_{L^2}^2 + \nu \|\nabla(a\Phi_\lambda)\|_{L^2}^2 \leq (\|S_\lambda v - v\|_{L^\infty} \|\nabla \phi_\lambda\|_{L^\infty} + \nu \|\nabla \phi_\lambda\|_{L^\infty}^2) \|a\Phi_\lambda\|_{L^2}^2 - \nu \int \frac{a^2}{r} \partial_r(\Phi_\lambda^2) dx. \quad (7)$$

Nous signalons que nous avons utilisé le fait que si f est une fonction axisymétrique, alors son laplacien s'exprime en coordonnées cylindriques comme suit :

$$\Delta f = (\partial_r^2 + \partial_z^2 + \frac{1}{r}\partial_r)f.$$

D'un autre côté, en passant en coordonnées cylindriques et en faisant une intégration par parties dans la variable r , on trouve

$$\left| \int \frac{a^2}{r} \partial_r (\Phi_\lambda^2) dx \right| \leq 4 \|\partial_r \phi_\lambda\|_{L^\infty}^2 \|a\Phi_\lambda\|_{L^2}^2 + \|\partial_r (a\Phi_\lambda)\|_{L^2}^2. \quad (8)$$

En effet :

$$\left| \int \frac{a^2}{r} \partial_r (\Phi_\lambda^2) dx \right| \leq 2 \|\partial_r \phi_\lambda\|_{L^\infty} \int \frac{a^2 \Phi_\lambda^2}{r} dx. \quad (9)$$

On va montrer maintenant que

$$\int \frac{a^2 \Phi_\lambda^2}{r} dx \leq 2 \|a\Phi_\lambda(t)\|_{L^2} \|\partial_r (a\Phi_\lambda)(t)\|_{L^2}. \quad (10)$$

Pour ce faire, on écrit que

$$\begin{aligned} \int \frac{a^2 \Phi_\lambda^2}{r} dx &= 2\pi \int a^2 \Phi_\lambda^2 r dr dz \\ &\leq -4\pi \int a \Phi_\lambda \partial_r (a\Phi_\lambda) r dr dz. \end{aligned}$$

Pour conclure on recourt à l'inégalité de Cauchy-Schwartz. Ainsi, en reportant l'estimation (8) dans l'inégalité (7), on aboutit à

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|a\Phi_\lambda\|_{L^2}^2 \leq (\|S_\lambda v - v\|_{L^\infty} \|\nabla \phi_\lambda\|_{L^\infty} + 5\nu \|\nabla \phi_\lambda\|_{L^\infty}^2) \|a\Phi_\lambda\|_{L^2}^2. \quad (11)$$

D'un autre côté, en dérivant l'équation régissant le flot à deux paramètres donnée par (6), on montre par le lemme de Gronwall que

$$\|\nabla \psi_{\lambda,s}(t)\|_{L^\infty} \leq \exp \left| \int_s^t \|\nabla S_\lambda v(\tau)\|_{L^\infty} d\tau \right|.$$

Or $\psi_\lambda^{-1}(t) = \psi_{\lambda,t}(0)$, donc nous déduisons par le biais du lemme 1

$$\|\nabla \psi_\lambda^{-1}(t)\|_{L^\infty} \leq \exp \left(\int_0^t \|\nabla S_\lambda v(\tau)\|_{L^\infty} d\tau \right) \leq (\lambda l)^{C_0 V(t)}. \quad (12)$$

Ce qui implique

$$\begin{aligned} \|\nabla \phi_\lambda(t)\|_{L^\infty} &\leq \|\nabla f_\lambda\|_{L^\infty} \|\nabla \psi_\lambda^{-1}(t)\|_{L^\infty} \\ &\leq \lambda (\lambda l)^{C_0 V(t)}. \end{aligned} \quad (13)$$

Or,

$$C_0 \log(\lambda l) \int_0^t (\lambda l)^{C_0 V(\tau)} \|v(\tau)\|_{LL} d\tau = (\lambda l)^{C_0 V(t)} - 1. \quad (14)$$

Donc en injectant (13) dans (11) et en se servant des lemmes de Gronwall et 1, on obtient

$$\|a\Phi_\lambda(t)\|_{L^2} \leq \|a^0\|_{L^2} \exp C \left((\lambda l)^{C_0 V(t)} + \frac{\nu t}{l^2} (\lambda l)^{2+2C_0 V(t)} \right) \quad (15)$$

Intéressons-nous maintenant à la minoration de la quantité $\|a\Phi_\lambda(t)\|_{L^2((\Omega_t)_h^c)}$.

L'utilisation de la partie 3. du lemme 3, permet d'avoir, sous les mêmes conditions sur t, λ et h , que pour tout $x \in \psi(t, (\Omega)_{\delta(t,h)}^c)$,

$$\Phi_\lambda(t, x) \geq e^{\lambda(\delta(t,h) - \bar{\delta}(t,\lambda))}. \quad (16)$$

Par conséquent, en combinant (16) avec (15) et en se servant de l'inclusion $(\Omega_t)_h^c \subset \psi(t, (\Omega)_{\delta(t,h)}^c)$, on trouve

$$\|a(t)\|_{L^2((\Omega_t)_h^c)} \leq \|a^0\|_{L^2} \exp \left(C \lambda l \left((\lambda l)^{C_0 V(t)-1} + \frac{\nu t}{l^2} (\lambda l)^{1+2C_0 V(t)} + \frac{\bar{\delta}(t,\lambda) - \delta(t,h)}{Cl} \right) \right). \quad (17)$$

À ce stade de la preuve, il s'avère que la condition $C_0 V(t) < 1$ est indispensable pour assurer localement la décroissance exponentielle. Plaçons-nous sous une telle hypothèse et choisissons λ comme suit

$$\lambda l = \left(\frac{l}{\nu t} \right)^{\frac{1}{2+C_0 V(t)}}.$$

Alors l'estimation (17) devient

$$\|a(t)\|_{L^2((\Omega_t)_h^c)} \leq C \|a^0\|_{L^2} \exp \left(\left(\left(\frac{l^2}{\nu t} \right)^{\frac{1}{2+C_0 V(t)}} \left(C \left(\frac{\nu t}{l^2} \right)^{\frac{1-C_0 V(t)}{2+C_0 V(t)}} + \frac{\bar{\delta}(t,\lambda) - \delta(t,h)}{l} \right) \right) \right). \quad (18)$$

Si l'on impose successivement les conditions suivantes

$$\bar{\delta}(t,\lambda) \leq \frac{1}{2} \delta(t,h) \quad \text{et} \quad \left(\frac{\nu t}{l^2} \right)^{\frac{1-C_0 V(t)}{3}} \leq \frac{\delta(t,h)}{4Cl}. \quad (19)$$

Alors on aura

$$\|a(t)\|_{L^2((\Omega_t)_h^c)} \leq C \|a^0\|_{L^2} \exp \left(- \left(\frac{l^2}{\nu t} \right)^{\frac{1}{2+C_0 V(t)}} \frac{\delta(t,h)}{4l} \right). \quad (20)$$

Il ne reste que remplacer $\delta(t,h)$ par son expression pour déduire l'estimation figurant dans le théorème 2. Occupons-nous dans cette phase ultime de la preuve des conditions que doivent satisfaire les paramètres ν, λ et h . Elles sont données par

$$C_0 V(t) \frac{\log \lambda l}{\lambda l} \leq e^{1-\exp C_0 V(t)}, \quad \lambda l = \left(\frac{l^2}{\nu t} \right)^{\frac{1}{2+C_0 V(t)}} \geq e \quad \text{et} \quad (19). \quad (21)$$

Signalons que la première condition est dictée par la partie 3. du lemme 3. Sachant que pour tout x positif, on a

$$\log x \leq \sqrt{x}.$$

Alors la première condition mentionnée dans (21) est satisfaite du moment que

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda l}} \leq \frac{e^{1-\exp C_0 V(t)}}{C_0 V(t)}.$$

En remplaçant dans cette inégalité λl par son expression, on trouve que

$$0 \leq \frac{\nu t}{l^2} \leq \left(\frac{e^{1-e^{C_0 V(t)}}}{C_0 V(t)} \right)^{4+2C_0 V(t)}.$$

Or $C_0 V(t) \leq 1$. Donc en prenant l'infimum de la quantité de droite, on voit qu'il suffit de prendre ν tel que

$$0 \leq \frac{\nu t}{l^2} \leq e^{-6e} \quad \text{et} \quad t \in [0, T_\nu]. \quad (22)$$

D'un autre côté, la première condition figurant dans (19) est réalisée si l'on impose

$$\frac{\nu t}{l^2} \leq \left(\frac{\delta(t, h)}{4el} \right)^{6e}.$$

Cette contrainte est moins forte que celle déduite à partir de la seconde condition mentionnée dans (19). Celle dont il s'agit est décrite par

$$\frac{\nu t}{l^2} \leq \left(\frac{\delta(t, h)}{Cl} \right)^{\frac{C}{1-C_0 V(t)}}. \quad (23)$$

Enfin quitte à prendre C suffisamment grande, la condition (22) devient alors une conséquence immédiate de (23). Ceci permet de retrouver la condition (2) mentionnée dans le théorème 2 et d'achever ainsi la preuve de la première partie.

3.1.2 Décroissance à l'intérieur de Ω_t

La preuve de la décroissance à l'intérieur de l'ensemble Ω_t ressemble beaucoup à celle utilisée dans la première partie. Nous faisons en plus appel à une seconde troncature dont le support est contenu dans Ω_t , ce qui sera une source de nouveaux termes qui vont manifester un comportement analogue à certains termes déjà présents. Nous allons débiter par la remarque suivante qui dit que la fonction $\mathbf{1}_{\Omega_{t,\lambda}} := \mathbf{1}_{\psi_\lambda(t,\Omega)}$ est solution de l'équation de transport

$$\begin{cases} \partial_t u + S_\lambda v \cdot \nabla u = 0 \\ u|_{t=0} = \mathbf{1}_\Omega. \end{cases}$$

On introduit les fonctions suivantes

$$\Psi(t, x) = a(t, x) - \mathbf{1}_{\Omega_t} \quad \text{et} \quad \Psi_\lambda(t, x) = a(t, x) - \mathbf{1}_{\Omega_{t,\lambda}}.$$

Remarquons d'abord que nous avons par l'inégalité d'énergie

$$\|\Psi_\lambda(t)\|_{L^2}^2 \leq 2\|a^0\|_{L^2}^2. \quad (24)$$

Posons

$$f_\lambda(x) = \lambda \min\{l, \text{dist}(x, \Omega^c)\}.$$

Soit χ une fonction axisymétrique appartenant à $\mathcal{D}(\Omega)$, telle que

$$\chi \equiv 1 \quad \text{sur} \quad (\Omega^c)_{2h_0} \quad \text{et} \quad \|\nabla\chi\|_{L^\infty} \leq Ch_0^{-1}.$$

où h_0 est un réel positif qui satisfait les conditions suivantes :

$$h_0 \leq \frac{1}{4}(\delta(t, h) - \bar{\delta}(t, \lambda)) \quad \text{et} \quad \frac{1}{\lambda} \leq Ch_0. \quad (25)$$

Nous verrons le long de la preuve les raisons qui sont à l'origine de ce choix. Définissons par

$$\Phi_\lambda(t, x) = \chi_\lambda^2(t, x)e^{\phi_\lambda(t, x)} \quad \text{avec} \quad \chi_\lambda(t, x) = \chi(\psi_\lambda^{-1}(t, x)) \quad \text{et} \quad \phi_\lambda(t, x) = f_\lambda(\psi_\lambda^{-1}(t, x)).$$

Comme le support de $\Phi_\lambda(t)$ est inclus dans l'intérieur de $\Omega_{t, \lambda}$, alors on peut écrire que

$$\Phi_\lambda \Delta \Psi_\lambda = \Phi_\lambda \Delta a \quad \text{et} \quad \Phi_\lambda \nabla \Psi_\lambda = \Phi_\lambda \nabla a.$$

Or la fonction Φ_λ est conservée le long des lignes de flot ψ_λ . Donc elle vérifie l'équation de transport

$$\partial_t \Phi_\lambda + S_\lambda v \cdot \nabla \Phi_\lambda = 0.$$

Il s'ensuit que l'équation en $\Phi_\lambda \Psi_\lambda$ est donnée par

$$(\partial_t + S_\lambda v \cdot \nabla - \nu(\Delta + 2r^{-1}\partial_r))(\Phi_\lambda \Psi_\lambda) = \Phi_\lambda (S_\lambda v - v) \cdot \nabla \Psi_\lambda - \nu \Psi_\lambda (\Delta + 2r^{-1}\partial_r) \Phi_\lambda - 2\nu \nabla \Psi_\lambda \cdot \nabla \Phi_\lambda.$$

En faisant le produit scalaire de cette équation avec $\Phi_\lambda \Psi_\lambda$ et en intégrant par parties, on parvient à l'estimation

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\Psi_\lambda \Phi_\lambda(t)\|_{L^2}^2 + \nu \|\nabla(\Psi_\lambda \Phi_\lambda)(t)\|_{L^2}^2 \leq I_1(t) + \nu(I_2(t) + I_3(t)), \quad (26)$$

avec

$$\begin{aligned} I_1(t) &= \int \Phi_\lambda^2 \Psi_\lambda (S_\lambda v - v) \cdot \nabla \Psi_\lambda dx, \\ I_2(t) &= \int |\Psi_\lambda(t)|^2 |\nabla \Phi_\lambda(t)|^2 dx, \\ I_3(t) &= - \int \Psi_\lambda^2 \partial_r (\Phi_\lambda^2) \frac{dx}{r}. \end{aligned}$$

Estimation de $I_1(t)$

Suite à une intégration par parties, on trouve

$$|I_1(t)| \leq \left| \int (S_\lambda v - v) \cdot \nabla \Phi_\lambda \Psi_\lambda^2 \Phi_\lambda dx \right|. \quad (27)$$

Or un calcul simple permet d'avoir l'identité

$$\nabla \Phi_\lambda(t) = \Phi_\lambda(t) \nabla \phi_\lambda(t) + 2\chi_\lambda(t) e^{\phi_\lambda(t)} \nabla \chi_\lambda(t). \quad (28)$$

Ainsi l'insertion de (28) dans (27) donne

$$|I_1(t)| \leq \|S_\lambda v(t) - v(t)\|_{L^\infty} \left(\|\nabla \phi_\lambda(t)\|_{L^\infty} \|\Phi_\lambda \Psi_\lambda(t)\|_{L^2}^2 + 2 \int \Psi_\lambda^2(t) \chi_\lambda^3(t) |\nabla \chi_\lambda(t)| e^{2\phi_\lambda(t)} dx \right). \quad (29)$$

Pour évaluer l'intégrale figurant au second membre du (29), on utilise le changement de variable $x \rightarrow \psi_\lambda(t, x)$, qui préserve la mesure et on tient compte du fait que $\nabla \chi$ est nul à une distance de $\partial\Omega$ supérieure à $2h_0$. Ce qui permet, grâce à (24), d'avoir la majoration

$$\int \Psi_\lambda^2(t) \chi_\lambda^3(t) |\nabla \chi_\lambda(t)| e^{2\phi_\lambda(t)} dx \leq C h_0^{-1} (\lambda)^{C_0 V(t)} e^{4\lambda h_0} \|a^0\|_{L^2}^2. \quad (30)$$

Enfin l'utilisation du lemme 1 ainsi que les inégalités (13), (25) et (30), nous assure que

$$|I_1(t)| \leq C (\lambda)^{C_0 V(t)} \log(\lambda) \|v(t)\|_{LL} \left(\|\Psi_\lambda \Phi_\lambda(t)\|_{L^2}^2 + e^{4\lambda h_0} \|a^0\|_{L^2}^2 \right). \quad (31)$$

Estimation de I_2

L'insertion de l'identité (28) au sein de l'expression de I_2 permet d'obtenir, suite à des simples majorations,

$$I_2(t) \leq 2 \|\nabla \phi_\lambda(t)\|_{L^\infty}^2 \|\Psi_\lambda \Phi_\lambda(t)\|_{L^2}^2 + 8 \|\Psi_\lambda(t) \chi_\lambda(t) e^{\phi_\lambda(t)} \nabla \chi_\lambda(t)\|_{L^2}^2. \quad (32)$$

Or, on montre de façon similaire à (30), que

$$\|\Psi_\lambda(t) \chi_\lambda(t) e^{\phi_\lambda(t)} \nabla \chi_\lambda(t)\|_{L^2} \leq C \lambda (\lambda)^{C_0 V(t)} e^{2\lambda h_0} \|a^0\|_{L^2}. \quad (33)$$

Il découle alors des relations (32) et (33) que

$$I_2(t) \leq 2\lambda^2 (\lambda)^{2C_0 V(t)} \left(\|\Psi_\lambda \Phi_\lambda(t)\|_{L^2}^2 + C e^{4\lambda h_0} \|a^0\|_{L^2}^2 \right). \quad (34)$$

Estimation de I_3

En reportant (28) dans I_3 , on parvient à établir

$$\begin{aligned} I_3(t) &= -2 \int (\Psi_\lambda \Phi_\lambda)^2 \partial_r \phi_\lambda \frac{dx}{r} - 4 \int \Psi_\lambda^2 \chi_\lambda^3 \partial_r \chi_\lambda e^{2\phi_\lambda} \frac{dx}{r} \\ &= -J_1(t) - J_2(t). \end{aligned} \quad (35)$$

Pour le contrôle de J_1 , une inégalité semblable à (10) donne

$$\begin{aligned} J_1(t) &\leq 2 \|\partial_r \phi_\lambda(t)\|_{L^\infty} \int \Psi_\lambda^2 \Phi_\lambda^2(t) \frac{dx}{r} \\ &\leq 4 \|\partial_r \phi_\lambda(t)\|_{L^\infty} \|\Psi_\lambda \Phi_\lambda(t)\|_{L^2} \|\partial_r (\Psi_\lambda \Phi_\lambda)(t)\|_{L^2} \\ &\leq 8 \|\partial_r \phi_\lambda(t)\|_{L^\infty}^2 \|\Psi_\lambda \Phi_\lambda(t)\|_{L^2}^2 + \|\partial_r (\Psi_\lambda \Phi_\lambda)(t)\|_{L^2}^2. \end{aligned}$$

Ainsi on en déduit, grâce à (12), que

$$J_1(t) \leq 8\lambda^2 (\lambda)^{2C_0 V(t)} \|\Psi_\lambda \Phi_\lambda(t)\|_{L^2}^2 + \|\partial_r (\Psi_\lambda \Phi_\lambda)(t)\|_{L^2}^2. \quad (36)$$

D'autre part, en imitant (10), on aboutit à

$$\begin{aligned} J_2(t) &\leq 8\|(\chi_\lambda \partial_r \chi_\lambda)(t)e^{2\phi_\lambda(t)}\|_{L^\infty} \|(\chi_\lambda \Psi_\lambda)(t)\|_{L^2} \|\partial_r(\chi_\lambda \Psi_\lambda)(t)\|_{L^2} \\ &\leq 8\|(\chi_\lambda \partial_r \chi_\lambda)(t)e^{2\phi_\lambda(t)}\|_{L^\infty} \|(\chi_\lambda \Psi_\lambda)(t)\|_{L^2} \left(\|(\chi_\lambda \partial_r \Psi_\lambda)(t)\|_{L^2} + \|(\partial_r \chi_\lambda \Psi_\lambda)(t)\|_{L^2} \right). \end{aligned}$$

Comme $\chi_\lambda(t)\partial_r\Psi_\lambda(t) = \chi_\lambda(t)\partial_r a(t)$, alors on tire de l'estimation ci-dessus que

$$\nu J_2(t) \leq C e^{4\lambda h_0} \nu \lambda^2 (\lambda l)^{2C_0 V(t)} \|a^0\|_{L^2}^2 + \nu e^{4\lambda h_0} \|\partial_r a(t)\|_{L^2}^2. \quad (37)$$

Finalement, en combinant (26), (31), (34), (35), (36) et (37), on aboutit à

$$\frac{d}{dt} \|\Psi_\lambda \Phi_\lambda(t)\|_{L^2}^2 \leq \alpha_{\lambda, \nu}(t) \|\Psi_\lambda \Phi_\lambda(t)\|_{L^2}^2 + \beta_{\lambda, \nu}(t), \quad (38)$$

avec

$$\alpha_{\lambda, \nu}(t) = C \left(\log(\lambda l) (\lambda l)^{C_0 V(t)} \|v(t)\|_{LL} + \nu \lambda^2 (\lambda l)^{2C_0 V(t)} \right)$$

et

$$\beta_{\lambda, \nu}(t) = C e^{4\lambda h_0} (\alpha_{\lambda, \nu}(t) \|a^0\|_{L^2}^2 + \nu \|\partial_r a(t)\|_{L^2}^2).$$

À ce stade, nous allons intégrer en temps l'inégalité différentielle (38) à laquelle on associe le fait que $\nu \int_0^t \|\partial_r a(t)\|_{L^2}^2 dt \leq \|a^0\|_{L^2}^2$. Nous obtenons, suite à une application du lemme de Gronwall et de (14),

$$\|\Psi_\lambda \Phi_\lambda(t)\|_{L^2}^2 \leq C \exp \left(C (\lambda l)^{C_0 V(t)} + \nu t l^{-2} (\lambda l)^{2+2C_0 V(t)} + 4\lambda h_0 \right) \|a^0\|_{L^2}^2. \quad (39)$$

D'un autre côté, sous les mêmes conditions de la partie 3. du lemme 3, on a

$$(\Omega_t^c)_h \subset \psi(t, (\Omega^c)_{\delta(t, h)}) \quad \text{et} \quad \psi_\lambda^{-1}(t) \circ \psi(t, (\Omega^c)_{\delta(t, h)}) \subset (\Omega^c)_{\delta(t, h) - \bar{\delta}(t, \lambda)}.$$

Ce qui implique, via la condition (25), que $\chi_\lambda(t) \equiv 1$ sur $(\Omega_t^c)_h$. Ainsi, cette observation combinée avec les deux inclusions ci-dessus permettent de déduire

$$\Phi_\lambda(t, x) \geq e^{\lambda(\delta(t, h) - \bar{\delta}(t, \lambda))}, \quad \forall x \in (\Omega_t^c)_h. \quad (40)$$

Donc, l'estimation (39) donne en vertu de la condition (25)

$$\|\Psi_\lambda(t)\|_{L^2((\Omega_t^c)_h)} \leq C \exp \left(C (\lambda l)^{C_0 V(t)} + \nu t l^{-2} (\lambda l)^{2+2C_0 V(t)} - \frac{\lambda}{2} (\delta(t, h) - \bar{\delta}(t, \lambda)) \right) \|a^0\|_{L^2}.$$

On choisit λ tel que $\lambda l = \left(\frac{l^2}{\nu t}\right)^{\frac{1}{2+C_0 V(t)}}$ et on opère d'une manière identique à [7], on trouve sous la condition (23) que

$$\|a(t) - \mathbf{1}_{\Omega_{t, \lambda}}\|_{L^2((\Omega_t^c)_h)} \leq C \exp \left(- \left(\frac{l^2}{\nu t}\right)^{\frac{1}{2+C_0 V(t)}} \frac{\delta(t, h)}{4l} \right) \|a^0\|_{L^2}. \quad (41)$$

Nous voudrions dans ce qui suit remplacer dans (41) $\mathbf{1}_{\Omega_{t, \lambda}}$ par $\mathbf{1}_{\Omega_t}$. Pour un tel objectif, nous allons établir tout d'abord la convergence uniforme du flot régularisé ψ_λ vers ψ . Notre principal outil est le lemme d'Osgood. Posons

$$\rho_\lambda(t, x) = |\psi(t, x) - \psi_\lambda(t, x)|.$$

Alors en se servant de la formulation intégrale des flots et en utilisant successivement l'inégalité triangulaire et le lemme 1, on parvient à établir l'inégalité fonctionnelle suivante

$$\rho_\lambda(t, x) \leq C_0 V(t) \frac{\log \lambda l}{\lambda} + \int_0^t |v(s, \psi(s, x)) - v(s, \psi_\lambda(s, x))| ds. \quad (42)$$

Si le champ de vecteurs v est lipschitzien, alors on peut conclure sur le résultat simplement à l'aide du lemme de Gronwall. Malheureusement ceci n'est pas le cas. Notre champ est uniquement log-lipschitzien. Pourtant, vu que le premier terme figurant dans le membre de droite de l'inégalité (42) est petit pour λ assez grand, on peut alors appliquer le lemme d'Osgood. Plus précisément, on établit que pour tout temps $t \geq 0$ et pour tout réel $\lambda \geq \frac{\varepsilon}{l}$, tels que

$$C_0 V(t) \frac{\log \lambda l}{\lambda l} < e^{1-e^{V(t)}},$$

alors on a

$$\|\rho_\lambda(t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)} \leq 2el \left(\frac{\log \lambda l}{\lambda l} \right)^{\exp -C_0 V(t)} := \bar{\delta}(t, \lambda). \quad (43)$$

D'autre part, on montre aisément que pour tout λ tel que

$$\|\psi_\lambda(t) - \psi(t)\|_{L^\infty} \leq h,$$

alors on a

$$(\Omega_t^c)_h \subset \Omega_{t, \lambda}.$$

Ceci achève la preuve du théorème 2

3.2 Démonstration du théorème 3

3.2.1 Décroissance à l'extérieur de $\Omega_{t, \nu}$.

Soient T un réel positif et α un nombre appartenant à l'intervalle $]0, \frac{1}{2}[$. Considérons une partition $(T_i)_{i=0}^N$ de $[0, T]$ telle que

$$T_0 = 0 < T_1 < \dots < T_N = T \quad \text{et} \quad V(T_i, T_{i+1}) \simeq \frac{1-2\alpha}{C_0}, \quad i \in \llbracket 0, N-1 \rrbracket. \quad (44)$$

La constante C_0 est celle qu'on retrouve dans le lemme 1.

Notations : Pour tout entier $i > 0$, on note

$$\delta_t^{(i)}(h) = \underbrace{\delta(t) \circ \dots \circ \delta(t)}_{i \text{ fois}}(h), \quad \Omega_i = \psi(T_i, \Omega) \quad \text{et} \quad \Omega_{i, h} = ((\Omega_i)_h^c)^c = \{x \in \mathbb{R}^3, \text{dist}(x, \Omega_i) \leq h\}.$$

On désigne par $\psi_{i, \lambda}$ le flot associé au champ de vecteurs $S_\lambda v$, fixant l'espace à l'instant T_i . Introduisons maintenant les fonctions de troncatures suivantes

$$f_i(x) = \frac{1}{l} \min \left\{ l, \text{dist} \left(x, \Omega_i : \frac{1}{2} \delta_T^{(2)}(h) \right) \right\} \quad \text{et} \quad \phi_{i, \lambda}(t, x) = f_i(\psi_{i, \lambda}^{-1}(t, x)).$$

Nous allons manipuler toutes les fonctions comme si elles étaient suffisamment régulières (en toute rigueur, il conviendrait de régulariser par une approximation de l'identité par exemple.)

Fixons un entier i dans $\llbracket 0, N \rrbracket$ et prenons un réel t dans l'intervalle $[T_i, T_{i+1}]$. Alors, on établit que

$$\|\phi_{i,\lambda}(t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^3)} \leq 1 \quad \text{et} \quad \|\nabla\phi_{i,\lambda}(t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^3)} \leq \frac{1}{l}(\lambda l)^{C_0 V(T_i,t)}. \quad (45)$$

En faisant le calcul, on constate que $a\phi_{i,\lambda}$ vérifie

$$\begin{aligned} \partial_t(a\phi_{i,\lambda}) + S_\lambda v \cdot \nabla(a\phi_{i,\lambda}) - \nu(\Delta + \frac{2}{r}\partial_r)(a\phi_{i,\lambda}) &= \phi_{i,\lambda}(S_\lambda v - v) \cdot \nabla a - \nu a(\Delta + \frac{2}{r}\partial_r)\phi_{i,\lambda} \\ &\quad - 2\nu \nabla a \cdot \nabla\phi_{i,\lambda}. \end{aligned}$$

En prenant le produit scalaire L^2 de cette équation avec $a\phi_{i,\lambda}$, accompagné de quelques intégrations par parties et en tenant compte du fait que $\|a(t)\|_{L^2} \leq \|a^0\|_{L^2}$, on obtient

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|a\phi_{i,\lambda}(t)\|_{L^2}^2 &\leq \left(\|(S_\lambda v - v)(t)\|_{L^\infty} \|\phi_{i,\lambda}(t)\|_{L^\infty} \|\nabla\phi_{i,\lambda}(t)\|_{L^\infty} + \nu \|\nabla\phi_{i,\lambda}(t)\|_{L^\infty}^2 \right) \|a^0\|_{L^2}^2 \\ &\quad + \nu \left| \int a^2 \partial_r(\phi_{i,\lambda}^2) \frac{dx}{r} \right|. \end{aligned}$$

Ainsi en utilisant le lemme 1 et les inégalités (45), on trouve

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|a\phi_{i,\lambda}(t)\|_{L^2}^2 &\leq \left(C_0 \|v(t)\|_{LL} (\lambda l)^{C_0 V(T_i,t)-1} \log(\lambda l) + \frac{\nu}{l^2} (\lambda l)^{2C_0 V(T_i,t)} \right) \|a^0\|_{L^2}^2 \\ &\quad + \nu \left| \int a^2 \partial_r(\phi_{i,\lambda}^2) \frac{dx}{r} \right|. \end{aligned} \quad (46)$$

Or un calcul similaire à (10) permet d'avoir grâce à (45)

$$\begin{aligned} \left| \int a^2 \partial_r(\phi_{i,\lambda}^2) \frac{dx}{r} \right| &\leq 2 \|\phi_{i,\lambda}(t)\|_{L^\infty} \|\nabla\phi_{i,\lambda}(t)\|_{L^\infty} \int a^2(t) \frac{dx}{r} \\ &\leq \frac{4}{l} (\lambda l)^{C_0 V(T_i,t)} \|a^0\|_{L^2} \|\partial_r a(t)\|_{L^2}. \end{aligned} \quad (47)$$

A ce stade, on injecte (47) dans (46), ensuite on intègre en temps et l'on obtient, suite à une utilisation de l'inégalité $\nu \int_0^t \|\partial_r a(t)\|_{L^2}^2 dt \leq \|a^0\|_{L^2}^2$ et d'une inégalité semblable à (14), que pour tout $t \in [T_i, T_{i+1}]$:

$$\|a\phi_{i,\lambda}(t)\|_{L^2}^2 \leq \|a\phi_{i,\lambda}(T_i)\|_{L^2}^2 + 2\|a_0\|_{L^2}^2 \left((\lambda l)^{C_0 V(T_i,t)-1} + 4 \frac{\sqrt{\nu t}}{l} (\lambda l)^{C_0 V(T_i,t)} + \frac{\nu t}{l^2} (\lambda l)^{2C_0 V(T_i,t)} \right). \quad (48)$$

En utilisant la croissance de $V(T_i, t)$ par rapport à t et en se servant de la condition (44), on constate que (48) se réduit à

$$\|a\phi_{i,\lambda}(t)\|_{L^2}^2 \leq \|a\phi_{i,\lambda}(T_i)\|_{L^2}^2 + 2\|a_0\|_{L^2}^2 \left((\lambda l)^{-2\alpha} + 4 \frac{\sqrt{\nu t}}{l} (\lambda l)^{1-2\alpha} + \frac{\nu t}{l^2} (\lambda l)^{2(1-2\alpha)} \right) \quad (49)$$

Maintenant on choisit λ tel que

$$\lambda l = \frac{1}{\sqrt{\nu t}}. \quad (50)$$

Ainsi en reportant (50) dans (49) et en se restreignant à des ν et t tels que

$$0 \leq \frac{\nu t}{l^2} \leq 1,$$

on trouve

$$\|a\phi_{i,\lambda}(t)\|_{L^2}^2 \leq \|a\phi_{i,\lambda}(T_i)\|_{L^2}^2 + 12\|a_0\|_{L^2}^2 \left(\frac{\nu T}{l^2}\right)^\alpha. \quad (51)$$

Posons $\beta(T, h) = \frac{\delta_T^{(2)}(h)}{4}$. Alors on observe que le support de $\phi_{i,\lambda}(T_i) = f_i$ est inclus dans l'ensemble $(\Omega_i)_{\beta(T,h)}^c$. Par suite on obtient grâce à (45) que

$$\|a\phi_{i,\lambda}(T_i)\|_{L^2} \leq \|a(T_i)\|_{L^2((\Omega_i)_{\beta(T,h)}^c)}. \quad (52)$$

Or on sait d'après la partie 3. du lemme 3 que si

$$\bar{\delta}(T, \lambda) \leq \beta(T, h) \quad \text{et} \quad C_0 V(T)(\lambda)^{-1} \log \lambda \leq e^{1-\exp C_0 V(T)},$$

alors, pour tout temps t dans $[T_i, T_{i+1}]$, on a

$$\psi_{i,\lambda}^{-1}(t) \circ \psi\left(t, (\Omega)_{\delta(t,h)}^c\right) \subset \left(\psi(T_i, \Omega)\right)_{\delta_t^{(2)}(h) - \bar{\delta}(t,\lambda)}^c \subset \left(\Omega_{i:\delta_T^{(2)}(h)/2}\right)_{\beta(T,h)}^c, \quad (53)$$

Il découle de (53) que pour tout $t \in [T_i, T_{i+1}]$ et pour tout $x \in \psi\left(t, (\Omega)_{\delta(t,h)}^c\right)$, on a

$$\beta(T, h) \leq |\phi_{i,\lambda}(t, x)|.$$

Il s'ensuit que

$$\beta(T, h) \|a(t)\|_{L^2(\psi(t, (\Omega)_{\delta(t,h)}^c))} \leq \|a\phi_{i,\lambda}(t)\|_{L^2(\psi(t, (\Omega)_{\delta(t,h)}^c))}. \quad (54)$$

Ainsi en combinant les résultats (51), (52) et (54) et en utilisant la partie 1. du lemme 1, on établit que pour tout $t \in [T_i, T_{i+1}]$, on a

$$\|a(t)\|_{L^2((\Omega_t)_h^c)} \leq \frac{l}{\beta(T, h)} \left(\|a(T_i)\|_{L^2((\Omega_i)_{\beta(T,h)}^c)} + 4 \left(\frac{\nu T}{l^2}\right)^{\frac{\alpha}{2}} \|a_0\|_{L^2} \right), \quad (55)$$

sous réserve que

$$\bar{\delta}(T, \lambda) \leq \beta(T, h) \quad \text{et} \quad \frac{\nu T}{l^2} \leq \left(\frac{e^{1-\exp C_0 V(T)}}{C_0 V(T)} \right)^{\frac{4}{1+\alpha}}. \quad (56)$$

On pose pour tout entier i dans $\llbracket 0, N-1 \rrbracket$

$$a_i(h) = \|a(T_i)\|_{L^2((\Omega_i)_h^c)}.$$

Alors l'inégalité (55) donne pour tout h satisfaisant $\bar{\delta}(T, \lambda) \leq \beta(T, h)$ et pour tout $i \in \llbracket 0, N-1 \rrbracket$,

$$a_{i+1}(h) \leq \frac{l}{\beta(T, h)} \left(a_i(\beta(T, h)) + 4 \left(\frac{\nu T}{l^2}\right)^{\frac{\alpha}{2}} \|a_0\|_{L^2} \right).$$

Comme $a_0(\bar{h}) = 0$, pour tout $\bar{h} > 0$, alors en notant $\beta^{(j)}(T, h) = \beta \circ \dots \circ \beta(T, h)$, j fois, on peut démontrer par un argument de récurrence que, pour tout $n \in \llbracket 1, N \rrbracket$ et pour tout réel positif h vérifiant

$$\bar{\delta}(T, \lambda) \leq \beta^{(n)}(T, h), \quad (57)$$

on a

$$a_n(h) \leq 4 \left(\frac{\nu T}{l^2} \right)^{\frac{\alpha}{2}} \|a_0\|_{L^2} \sum_{k=1}^n \prod_{j=1}^k \frac{l}{\beta^{(j)}(T, h)}. \quad (58)$$

En faisant un calcul élémentaire, utilisant en particulier l'identité suivante :

$$\beta^{(j)}(T, h) = \left(\frac{1}{4} \right)^{\sum_{m=0}^{j-1} \exp 2mV(T)} \operatorname{el} \left(\frac{h}{el} \right)^{\exp 2jV(T)},$$

on trouve

$$\sum_{k=1}^n \prod_{j=1}^k \frac{l}{\beta^{(j)}(T, h)} \leq \left(\frac{4el}{h} \right)^{n^2 e^{2nV(T)}}.$$

Par conséquent, en reportant cette inégalité dans (58), on déduit que pour tout $t \in [0, T]$, on a

$$\|a(t)\|_{L^2((F_t)_h^c)} \leq 4 \left(\frac{\nu T}{l^2} \right)^{\frac{\alpha}{2}} \left(\frac{4el}{h} \right)^{N^2 e^{2NV(T)}} \|a_0\|_{L^2}, \quad (59)$$

Or, en sommant sur i les égalités (44), on trouve que $N \simeq \frac{C_0 V(T)}{1-2\alpha}$. Donc en remplaçant dans (59) N par sa valeur, on obtient l'estimation désirée. Il ne reste plus qu'expliciter les conditions sur ν , t et h . Ces dernières sont données par la deuxième condition citée dans (56) et par (57). Ainsi en développant le calcul, on trouve que toutes les conditions sont satisfaites du moment que la condition (4) l'est.

3.2.2 Décroissance à l'intérieur de $\Omega_{t,\nu}$.

La preuve de la décroissance au sein de l'ensemble Ω_t (dont on omet l'indice ν) ressemble à celle utilisée dans la première partie. On pose

$$\Psi(t, x) = a(t, x) - \mathbf{1}_{\Omega_t}(x), \quad \Psi_\lambda(t, x) = a(t, x) - \mathbf{1}_{\Omega_{t,\lambda}}(x) \quad \text{et} \quad \Omega_{i,h}^c = \{x \in \mathbb{R}^3, \operatorname{dist}(x, \Omega_i^c) \leq h\}.$$

Nous considérons le même découpage en temps $(T_i)_{i=0}^N$ introduit dans la première partie et l'on pose pour tout entier i appartenant à $\llbracket 0, N \rrbracket$

$$f_i(x) = \frac{1}{l} \min \left\{ l, \operatorname{dist} \left(x, \Omega_{i,2\beta(T,h)}^c \right) \right\}, \quad \beta(T, h) = \frac{1}{4} \delta^{(2)}(T, h) \quad \text{et} \quad \phi_{i,\lambda}(t, x) = f_i(\psi_{i,\lambda}^{-1}(t, x)).$$

Une simple observation montre que

$$\operatorname{supp} f_i \subset (\Omega_i^c)_{2\beta(T,h)} \quad \text{et} \quad \operatorname{supp} \phi_{i,\lambda}(t) \subset \psi_{i,\lambda} \left(t, (\Omega_i^c)_{2\beta(T,h)} \right). \quad (60)$$

Ainsi on conclut grâce à la partie 4. du lemme 3 que pour tout $t \in [0, T]$ et pour tout λ vérifiant

$$\bar{\delta}(t, \lambda) \leq (2\beta(T, h))^{(2)},$$

on a

$$\begin{aligned} \text{supp } \phi_{i,\lambda}(t) &\subset \psi_{i,\lambda}\left(t, (\psi(T_i, \Omega^c))_{2\beta(T,h)}^c\right) \\ &\subset \left(\psi_\lambda(t, \Omega^c)\right)_{2((2\beta(T,h))^{(2)} - \bar{\delta}(T,\lambda))}^c \subset\subset \Omega_{t,\lambda}. \end{aligned}$$

Ce qui permet d'avoir

$$\phi_{i,\lambda}\Delta\Psi_\lambda = \phi_{i,\lambda}\Delta a \quad \text{et} \quad \phi_{i,\lambda}\nabla\Psi_\lambda = \phi_{i,\lambda}\nabla a.$$

En conséquence, l'équation qui régit $\Psi_\lambda\phi_{i,\lambda}$ est donnée par

$$\begin{aligned} \partial_t(\Psi_\lambda\phi_{i,\lambda}) + S_\lambda v \cdot \nabla(\Psi_\lambda\phi_{i,\lambda}) - \nu(\Delta + \frac{2}{r}\partial_r)(\Psi_\lambda\phi_{i,\lambda}) &= \phi_{i,\lambda}(S_\lambda v - v) \cdot \nabla\Psi_\lambda - 2\nu\nabla\Psi_\lambda \cdot \nabla\phi_{i,\lambda} \\ &\quad - \nu\Psi_\lambda(\Delta + \frac{2}{r}\partial_r)\phi_{i,\lambda}. \end{aligned}$$

En faisant le produit scalaire L^2 de l'équation ci-dessus avec $\Psi_\lambda\phi_{i,\lambda}$, on aboutit à

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\|\Psi_\lambda\phi_{i,\lambda}(t)\|_{L^2}^2 &\leq 2 \int \left| (S_\lambda v - v) \cdot \nabla\phi_{i,\lambda}(t,x) \Psi_\lambda^2\phi_{i,\lambda}(t,x) \right| dx + 2\nu \int \Psi_\lambda^2(t,x) |\nabla\phi_{i,\lambda}(t,x)|^2 dx \\ &\quad + 2\nu \left| \int a^2 \partial_r(\phi_{i,\lambda}^2) \frac{dx}{r} \right|. \end{aligned} \quad (61)$$

Or les mêmes arguments utilisés que dans la preuve (47) permettent d'avoir

$$\left| \int a^2 \partial_r(\phi_{i,\lambda}^2) \frac{dx}{r} \right| \leq \frac{4}{l}(\lambda l)^{C_0 V(T_i,t)} \|a^0\|_{L^2} \|\partial_r a(t)\|_{L^2}. \quad (62)$$

Donc, en combinant les estimations du lemme 1 avec (62) et en utilisant l'estimation

$$\|\Psi_\lambda(t)\|_{L^2} \leq 2\|a^0\|_{L^2},$$

on trouve suite à une intégration en temps que pour tout $t \in [T_i, T_{i+1}]$

$$\|\Psi_\lambda\phi_{i,\lambda}(t)\|_{L^2}^2 \leq \|\Psi_\lambda\phi_{i,\lambda}(T_i)\|_{L^2}^2 + 8\|a^0\|_{L^2}^2 \left((\lambda l)^{-2\alpha} + \frac{\sqrt{\nu t}}{l} (\lambda l)^{1-2\alpha} + \frac{\nu t}{l^2} (\lambda l)^{2(1-2\alpha)} \right). \quad (63)$$

Or par construction, on a

$$\text{supp } \phi_{i,\lambda}(T_i) \subset (\Omega_i^c)_{\beta(T,h)} \quad \text{et} \quad \|\phi_{i,\lambda}(t)\|_{L^\infty} \leq 1.$$

Donc on aura

$$\|\Psi_\lambda\phi_{i,\lambda}(T_i)\|_{L^2} \leq \|\Psi_\lambda(T_i)\|_{L^2((\Omega_i^c)_{\beta(T,h)})}.$$

Ainsi en développant des arguments similaires à la preuve de la première partie, on aboutit, pour tout $t \in [0, T]$ et pour tout ν et h satisfaisant (4), à l'estimation

$$\|\Psi_{\lambda_\nu}(t)\|_{L^2((F_i^c)_h)} \leq 5 \left(\frac{\nu T}{l^2} \right)^{\frac{\alpha}{2}} \left(\frac{4el}{h} \right)^{e^{C(1-2\alpha)-2\nu^2(T)}} \|a^0\|_{L^2}, \quad (64)$$

où l'on a posé $\lambda_\nu l = \frac{1}{\sqrt{\nu t}}$. On achève la preuve exactement comme pour la première partie : Il s'agit uniquement de montrer qu'on peut remplacer dans l'estimation (64) Ψ_{λ_ν} par Ψ .

3.3 Démonstration du corollaire 2

Le plan de la preuve s'organise de la manière suivante :

- 1) Nous allons développer des arguments permettant de remplacer dans le théorème 3 l'ensemble $\Omega_{t,\nu}$ par le transporté du support initial par le flot eulérien i.e Ω_t .
- 2) Pour accéder à une estimation $L^2(\mathbb{R}^3)$, il suffit d'évaluer la masse des solutions distribuée autour de la frontière de Ω_t .

Le point clé dans la preuve du premier point est la convergence visqueuse du flot visqueux $\psi_\nu(\cdot)$ vers le flot eulérien $\psi(t, \cdot)$.

3.3.1 Convergence de $\psi_\nu(t)$ vers $\psi(t)$

Nous allons établir dans ce qui suit le résultat suivant

Proposition 3. *Soient v_ν et v les solutions de Yudovich introduites dans le théorème 1. Il existe deux fonctions strictement positives $f_0(T)$ et $g_0(T)$ dépendant de $\|v^0\|_{L^2}$, $\|\omega^0\|_{L^2 \cap L^\infty}$ et $\|\frac{\omega^0}{r}\|_{L^2 \cap L^\infty}$ telles que $f_0(T)$ tende vers zéro quand T tend vers l'infini et $g_0(T)$ est à croissance polynomiale en T , et satisfaisant l'implication :*

$$\text{si} \quad \frac{\nu T}{l^2} \leq f_0(T),$$

alors pour tout $t \in [0, T]$, on a

$$\|\psi_\nu(t) - \psi(t)\|_{L^\infty} \leq (g_0(T))^{\exp - V(T)} \left(\frac{\nu T}{l^2} \right)^{\frac{1}{5} \exp - g_0(T)}.$$

Démonstration La preuve est basée sur un résultat de convergence visqueuse dans L^2 de la vitesse v_ν vers v . Ensuite on utilise un argument d'interpolation. Pour commencer, rappelons un théorème dû à R. Danchin et J. Ben Amer [2] :

Théorème 5. *Soit v^0 un champ de vecteurs axisymétrique appartenant à H^1 , de divergence nulle et vérifiant les conditions ω^0 , $\alpha^0 := \frac{\omega^0}{r} \in L^2 \cap L^\infty$. Notons v_ν la solution de (NS_ν) donnée par le théorème 1. Alors il existe une constante C universelle, telle que pour tout $T > 0$ et pour tout $\nu \geq 0$ vérifiant :*

$$\frac{\nu T}{l^2} \left(\frac{\|\omega^0\|_{L^2}}{\|v^0\|_{L^2}} + T \|\alpha^0\|_{L^\infty} \right)^2 \leq C e^{-\frac{4}{3} \exp(CT \|v^0\|_{L^2} f(c_0 + T \|\alpha^0\|_{L^\infty}))},$$

avec $f(t) = t^{\frac{5}{2}} \log t$ et $c_0 = 2 + \frac{\|\omega^0\|_{L^2 \cap L^\infty}}{\|v^0\|_{L^2}}$, on ait

$$\|v_\nu - v\|_{L^\infty(0, T; L^2)} \leq \|v^0\|_{L^2} \left(\frac{\nu T}{l^2} \left(\frac{\|\omega^0\|_{L^2}}{\|v^0\|_{L^2}} + T \|\alpha^0\|_{L^\infty} \right)^2 \right)^{\frac{1}{2} \exp(-CT \|v^0\|_{L^2} f(c_0 + T \|\alpha^0\|_{L^\infty}))}.$$

En ce qui concerne la convergence du flot visqueux vers le flot eulérien, nous allons utiliser l'équation intégrale régissant les flots. L'importante information dont on se sert est le fait que les champs de vecteurs sont uniformément contrôlés par rapport à la viscosité dans la classe de fonctions log-lipschitziennes. Ceci permet alors d'obtenir le résultat désiré via le lemme

d'Osgood. En effet : en revenant à l'équation intégrale définissant les flots et en se servant d'une simple inégalité triangulaire, on trouve

$$\begin{aligned} |\psi_\nu(t, x) - \psi(t, x)| &\leq \int_0^t \|v_\nu(\tau) - v(\tau)\|_{L^\infty} d\tau + \int_0^t |v(\tau, \psi_\nu(\tau, x)) - v(\tau, \psi(\tau, x))| d\tau \\ &\leq \|v_\nu - v\|_{L^1([0, t], L^\infty)} + \int_0^t \|v(\tau)\|_{LL} \mu(|\psi_\nu(\tau, x) - \psi(\tau, x)|) d\tau. \end{aligned}$$

avec $\mu(r) = r \log(\frac{el}{r})$. A ce stade, il suffit d'appliquer le lemme d'Osgood qui implique que si

$$\|v_\nu - v\|_{L^1([0, t], L^\infty)} \leq le^{1 - \exp V(t)},$$

alors on aura

$$|\psi_\nu(t, x) - \psi(t, x)| \leq el \left(\frac{\|v_\nu - v\|_{L^1([0, t], L^\infty)}}{el} \right)^{e^{-V(t)}} := r_\nu(t).$$

Pour enfin conclure la preuve de la proposition 3, on utilise le résultat d'interpolation suivant

$$\|v_\nu - v\|_{L^\infty} \leq C \|v_\nu - v\|_{L^2}^{\frac{2}{5}} \|v_\nu - v\|_{C_*^1}^{\frac{3}{5}}$$

combiné avec le théorème 5 et le corollaire 1.

3.3.2 Fin de la preuve : estimation de $\|\omega_\nu(t)/r - \mathbf{1}_{\Omega_t}\|_{L^2(\mathcal{T}_{t, h})}$

La convergence uniforme du flot visqueux établie dans la proposition 3 permet, moyennant d'un calcul simple, d'avoir les inclusions suivantes :

$$(\Omega_t)_{h+r_\nu(t)}^c \subset (\Omega_{t, \nu})_h^c \quad \text{et} \quad (\Omega_t^c)_{h+r_\nu(t)} \subset (\Omega_{t, \nu}^c)_h \subset (\Omega_t^c)_{h-r_\nu(t)}.$$

Ceci est suffisant pour pouvoir remplacer dans le théorème 3 l'ensemble $\Omega_{t, \nu}$ par Ω_t . Rest à faire des analyses autour du bord eulérien. Pour cela nous introduisons la définition suivante :

Définition 4. Soient A un ensemble de \mathbb{R}^3 et h un réel positif. On définit le voisinage tubulaire de A d'épaisseur h , noté \mathcal{T}_h , par

$$\mathcal{T}_h = \{X \in \mathbb{R}^3, \text{ dist}(X, A) \leq h\}.$$

Dans notre cas on note par $\mathcal{T}_{t, h}$ le voisinage tubulaire de $\partial\Omega_t$ d'épaisseur h .

D'un autre côté, comme $\omega_\nu(t)/r$ est uniformément borné par rapport à ν dans $L^\infty(\mathbb{R}^3)$ (d'après le théorème 1), alors il suffit de contrôler la mesure de Lebesgue de l'ensemble $\mathcal{T}_{t, h}$. Pour ce faire, nous allons montrer que ce dernier est contenu dans l'image par le flot eulérien $\psi(t)$ d'un certain voisinage de la forme \mathcal{T}_{0, h_1} . En effet, en posant

$$h_1 = el \left(\frac{h}{el} \right)^{\exp -V(t)},$$

on déduit grâce au lemme 3 que

$$\psi(t, \Omega_{h_1}^c) \subset (\Omega_t)_h^c \quad \text{et} \quad \psi(t, (\Omega^c)_{h_1}) \subset (\Omega_t^c)_h.$$

Ce qui entraîne, via la bijectivité du flot, que

$$\mathcal{T}_{t,h} \subset \psi(t, \mathcal{T}_{0,h_1}). \quad (65)$$

Or, le flot $\psi(t)$ conserve la mesure de Lebesgue, donc

$$|\mathcal{T}_{t,h}| \leq |\mathcal{T}_{0,h_1}|. \quad (66)$$

il suffit d'évaluer le volume de \mathcal{T}_{0,h_1} . Pour cela, on dispose du lemme suivant dont la preuve est reportée à la fin de la section.

Lemme 4. *Soit Ω un domaine borné axisymétrique de \mathbb{R}^3 . On suppose que $\partial\Omega \cap \{0\} \times \mathbb{R}^2 = \Gamma$ est une courbe simple rectifiable de longueur L . Notons par $\mathcal{T}_h = \{X \in \mathbb{R}^3, \text{dist}(X, \partial\Omega) \leq h\}$. Alors le volume de l'ensemble tubulaire \mathcal{T}_h est estimé comme suit*

$$\text{Vol } \mathcal{T}_h = |\mathcal{T}_h| \leq 2\pi^2 h(L + 2h)^2.$$

Ainsi en combinant ce lemme avec (66) et le théorème 1, on aura

$$\begin{aligned} \|\omega_\nu(t)/r - \mathbf{1}_{\Omega_t}\|_{L^2(\mathcal{T}_{t,h})} &\leq C \|\omega_\nu(t)/r - \mathbf{1}_{\Omega_t}\|_{L^\infty} |\mathcal{T}_{t,h}|^{\frac{1}{2}} \\ &\leq C \|\omega^0/r\|_{L^\infty} \left(\frac{h}{el}\right)^{\frac{1}{2} \exp -V(T)} (L + l). \end{aligned} \quad (67)$$

En combinant les estimations du théorème 3 avec (67), on trouve sous la même condition (4) et avec $\alpha = \frac{1}{3}$

$$\|\omega_\nu(t)/r - \mathbf{1}_{\Omega_t}\|_{L^2} \leq C \left(\frac{h}{el}\right)^{\frac{1}{2} \exp -V(T)} (L + l) + C \left(\frac{\nu t}{l^2}\right)^{\frac{1}{6}} \left(\frac{4el}{h}\right)^{\exp CV_\nu^2(T)} \|a^0\|_{L^2}.$$

Maintenant on choisit judicieusement h en fonction de ν et t on parvient à l'estimation énoncée.

Démonstration du lemme 4 : Une simple constatation, utilisant le fait que Ω est invariant par rotation autour de l'axe (oz) , montre que le volume $V_{\Gamma,h}$ de l'ensemble obtenu par révolution de la surface

$$S_h = \{X \in \{0\} \times \mathbb{R}^2, \text{dist}(X, \Gamma) \leq h\}$$

autour de l'axe (Oz) est égal au volume du tube \mathcal{T}_h . Or il y a une relation entre le volume $V_{\Gamma,h}$ et la surface S_h (on a désigné par le même symbole la surface et sa mesure de Lebesgue). Elle est donnée par

$$V_{\Gamma,h} = \pi \text{dist}(G, (Oz)) |S_h|,$$

où G désigne le centre de gravité de S_h^+ . Avec

$$S_h^+ = S_h \cap \{y \geq 0\}.$$

Nous avons les deux affirmations suivantes :

- $\text{dist}(G, (0z)) \leq \frac{1}{2}L + h$.
- $|S_h| \leq 4\pi(Lh + h^2)$.

Commençons par la preuve du premier point. Désignons par X_1 un des points de Γ^+ les plus éloignés de l'axe (Oz) et notons par d la distance associée. Alors on peut voir facilement que le point G se trouve forcément dans la bande de $\{0\} \times \mathbb{R}^2$ limitée par l'axe (Oz) et la droite d'équation $y = d + h$. Or la géométrie de Ω implique que la courbe Γ^+ rencontre nécessairement l'axe de révolution en un point X_2 . Ainsi un résultat classique sur les courbes planes montre que la longueur de l'arc de Γ^+ joignant X_1 et X_2 est plus grand que la distance entre X_1 et l'axe (Oz) soit d . Ainsi on en déduit l'inégalité souhaitée.

La preuve du second point s'obtient grâce à une méthode de recouvrement par des boules centrés sur Γ et de rayon $2h$. Il suffit uniquement de compter le nombre minimal de boules permettant de recouvrir S_h . Or une simple considération montre que la surface S_h est recouverte si le recouvrement est choisi de manière que la longueur de l'arc joignant deux centres consécutifs est de l'ordre de h . Ainsi le nombre minimal de boules est majoré par $\frac{L}{h} + 1$. Ceci entraîne l'estimation annoncée. ■

Références

- [1] H. Bahouri et J.-Y. Chemin, Equations de transport relatives à des champs de vecteurs non-lipschitziens et mécanique des fluides, Arch. Ra. Mech. Anal, **127**, 159-181, 1994.
- [2] J. Ben Ameer, R. Danchin, Limite non visqueuse pour les fluides incompressibles axi-symétriques, Nonlinear partial differential equations and their applications. Collège de France seminar, vol. **XIV**, 29 - 55,(Paris, 1997/1998), Stud. Math. Appl, **31** North. Holland, Amsterdam, 2002 .
- [3] J.-Y. Chemin, Perfect incompressible Fluids, Oxford University Press 1995.
- [4] J. Leray, Sur le mouvement d'un liquide visqueux remplissant l'espace, Acta Mathematica, **63**, 193-248, 1934.
- [5] S. Leonardi, J. Málek, J. Necás and M. Pokorný, On Axially Symmetric Flows in \mathbb{R}^3 , Zeitschrift fur Analysis und ihre Anwendungen Journal for Analysis and its Applications, **18**, No. 3, 639-649 (1999).
- [6] T. Kato, Quasi-linear equations of evolution, with applications to partial differential equations, Lecture Notes in Mathematics, **448**, Springer Verlag, 25-70, 1975.
- [7] T. Hmidi, Transport-Diffusion et viscosité évanescence, C.R. Acad. Sci. Paris, Ser. I **337**, 309-312, 2003.
- [8] M. R. Ukhovskii and V. Yudovich, Axially Symmetric Flows of Ideal and Viscous Fluids Filling the Whole Space, Prikl. Mat. Meh. **32**, no. 1, 59-69, 1968.