RÉGULARITÉ HÖLDÉRIENNE DES POCHES DE TOURBILLON VISQUEUSES

Taoufik Hmidi
UMR 7640 du C.N.R.S
Centre de Mathématiques, École Polytechnique
91128 Palaiseau Cedex.
e-mail : hmidi@math.polytechnique.fr

Résumé. Nous étudions la propagation de la régularité höldérienne dans une équation de transport-diffusion relative à un champ lipschitzien généralisant un résultat établi par R. Danchin [6] pour les espaces de Besov $B^s_{p,\infty}$, avec p fini et $s \in (-1, 1)$. Comme application, nous montrons, dans le cadre du système de Navier-Stokes 2-D, que si le tourbillon initial est une poche dont le bord est de classe $C^{1+\epsilon}$, alors son transporté par le flot visqueux préserve cette régularité pour tout temps. Nous démontrons également des résultats de limite non visqueuse.

Abstract. We study the evolution of the Hölderian regularity for some convection-diffusion equation with respect to Lipschitzian vector field, generalizing a result of R. Danchin [6] for the Besov spaces $B^s_{p,\infty}$, with p finite and $s \in (-1, 1)$. As an application, we show for the two-dimensional Navier-Stokes system that if the initial vorticity is a vortex patch having a $C^{1+\epsilon}$ boundary then its image through the viscous flow preserves this regularity for all time. We also show some results of inviscid limit.

Mots-clés : Poches de tourbillon visqueuses, Equation de transport-diffusion, Régularité höldérienne,

Dans cet article nous étudions la stabilité höldérienne des poches de tourbillon relatives à un fluide visqueux incompressible et en mouvement plan. La vitesse de la particule qui, à l'instant t, se trouve à la position $x \in \mathbb{R}^2$ et que l'on note $v_\nu(t, x)$, vérifie le système de Navier-Stokes :

$$(NS_\nu) \begin{cases} \partial_t v_\nu + v_\nu \cdot \nabla v_\nu - \nu \Delta v_\nu = -\nabla p_\nu, \\ \operatorname{div} v_\nu = 0, \\ v_{\nu|t=0} = v^0, \end{cases}$$

où ν est un paramètre positif désignant la viscosité cinématique du fluide. Le scalaire p_ν représente la pression. Notons que le système d'Euler incompressible (E), noté parfois (NS_0), correspond à une viscosité nulle. Il est régi par :

$$(E) \begin{cases} \partial_t v + v \cdot \nabla v = -\nabla p, \\ \operatorname{div} v = 0, \\ v_{|t=0} = v^0. \end{cases}$$

Nous disons que le tourbillon ω, défini par $\omega = \partial_1 v^2 - \partial_2 v^1$, possède la structure d'une poche de tourbillon s'il est l'indicatrice d'un ouvert borné. L'étude de ces structures revêt une grande importance que ce soit aussi bien du point de vue mathématique que du point de vue physique et même numérique. Les premières observations de stabilité des poches de tourbillon dans les équations d'Euler bidimensionnelles remontent à G. Kirchhoff qui a remarqué qu'une poche de tourbillon elliptique préserve cette structure pour tout temps et qu'elle tourne à vitesse constante autour de son centre de symétrie. Nous soulignons que la réponse définitive de la stabilité des poches peut être dérivée d'un résultat général dû à V. I. Yudovich qui montre dans [17] qu'à partir d'une donnée initiale ayant un tourbillon dans $L^1 \cap L^\infty$, alors le système d'Euler possède une unique solution globale. Ce résultat persiste aussi dans le cas visqueux ; pour plus de précision on peut consulter [1]. De plus, le flot défini par :

$$\psi_\nu(t,x) = x + \int_0^t v_\nu(\tau, \psi_\nu(\tau,x))d\tau,$$

existe globalement et est unique dans la classe des fontions continues dans les deux variables d'espace et de temps. Ceci est suffisant pour affirmer, dans le cadre du système (E), que la structure des poches est conservée. Suite à ces résultats une question se pose : la description de la régularité du bord. Hélas, le résultat de Yudovich ne permet pas d'avoir de réponse complètement satisfaisante. Dans les meilleurs cas, on ne peut dégager qu'un résultat faible du type : étant donnée une poche initiale dont le bord est de classe C^1, alors la régularité de la poche, à l'instant t, est au moins de classe $C^{\exp -\alpha t}$. Il a fallu attendre quelques décennies pour qu'un tel problème soit définitivement résolu. Ainsi, on démontre que si le bord de la poche initiale est plus régulier que C^1, typiquement de classe $C^{1+\epsilon}, 0 < \epsilon < 1$, alors la frontière de la poche l'est aussi pour tout temps. En fait, c'est J.-Y. Chemin qui établit ce résultat, voir [3].

La démonstration de J.-Y. Chemin utilise un contrôle Lipschitz de la vitesse et elle s'applique dans un cadre plus général, dit des poches de tourbillon généralisées. Nous signalons que P. Serfati a montré dans [13] le même résultat avec une autre méthode. L'étude des poches singulières a vu le jour suite au travail de J.-Y. Chemin qui a démontré dans [3] que la partie régulière du bord se déplace régulièrement à travers le flot sans qu'elle soit affectée par la partie singulière du bord. Toutefois, le comportement exact de la partie singulière est loin d'être élucidé. Dans ce contexte, le champ est lipschitzien en dehors du propagé des singularités par le flot. Son gradient ne peut exploser, à l'approche de cet ensemble, qu'avec un taux de l'ordre de $-\log h$, au maximum, où h est un paramètre mesurant la proximité par rapport à cet ensemble. Toutefois, R. Danchin montre dans [8] que pour une poche initiale admettant une singularité particulière de type *cusp*, alors la vitesse, est lipschitzienne en tout temps. Ce qui permet de propager la structure initiale de la poche, qui reste, en tout temps, de type *cusp*.

Dans le but de généraliser le théorème de J.-Y. Chemin à des poches de tourbillon visqueuses, R. Danchin montre dans [6] que lorsque la poche initiale est l'indicatrice d'un domaine borné Ω de classe $C^{1+\epsilon}$, alors le champ v_ν est lipschitzien. En outre, son contrôle Lipschitz est uniforme en ν. En conséquence, il en déduit que le transporté $\psi_\nu(t,\Omega)$ du domaine initial par le flot visqueux est de classe $C^{1+\epsilon'}$, pour tout $\epsilon' < \epsilon$. De plus, on a la "convergence" du bord visqueux vers celui d'Euler lorsque le paramètre ν tend vers zéro. Cette apparente perte de la régularité höldérienne n'a pas lieu dans les espaces de Besov $B^\epsilon_{p,\infty}$, avec $2 < p < +\infty$ et $\epsilon \in]2/p, 1[$. Ceci est dû à la propagation de la régularité Besov, uniformément en ν, dans les équations de type (TD_ν) que nous définisons dans le paragraphe suivant. Le but de ce travail est de montrer la propagation dans le cas limite $p = +\infty$, i.e., dans les espaces de Hölder. Comme conséquence de ce résultat, nous établissons que le bord du transporté $\psi_\nu(t,\Omega)$ conserve la régularité $C^{1+\epsilon}$, uniformément par rapport à ν.

Théorème 1. *Soient $\epsilon \in]0,1[$, Ω^0 un ouvert borné dont le bord est une courbe simple de classe $C^{1+\epsilon}$; v^0 le champ de vecteurs dont le rotationnel vaut $\omega^0 = \mathbf{1}_{\Omega^0}$. Alors pour tout $\nu \geq 0$, (NS_ν) possède une unique solution dans $L^\infty_{loc}(\mathbb{R}_+; \mathrm{Lip}(\mathbb{R}^2))$. D'une manière plus précise, il existe une constante C ne dépendant que de ϵ et Ω^0 telle que, pour tout $\nu \geq 0$ et pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, on ait*

$$\|\nabla v_\nu(t)\|_{L^\infty} \leq C(1+\nu)e^{Ct}.$$

De plus, si l'on désigne par $\Omega_\nu(t)$ le transporté de Ω^0 par le flot de v_ν, alors $\partial\Omega_\nu(t)$ est une courbe simple de classe $C^{1+\epsilon}$. En outre, il existe une paramétrisation régulière γ_ν de la frontière de $\Omega_\nu(t)$ appartenant à $L^\infty_{loc}(\mathbb{R}_+;\, C^{1+\epsilon}(\mathbf{S}^1,\mathbb{R}^2))$ telle que, pour tout $\epsilon' < \epsilon$, γ_ν converge vers γ_0 dans l'espace $L^\infty_{loc}(\mathbb{R}_+;\, C^{1+\epsilon'}(\mathbf{S}^1,\mathbb{R}^2))$ lorsque ν tend vers zéro.

La démonstration utilise essentiellement deux résultats liés aux équations de transport-diffusion :

$$(TD_\nu)\left\{\begin{array}{l} \partial_t a + v\cdot\nabla a - \nu\Delta a = F + \nu G \\ a_{|t=0} = a^0. \end{array}\right.$$

Le premier résultat établi traite de la propagation dans les espaces de Hölder, sa généralisation est donnée dans le théorème 2.

Proposition 1. *Soient ϵ un réel dans l'intervalle $]-1,1[$ et d un entier supérieur ou égal à 2. On se donne une fonction $G \in L^\infty_{loc}(\mathbb{R}_+;\, C^{\epsilon-2})$ et un champ de vecteurs v de $\mathbb{R}^d$ appartenant à l'espace $L^1_{loc}(\mathbb{R}_+;\, \mathrm{Lip}(\mathbb{R}^d))$ et de divergence nulle. Il existe une constante C, ne dépendant que de ϵ, telle que si a est une solution de l'équation (TD_ν) correspondant à $F \equiv 0$ et si de plus elle appartient à $L^\infty_{loc}(\mathbb{R}_+;\, C^\epsilon)$, alors pour tout $t \geq 0$ et pour tout $\nu \geq 0$:*

$$\|a(t)\|_{C^\epsilon} \leq C\, e^{C\int_0^t \|\nabla v(\tau)\|_{L^\infty}d\tau}\Big(\|a^0\|_{C^\epsilon} + \big(1+\nu t\big)\|G\|_{L^\infty_t C^{\epsilon-2}}\Big).$$

Nous insistons sur le fait que la fonction G a deux crans de régularité de moins que la donnée initiale et pourtant la régularité initiale est propagée de façon uniforme en ν pour ν petit.

Dans le second résultat, nous discutons un effet régularisant développé dans les équations de type (TD_ν) avec un second membre nul. Nous montrons, en particulier, que si $a^0 \in L^\infty$, alors, pour tout $t \in \mathbb{R}_+$,

$$\nu\int_0^t a(\tau,x)d\tau \in C^2_*.$$

De plus, la norme correspondante est majorée indépendamment de ν, pour ν borné. L'espace C^2_* introduit n'est autre que l'espace des distributions tempérées u satisfaisant :

$$\|u\|_{C^2_*} \stackrel{déf}{=} \sup_{q\geq -1} 2^{2q}\|\Delta_q u\|_{L^\infty} < +\infty,$$

où Δ_q désigne l'opérateur de localisation en fréquences qu'on définit comme suit. Il existe deux fonctions positives et régulières χ et φ qui sont supportées respectivement dans une boule et une couronne telles que, pour tout $\xi \in \mathbb{R}^d$,

$$\chi(\xi) + \sum_{q\geq 0}\varphi(2^{-q}\xi) = 1 \quad \text{et} \quad \frac{1}{3} \leq \chi^2(\xi) + \sum_{q\geq 0}\varphi^2(2^{-q}\xi) \leq 1. \tag{1}$$

On pose alors, pour toute distribution tempérée u,

$$\Delta_{-1}u = \mathcal{F}^{-1}\big(\chi(\xi)\widehat{u}(\xi)\big)\ ;\ \forall\, q\in\mathbb{N},\ \Delta_q u = \mathcal{F}^{-1}\big(\varphi(2^{-q}\xi)\widehat{u}(\xi)\big) \quad \text{et} \quad S_q u = \sum_{-1\leq p\leq q-1}\Delta_p u.$$

Nous rappelons que les espaces de Hölder d'indices non entier, noté C^s, peuvent être définis dans le cadre de la théorie de Littlewood-Paley :

$$C^s = \Big\{u \in S'(\mathbb{R}^d)\ ;\ \|u\|_{C^s} \stackrel{déf}{=} \sup_{q\geq -1} 2^{qs}\|\Delta_q u\|_{L^\infty} < +\infty\Big\}.$$

Lorsque s est un entier, l'espace défini ci-dessus, appelé espace de Zygmund, sera noté C^s_*

Proposition 2. *Soit d un entier ≥ 2. Il existe une constante positive C telle que si v est un champ de vecteurs à divergence nulle et appartenant à $L^1_{loc}(\mathbb{R}_+ \,;\, \mathrm{Lip}(\mathbb{R}^d))$ et si a est une solution du problème (TD_ν) sans second membre et à donnée initiale $a^0 \in L^\infty(\mathbb{R}^d)$, alors, on a pour tout $t > 0$ et pour tout $q \geq -1$,*

$$\|\Delta_q a(t)\|_{L^\infty} + \nu 2^{2q} \int_0^t \|\Delta_q a(\tau)\|_{L^\infty} d\tau \leq C\|a^0\|_{L^\infty} \left(1 + \nu t + \int_0^t \|\nabla v(\tau)\|_{L^\infty} d\tau\right).$$

1. Résultats et outils de base

Cette section est structurée comme suit : dans la première partie nous discutons des limitations de la méthode d'énergie lors de la propagation, sans perte, de la régularité höldérienne. Nous présentons de façon succinte une méthode qui permet de combler cette lacune et nous achevons cette première partie par la généralisation des résultats cités de manière restrictive dans les Propositions 1 et 2. Dans la seconde partie, nous rappelons des lemmes qui serviront au cours de la démonstration et nous terminons cette section par un lemme de propagation L^p dans les équations de transport-diffusion (TD_ν) que nous démontrons dans le cas limite L^1 à l'aide de la méthode de dualité.

1.1. **Effet régularisant et propagation visqueuse.**

Pour espérer propager sans perte la régularité de type Besov ou Hölder dans les équations (TD_ν) nous nous utilisons le cadre, qui paraît naturel, d'un champ de vecteurs v localement lipschitzien, c'est-à-dire, pour tout $t > 0$

$$V(t) \overset{déf}{=} \int_0^t \|\nabla v(\tau)\|_{L^\infty} d\tau < +\infty. \tag{2}$$

L'étude de la propagation de la régularté Besov $B^s_{p,\infty}$ a été faite par R. Danchin dans [6]. Il démontre des estimations uniformes par rapport à ν mais explosives dans le paramètre p. Ainsi, la propagation höldérienne semble hors d'atteinte. Par ces méthodes, nous notons que le facteur ν devant G nous permet effectivement de gagner deux dérivées sur la régularité de cette fonction,uniformément en ν. Ce point est d'un apport crucial lorsqu'il s'agit de prouver la persistance de la régularité tangentielle du tourbillon.

La méthode est de type énergie : elle utilise des intégrations par parties et un lemme d'analyse harmonique qu'on retrouve dans [6] et qui a été ensuite amélioré par F. Planchon dans [12]. Ce lemme apparaît comme une généralisation du lemme de Poincaré, ce qu'il est en fait . L'un des avantages de cette méthode est que le champ de vecteurs v n'est pas censé vérifier la condition d'incompressibilté lorsque l'indice de régularité s est pris dans $]0, 1[$. On se sert seulement de cette condition pour propager la régularité négative correspondant à $s \in]-1, 0[$.

Le but de ce travail est de montrer la persistance de la régularité dans le cas critique, i.e., dans les espaces de Hölder. La méthode developpée ici diffère de [6] : elle consiste à localiser en fréquences l'équation initiale et à absorber le terme de transport via un changement de variables lagrangien. Nous utilisons d'une manière incontournable la préservation de la mesure par le flot qui résulte de l'incompressibilité de la vitesse.

Les difficultés de cette méthode peuvent être résumées en deux points : primo, le changement de variables lagrangien transforme l'équation de départ en une équation de la chaleur à cœfficients variables. Heureusement, la métrique en jeu se comporte sur un petit intervalle de temps comme une perturbation de l'identité. Secondo, la composition d'une fonction localisée en fréquences et du flot ne donne pas en général une fonction localisée. En conséquence, nous ne pouvons pas appliquer à l'état brut le Lemme 2. Pour surmonter cette difficulté nous procédons à une relocalisation, sur des couronnes de taille 2^j, de l'équation régissant les blocs dyadiques

$\Delta_q a$. Ainsi nous obtenons les contrôles souhaités mais uniquement pour les fréquences correspondant à $j \geq q$. En ce qui concerne les basses fréquences, nous utilisons le Lemme 6, lemme de composition dyadique. C'est exactement ici que la condition de divergence nulle semble indispensable.

Pour une description précise de nos résultats, introduisons quelques définitions de base. Commençons par les espaces de Besov inhomogènes, qui sont une généralisation des espaces de Hölder. Ils peuvent être définis comme suit :

$$B_p^s = \Big\{ u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d),\ \|u\|_{B_p^s} \overset{déf}{=} \sup_{q \geq -1} 2^{qs} \|\Delta_q u\|_{L^p} < +\infty \Big\}.$$

Pour s non entier on a $C^s = B_\infty^s$. Une fonction u appartient à $L^1_{loc}(\mathbb{R}_+;\, B_p^s)$ si, pour tout $T > 0$,

$$\int_0^T \|u(\tau)\|_{B_p^s} d\tau < +\infty.$$

Une fonction u appartient à l'espace $\widetilde{L^r_{loc}}(\mathbb{R}_+;\, B_p^s)$ si l'on a

$$\forall T > 0,\ \ \|u\|_{\widetilde{L^r_T}(B_p^s)} \overset{déf}{=} \sup_{q \geq -1} 2^{qs} \|\Delta_q u\|_{L^r([0,\,T];\,L^p)} < +\infty.$$

On définit aussi la norme :

$$\|u\|_{\widetilde{L^r}(T_1,T_2;B_p^s)} \overset{déf}{=} \sup_{q \geq -1} 2^{qs} \|\Delta_q u\|_{L^r([T_1,\,T_2];\,L^p)} < +\infty$$

Avant de donner le résultat de propagation, plaçons nous tout d'abord dans le cas où F et G sont nulles. Alors l'équation associée correspond à celle que vérifie le tourbillon visqueux en dimension deux. Dans ce cas, nous montrons un effet de régularisation résultant de l'intégration en temps des blocs dyadiques,ingrédient fondamental pour l'étude des poches höldériennes.

Proposition 3. *Il existe une constante positive C telle que, si v est un champ de vecteurs à divergence nulle satisfaisant* (2) *et si a est une solution de* (TD_ν) *pour une donnée initiale a^0, avec $F = 0$ et $G = 0$, alors si $a^0 \in L^p$, avec $p \in [1,\, +\infty]$, on aura pour tout $r \in [1,\, +\infty]$ et pour tout $t > 0$,*

$$\nu^{\frac{1}{r}} \|a\|_{\widetilde{L^r_t}\left(B_p^{\frac{2}{r}}\right)} \leq C \|a^0\|_{L^p} \left(1 + \nu t + \int_0^t \|\nabla v(\tau)\|_{L^\infty} d\tau \right)^{\frac{1}{r}}.$$

Remarques • Dans l'application de cette proposition à des poches höldériennes on uitilise uniquement le cas particulier $r = 1$. Il permet, via une intégration en temps, de gagner les deux dérivées perdues par l'opérateur de Laplace.
• La quantité $(\nu t)^{\frac{1}{r}}$ de l'estimation de la proposition ci-dessus est un phénomène basses fréquences.

Voici la généralisation du Théorème 4.1 de [6] au cas $p = +\infty$.

Théorème 2. (1) *Soient d un entier ≥ 2 et s et p deux éléments appartenant respectivement aux intervalles $]-1,\, 1[$ et $[1,\, +\infty]$. Alors il existe une constante positive C_1 ne dépendant que de s et d, vérifiant les propriétés suivantes : soit v est un champ de vecteurs de divergence nulle et satisfaisant* (2). *On considère des fonctions $a^0 \in B_p^s$, $F \in L^1_{loc}(\mathbb{R}_+;\, B_p^s)$ et*

$G\in L^\infty_{loc}(\mathbb{R}_+;\, B_p^{s-2})$. Si a est une solution de (TD_ν) associée à la donnée initiale a^0 et appartenant à $L^\infty_{loc}(\mathbb{R}_+;\, B_p^s)$ alors, pour tout temps positif t, on a :

$$\|a(t)\|_{B_p^s}\leq C_1e^{C_1V(t)}\bigg(\|a^0\|_{B_p^s}+\|G\|_{L_t^\infty B_p^{s-2}}+\int_0^t e^{-C_1V(\tau)}\Big(\|F(\tau)\|_{B_p^s}+\nu\|G(\tau)\|_{B_p^{s-2}}\Big)d\tau\bigg).$$

(2) *On se donne maintenant $s\in]-1,1[$ et $r\in]\frac{2}{1-s},+\infty]$. On suppose que les fonctions F, G et v appartiennent successivement aux espaces $\widetilde{L^1_{loc}}(\mathbb{R}_+;\, B_p^s)$; $\widetilde{L^r_{loc}}(\mathbb{R}_+;\, B_p^{s+\frac{2}{r}-2})\cap\widetilde{L^\infty_{loc}}(\mathbb{R}_+;\, B_p^{s-2})$ et $L_{loc}^{\frac{r}{r-1}}\big(\mathbb{R}_+;\,\mathrm{Lip}(\mathbb{R}^d)\big)$. Alors, on aura pour tout t positif et pour tout $\nu\geq 0$*

$$\begin{aligned}\nu^{\frac1r}\|a\|_{\widetilde{L_t^r}B_p^{s+\frac2r}} &\leq C_2N_r(t)e^{C_1V(t)}\big(1+(\nu t)^{\frac1r}\big)\Big(\|a^0\|_{B_p^s}+\|F\|_{\widetilde{L_t^1}B_p^s}\Big)\\ &+ C_2N_r(t)(1+\nu t)\bigg(\nu^{\frac1r}\|G\|_{\widetilde{L_t^r}B_p^{s+\frac2r-2}}+e^{C_1V(t)}(1+(\nu t)^{\frac1r})\|G\|_{L_t^\infty B_p^{s-2}}\bigg),\end{aligned}$$

avec

$$N_r(t)=\begin{cases}1+r^{-1}t+\big(1-\frac1r\big)\Big(\displaystyle\int_0^t\|\nabla v(\tau)\|_{L^\infty}^{\frac{r}{r-1}}d\tau\Big)^{1-\frac1r}, & si\ r\in]1,+\infty],\\[2ex] 1+t\|\nabla v\|_{L_t^\infty L^\infty}\ si\ r=1,\end{cases}$$

La constante C_2 ne dépend que de d, s et r; rappelons que $V(t)=\displaystyle\int_0^t\|\nabla v(\tau)\|_{L^\infty}d\tau$.

Remarques :
- La restriction $r>2/(1-s)$ qui figure dans la deuxième partie du théorème précédent est liée à une inégalité de convolution qui avec le bon signe pour utiliser l'inégalité de Young.
- Notons que la constante C_1 qui figure dans le théorème ci-avant peut être mise sous la forme $C_1=\frac{C_d}{1-s^2}$, avec C_d dépend uniquement de d.
- La constante C_2 dépend de s et r : $C_2=\frac{C_d}{(1-(s-\frac2r)^2)(1-s^2)}$.

1.2. **Lemmes de base.** L'objet de ce qui suit est de fournir un nombre de lemmes utiles : nous décrivons par le biais du premier lemme le gain de régularité dû à la commutation. Par contre le second lemme fournit un effet régularisant ponctuel en temps dans l'équation de la chaleur. Nous aborderons également le lemme de Bernstein et un résultat de convolution retardée. Nous discutons à la fin de cette section un résultat de propagation L^p dans les équations (TD_ν).

Pour la démonstration du lemme ci-après, on peut consulter par exemple le lemme 4.2 de [6].

Lemme 1. *Soient v un champ de vecteurs lipschitzien de $\mathbb{R}^d$ et a est un élément pris dans l'espace B_p^s avec (s,p) un couple appartenant à $]-1,\,1\,[\times[1,\,+\infty]$. Alors, il existe une constante C ne dépendant que de s et d telle que,*

$$\big\|[\Delta_q,v\cdot\nabla]a\big\|_{L^p}\leq C2^{-qs}\|\nabla v\|_{L^\infty}\|a\|_{B_p^s}.$$

Voici maintenant le second lemme central dans l'élaboration de la propagation de la régularité höldérienne, lemme trouvé, par exemple, dans [4].

Lemme 2. *Soit $\mathcal{C}$ une couronne. Il existe deux constantes positives c et C telles que, pour tout couple (t,λ) de réels positifs, pour tout $p\in[1,+\infty]$ et pour tout $a\in L^p$, on aura l'implication :*

$$\mathrm{Supp}\ \widehat{a}\subset\lambda\mathcal{C}\Rightarrow\|e^{t\Delta}a\|_{L^p}\leq Ce^{-ct\lambda^2}\|a\|_{L^p}.$$

Nous utilisons le lemme de Bernstein qui précise le coût d'une différentiation d'une distribution suivant sa localisation en fréquence dans une boule $B(0, \lambda r_1)$ ou dans une couronne $\mathcal{C}(0, \lambda r_1,\, \lambda r_2)$. De façon plus précise, on a

Lemme 3. (BERNSTEIN) *Soit (r_1, r_2) un couple de réels strictement positifs tels que $r_1 < r_2$. Il existe une constante C telle que, pour tout entier k, pour tout couple (a, b) tel que $1 \leq a \leq b$ et pour toute fonction $u \in L^a(\mathbb{R}^d)$, on ait*

$$\begin{aligned} \operatorname{supp} \widehat{u} \in B(0, \lambda\, r_1) \quad &\Rightarrow \quad \sup_{|\alpha|=k} \|\partial^\alpha u\|_{L^b} \leq C^k \, \lambda^{k+d(\frac{1}{a}-\frac{1}{b})} \|u\|_{L^a}, \\ \operatorname{supp} \widehat{u} \in \mathcal{C}(0, \lambda r_1, \lambda r_2) \quad &\Rightarrow \quad C^{-k} \lambda^k \|u\|_{L^a} \leq \sup_{|\alpha|=k} \|\partial^\alpha u\|_{L^a} \leq C^k \lambda^k \|u\|_{L^a}. \end{aligned}$$

Nous verrons un peu plus loin, dans l'élaboration des démonstrations des résultats énoncés, que la représentation intégrale utilisant le semi-groupe de la chaleur introduit dans sa partie de Duhamel un terme de convolution retardée. Donc il n'est pas inutile de rappeler les inégalités de convolution correspondantes. En fait, elles prennent la même forme qu'une convolution habituelle.

Lemme 4. (YOUNG) *Soient f et g deux fonctions définies sur un intervalle $I = [0, T)$, avec $T > 0$. On suppose que $f \in L^a(I)$ et $g \in L^b(I)$ avec :*

$$1 \leq a,\, b \leq +\infty \quad \textit{et} \quad \frac{1}{c} \stackrel{\textit{déf}}{=} \frac{1}{a} + \frac{1}{b} - 1 \geq 0.$$

Alors la fonction définie par :

$$h(t) = \int_0^t f(t-\tau) g(\tau) d\tau,$$

appartient à $L^c(I)$ et satisfait l'estimation

$$\|h\|_{L^c(I)} \leq \|f\|_{L^a(I)} \|g\|_{L^b(I)}.$$

Le dernier lemme qu'on va démontrer dans cette partie introductive est le suivant :

Lemme 5. *Soient $p \in [1, +\infty]$ et v un champ de vecteurs appartenant à $L^1_{loc}(\mathbb{R}_+; \mathrm{Lip}(\mathbb{R}^d))$ et à divergence nulle. On se donne deux fonctions $F,\, G \in L^1_{loc}(\mathbb{R}_+;\, L^p)$ et $a^0 \in L^p$. Alors, pour toute solution a du problème (TD_ν) et appartenant à $C(\mathbb{R}_+\ ;\, L^p)$, on a :*

$$\forall t \in \mathbb{R}_+, \quad \|a(t)\|_{L^p} \leq \|a^0\|_{L^p} + \int_0^t \big(\|F(\tau)\|_{L^p} + \nu \|G(\tau)\|_{L^p}\big) d\tau.$$

Démonstration : Commençons par le cas $p \in [2, +\infty]$. Si p est fini, alors en multipliant par $a|a|^{p-2}$ l'équation régissant a et par des intégrations par parties, utilisant la condition de divergence nulle, on trouve l'estimation du lemme. Pour à $p = +\infty$, on applique tout simplement le principe du maximum avec l'opérateur parabolique $\partial_t + v \cdot \nabla - \nu \Delta$ et l'on trouve le résultat souhaité. Dans le cas $p \in [1, 2[$, la méthode précédente ne s'applique pas car les intégrations par parties dans le terme correspondant au laplacien ne seraient pas justifiées. Pour surmonter cette difficulté, on utilise un argument de dualité. Sans réduire la généralité de la Démonstration, nous nous plaçons dans le cas $p = 1$. Soit T un temps positif. Pour ϕ fonction de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ à et pour le problème rétrograde suivant on a :

$$\begin{cases} \partial_t \psi_n + v_n \cdot \nabla \psi_n + \nu \Delta \psi_n = 0, \\ \psi_{n|t=T} = \phi. \end{cases}$$

Le champ de vecteurs v_n qui figure dans le terme de convection est une régularisation par convolution du champ v dans les deux variables d'espace et de temps. Comme conséquence, la suite de fonctions $v_n \in C_b^\infty([0,T] \times \mathbb{R}^d)$ et les bornes correspondantes dépendent de n. Ces hypothèses sur la vitesse v_n nous permettent d'assurer l'existence et l'unicité d'une solution qui soit C_b^∞ dans les deux variables t et x (voir par exemple [1]). De plus, comme ϕ est nulle en dehors d'un compact, alors le principe du maximum relatif à des opérateurs paraboliques nous assure dans ce cas une décroissance rapide de ψ_n. En particulier, puisque le support de ϕ est contenu dans une boule de rayon R, alors il existe une constante absolue C telle que

$$
\begin{aligned}
|\psi_n(t,x)| &\le \|\phi\|_{L^\infty} e^{Ct+\nu^{-1}\left(C_0(t)+R-|x|\right)},\\
|\nabla\psi_n(t,x)| &\le \|\nabla\phi\|_{L^\infty} e^{Ct+\nu^{-1}\left(C_1(t)+R-|x|\right)},
\end{aligned}
\tag{3}
$$

où l'on a posé

$$
C_0(t) = \int_0^t \|v(\tau)\|_{L^\infty} d\tau \quad \text{et} \quad C_1(t) = \int_0^t \big(\|v(\tau)\|_{L^\infty} + \|\nabla v(\tau)\|_{L^\infty}\big) d\tau.
$$

Remarquons que dans les fontions $C_i(t)$, il n'y a aucune trace de l'indice n dans le terme de droite. Ceci s'explique par le fait que la norme du champ régularisé v_n dans $\mathrm{Lip}(\mathbb{R}^d)$ est toujours inférieure à celle de v.

Nous soulignons au passage que nous avons démontré dans [9] des résultats précis sur la décroissance de ψ_n lorsque le champ de vitesse v_n est supposé uniquement dans $L^1_{loc}(\mathbb{R}_+; C_{LL})$, où C_{LL} est l'espace des fonctions logarithmiquement lipschitziennes, qui contient C^1_*.

En appliquant à nouveau le principe du maximum à l'équation gouvernant la fonction ψ_n, on trouve pour tout $t \in [0,T]$:

$$
\|\psi_n(t)\|_{L^\infty} \le \|\phi\|_{L^\infty}.
\tag{4}
$$

Soit $f = F + \nu G$. Comme les fonctions ψ_n sont suffisamment régulières en temps et en espace, alors en par des intégrations par parties, utilisant la divergence nulle de la vitesse, on trouve :

$$
\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^d} \phi a(T) dx &= \int_{\mathbb{R}^d} \psi_n(0) a(0) dx + \int_0^T \int_{\mathbb{R}^d} f(t,x)\psi_n(t,x) dx dt\\
&+ \int_0^T \int_{\mathbb{R}^d} a(t,x)(v - v_n)\cdot\nabla\psi_n(t,x) dx dt.
\end{aligned}
$$

Or, d'après (3),

$$
\Big| \int_0^T \int_{\mathbb{R}^d} a(t,x)(v_n - v)\cdot\nabla\psi_n(t,x) dx dt \Big| \le C_\nu(T) \|\nabla\phi\|_{L^\infty} \|v_n - v\|_{L^1_T L^\infty} \|a\|_{L^\infty_T L^1}.
$$

Ainsi, en se utilisant l'inégalité (4) et par passage à la limite quand n tend vers l'infini, on aboutit à :

$$
\Big| \int_{\mathbb{R}^d} \phi a(T) dx \Big| \le \|\phi\|_{L^\infty} \Big(\|a^0\|_{L^1} + \int_0^T \|f(t)\|_{L^1} dt \Big).
\tag{5}
$$

Admettons que cette estimation puisse s'étendre à n'importe quelle fonction $\phi \in L^\infty$. Alors, par un argument de dualité on peut déduire :

$$
\|a(T)\|_{L^1} \le \|a^0\|_{L^1} + \int_0^T \|f(t)\|_{L^1} dt.
$$

C'est ce qu'il faut trouver. Vérifions maintenant l'assertion de l'extension de (5) à des fonctions test bornées. Pour ce faire, on prend une fonction $\phi \in L^\infty$ et une approximation de l'identité ρ_n. On se donne un domaine borné Ω de $\mathbb{R}^d$ et l'on pose

$$\phi_n \stackrel{déf}{=} \phi \mathbf{1}_\Omega \star \rho_n.$$

Cette suite de fonctions est dans $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$. Par suite, on peut les prendre comme fonctions test dans (5). D'une autre part, nous avons d'après l'inégalité de convolution,

$$\|\phi_n\|_{L^\infty} \leq \|\phi\|_{L^\infty}. \tag{6}$$

Ainsi en reportant cette estimation dans (5), il vient :

$$\Big| \int_{\mathbb{R}^d} \phi_n a(T) dx \Big| \leq \|\phi\|_{L^\infty} \Big(\|a^0\|_{L^1} + \int_0^T \|f(t)\|_{L^1} dt \Big).$$

Nous voulons passer à la limite dans le membre de gauche de l'estimation ci-dessus. Pour cela, nous appliquons l'intention d'appliquer le théorème de convergence dominée. La domination est triviale, d'après (6). Il reste à vérifier la convergence presque partout d'une sous-suite de ϕ_n. Comme la suite ϕ_n converge dans L^1 vers $\phi \mathbf{1}_\Omega$, alors on déduit systématiquement la convergence presque partout. Donc, il s'ensuit que

$$\Big| \int_{\Omega} \phi a(T) dx \Big| \leq \|\phi\|_{L^\infty} \Big(\|a^0\|_{L^1} + \int_0^T \|f(t)\|_{L^1} dt \Big).$$

Il suffit à ce stade d'un passage à la limite quand Ω croît vers $\mathbb{R}^d$. L'outil qu'on utilise à cette fin est le théorème de convergence dominée. ■

2. Démonstration de l'effet régularisant

Cette section est réservée à la démonstration de la Proposition 3 effectuée en deux temps : en premier lieu nous démontrons l'effet régularisant sur un petit intervalle de temps ne dépendant pas de la donnée initiale mais dépendant uniquement du champ de vecteurs v. Ensuite, nous procédons à un découpage en temps permettant ainsi d'étendre les estimations à n'importe quel temps positif arbitrairement choisi.

2.1. **Estimation Locale.** Nous commençons par appliquer l'opérateur de découpage en fréquences à l'équation (TD_ν). Alors, si $a_q = \Delta_q a$, nous obtenons

$$\begin{aligned} \partial_t a_q + S_{q-1} v \cdot \nabla a_q - \nu \Delta a_q &= -[\Delta_q,\, v \cdot \nabla] a + (S_{q-1} v - v) \cdot \nabla a_q, \\ &\stackrel{déf}{=} f_q. \end{aligned} \tag{7}$$

Une première remarque porte sur le spectre fréquenciel de la fonction f_q localisé dans une couronne de taille 2^q, pour tout $q \in \mathbb{N}$. Cette information est utile lors de l'application du Lemme 2. En fait, nous utilisons simplement un spectre contenu dans une boule de taille 2^q.

Pour éliminer le terme de convection $S_{q-1} v \cdot \nabla a_q$ du premier membre de l'équation (7) nous considérons le changement de variables lagrangien donné par le flot ψ_q du champ de vecteurs régularisé $S_{q-1} v$. En revanche, nous aurons affaire à une équation de la chaleur associée à une métrique variable. Mais une particularité de cette équation, qui est un élément fondateur de la démonstration, est que, sur des petits intervalles de temps, la métrique est proche de l'identité . Pour mettre en évidence de tels faits, nous donnons l'équation d'évolution satisfaite par la fonction $\bar{a}_q(t, x) = a_q(t,\, \psi_q(t,\, x))$ et quelques estimations utiles dans la suite.

Tout d'abord, nous allons contrôler la fonction f_q dans l'espace de Lebesgue L^p. Pour ce faire, nous utilisons le lemme 1 avec $s = 0$, pour la majoration du premier terme de f_q alors que pour le second terme nous nous utilisons le lemme 3 de Bernstein qui donne :

$$\begin{aligned}\|(S_q v - v)\cdot\nabla a_q\|_{L^\infty} &\leq C2^q\|a_q\|_{L^\infty}\sum_{j\geq q}\|\Delta_j v\|_{L^\infty}\\ &\leq C\|\nabla v\|_{L^\infty}\|a_q\|_{L^\infty}.\end{aligned}$$

Ainsi, nous trouvons une constante C qui ne dépend que de la dimension et telle que pour tout entier $q \geq 1$,

$$\big\|f_q(t)\big\|_{L^p} \leq C\big\|\nabla v(t)\big\|_{L^\infty}\big\|a(t)\big\|_{L^p}.$$

Or le Lemme 5 montre que la norme L^p de la fonction $a(t)$ est majorée par celle de la donnée initiale. Nous en déduisons :

$$\big\|f_q(t)\big\|_{L^p} \leq C\big\|\nabla v(t)\big\|_{L^\infty}\big\|a^0\big\|_{L^p}. \tag{8}$$

Posons

$$\bar{a}_q(t,x) = a_q(t,\,\psi_q(t,\,x)) \quad \text{et} \quad \bar{f}_q(t,x) = f_q(t,\psi_q(t,x)). \tag{9}$$

Écrivons $a_q(t,x) = \bar{a}_q(t,\,\psi_q^{-1}(t,x))$ et calculons son laplacien à l'aide de la formule de dérivation de fonctions composées. Alors, en notant la hessienne de $\bar{a}_q$ par $\nabla^2\bar{a}_q$, on trouve

$$\begin{aligned}\Delta a_q(t)\circ\psi_q(t,x) &= \sum_{i=1}^{d}\Big\langle\nabla^2\bar{a}_q(t,x)\cdot(\partial^i\psi_q^{-1})(t,\psi_q(t,x)),(\partial^i\psi_q^{-1})(t,\psi_q(t,x))\Big\rangle\\ &+ \nabla\bar{a}_q(t,x)\cdot(\Delta\psi_q^{-1})(t,\psi_q(t,x)).\end{aligned} \tag{10}$$

Le symbole $\langle\cdot,\cdot\rangle$ désigne le produit scalaire canonique de $\mathbb{R}^d$. Pour le contrôle des dérivées du flot et de son inverse $\psi_q^{-1}(t,x)$, nous disposons des estimations classiques

$$\|\nabla\psi_q^{\mp1}(t)\|_{L^\infty} \leq \exp\int_0^t\|\nabla S_{q-1}v(\tau)\|_{L^\infty}d\tau. \tag{11}$$

Par dérivation de l'équation d'évolution régissant l'inverse du flot par rapport à la variable d'espace, on peut déduire, grâce à (11), que la fonction ψ_q^{-1} satisfait une équation de type

$$(\partial^i\psi_q^{-1})(t,\psi_q(t,x)) = e_i + g_q^i(t,x), \tag{12}$$

avec e_i le i^{eme} vecteur canonique de $\mathbb{R}^d$. De plus, la fonction g_q^i est majorée comme suitindispensable :

$$\|g_q^i(t)\|_{L^\infty} \leq \exp\Big(\int_0^t\|\nabla S_{q-1}v(\tau)d\tau\Big)\int_0^t\|\nabla S_{q-1}v(\tau)\|_{L^\infty}d\tau.$$

Comme S_{q-1} envoie uniformément en q l'espace L^∞ dans lui même, et alors :

$$\|g_q^i(t)\|_{L^\infty} \leq CV(t)e^{CV(t)} \stackrel{déf}{=} g(t). \tag{13}$$

Dans l'estimation des dérivées secondes de $\psi_q^{-1}(t)$, nous dérivons deux fois l'équation d'évolution de ψ_q^{-1} et nous obtenons, par une application du lemme de Gronwall

$$\|\nabla^2\psi_q^{-1}(t)\|_{L^\infty} \leq e^{V_q(t)}\int_0^t\|\nabla^2 S_{q-1}v(\tau)\|_{L^\infty}d\tau, \quad \text{avec} \quad V_q(t) = \int_0^t\|\nabla S_{q-1}v(\tau)\|_{L^\infty}d\tau. \tag{14}$$

Ainsi donc, par le biais de l'inégalité de Bernstein et l'estimation (11), l'inégalité (14) devient

$$\|\nabla^2\psi_q^{\mp 1}(t)\|_{L^\infty} \leq C2^q g(t). \tag{15}$$

D'un autre côté, un simple calcul utilisant les informations (7), (10) et (12) montre que la fonction $\bar{a}_q$ vérifie :

$$\begin{aligned}(\partial_t - \nu\Delta)\bar{a}_q(t,x) &= \nu\sum_{i=1}^{d}\langle\nabla^2\bar{a}_q(t,x)g_q^i, g_q^i(t,x)\rangle + 2\nu\sum_{i=1}^{d}\langle\nabla^2\bar{a}_q(t,x)e_i, g_q^i(t,x)\rangle \\ &+ \nu\nabla\bar{a}_q(t,x)\cdot(\Delta\psi_q^{-1})(t,\psi_q(t,x)) + \bar{f}_q(t,x) \overset{déf}{=} \mathcal{R}_q(t,x).\end{aligned} \tag{16}$$

Comme la fonction composée $\bar{a}_q$ n'est pas nécessairement localisée en fréquence, alors nous ne pouvons pas appliquer immédiatement le Lemme 2. Donc nous tronquons l'équation (16) via l'opérateur Δ_j, avec $j \in \mathbb{N}$. Ainsi la formule de Duhamel appliquée à la fonction $\Delta_j\bar{a}_q$ vérifie

$$\Delta_j\bar{a}_q(t,x) = e^{\nu t\Delta}\Delta_j a_q(0) + \int_0^t e^{\nu(t-\tau)\Delta}\Delta_j\mathcal{R}_q(\tau,x)d\tau. \tag{17}$$

Le support de $\widehat{f_q}$ est localisé dans une boule de taille 2^q. Grâce au lemme de Bernstein et la préservation de la mesure par le flot, il vient :

$$\begin{aligned}\|\Delta_j\bar{f}_q(t)\|_{L^p} &\leq C2^{-j}\|\nabla(f_q\circ\psi_q(t))\|_{L^p}, \\ &\leq C2^{q-j}\|\nabla\psi_q(t)\|_{L^\infty}\|f_q(t)\|_{L^p}.\end{aligned}$$

Avec les inégalités (8) et (11) on a :

$$\begin{aligned}\|\Delta_j\bar{f}_q(t)\|_{L^p} &\leq C2^{q-j}e^{V_q(t)}\|a^0\|_{L^p}\|\nabla v(t)\|_{L^\infty} \\ &\leq C2^{q-j}e^{CV(t)}\|a^0\|_{L^p}\|\nabla v(t)\|_{L^\infty}.\end{aligned}$$

En conséquence, nous déduisons, à l'aide du Lemme 2 et compte tenu des inégalités (13) et (15) :

$$\begin{aligned}\|\Delta_j\bar{a}_q(t)\|_{L^p} \leq Ce^{-c\nu t2^{2j}}\|\Delta_j a_q(0)\|_{L^p} &+ C\nu\big(g(t)+g^2(t)\big)\int_0^t e^{-c\nu(t-\tau)2^{2j}}\|\nabla^2\bar{a}_q(\tau)\|_{L^p}d\tau \\ &+ C\nu 2^q g(t)\int_0^t e^{-c\nu(t-\tau)2^{2j}}\|\nabla\bar{a}_q(\tau)\|_{L^p}d\tau \\ &+ C2^{q-j}e^{CV(t)}\|a^0\|_{L^p}\int_0^t e^{-c\nu(t-\tau)2^{2j}}\|\nabla v(\tau)\|_{L^\infty}d\tau.\end{aligned} \tag{18}$$

Prenons la norme L^r en temps dans les deux membres de l'inégalité (18). Alors par l'inégalité de Young (lemme 4) et la croisssance de g, il vient :

$$\begin{aligned}\|\Delta_j\bar{a}_q(t)\|_{L^r([0,t];\,L^p)} \leq C(\nu 2^{2j})^{\frac{-1}{r}}\|\Delta_j a_q(0)\|_{L^p} &+ C\big(g(t)+g^2(t)\big)2^{-2j}\|\nabla^2\bar{a}_q\|_{L^r([0,t];\,L^p)} \\ &+ Cg(t)2^q2^{-2j}\|\nabla\bar{a}_q\|_{L^r([0,t];\,L^p)} \\ &+ Cg(t)\|a^0\|_{L^p}2^{q-j}(\nu 2^{2j})^{\frac{-1}{r}}.\end{aligned} \tag{19}$$

A2vec (11), (15) et le lemme de Bernstein et grâce à la conservation de la mesure par le flot, on aboutit aux estimations :

$$\|\nabla\bar{a}_q(t)\|_{L^p} \leq C2^q e^{CV(t)}\|a_q(t)\|_{L^p}, \tag{20}$$

$$\|\nabla^2\bar{a}_q(t)\|_{L^p} \leq C2^{2q}e^{CV(t)}\|a_q(t)\|_{L^p}. \tag{21}$$

Soit N_0 un entier que l'on choisira à la fin. Alors en reportant (20) et (21) dans (19) et en sommant sur les entiers $j \geq q - N_0$, on trouve

$$(22) \quad (\nu 2^{2q})^{\frac{1}{r}} \sum_{j \geq q-N_0} \|\Delta_j \bar{a}_q\|_{L^r([0,t];\,L^p)} \leq C\|a^0\|_{L^p} + C2^{2N_0} h(t)(\nu 2^{2q})^{\frac{1}{r}} \|a_q\|_{L^r([0,t];\,L^p)} + C2^{N_0(1+\frac{2}{r})}\|a^0\|_{L^p} g(t),$$

où l'on a posé $h(t) = g(t) + g(t)^2$. Remarquons qu'il n'y a pas de cœfficient en N_0 dans le premier terme du second membre de (22) car $\Delta_j a_q(0) = 0$, si $|j - q| \geq 2$. Il faut noter aussi que le calcul que nous venons de développer est valable pour les entiers $q \geq N_0$, sinon, l'estimation (22) serait fausse.

Concernant le cas des basses fréquences $j \leq q - N_0$, on utilise du lemme suivant, démontré par M. Vishik dans [14].

Lemme 6. *Soit d un entier supérieur ou égal à 2. Il existe une constante positive C ne dépendant que de d telle que, pour toute fonction a de la classe de Schwartz et pour tout difféomorphisme ψ de $\mathbb{R}^d$ préservant la mesure de Lebesgue, on aura pour tout $p \in [1, +\infty]$ et pour tous les $j, q \geq -1$,*

$$\|\Delta_j(\Delta_q a \circ \psi(\cdot))\|_{L^p} \leq C2^{-|j-q|} \|\nabla \psi^{\eta(j,q)}\|_{L^\infty} \|\Delta_q a\|_{L^p},$$

avec

$$\eta(j, q) = sign(j - q).$$

Comme le flot est une transformation qui préserve la mesure de Lebesgue, alors on peut écrire via le Lemme 6 et les inégalités (22) et (11) :

$$\begin{aligned}
(\nu 2^{2q})^{\frac{1}{r}} \|a_q\|_{L^r([0,t];\,L^p)} &= (\nu 2^{2q})^{\frac{1}{r}} \|\bar{a}_q\|_{L^r([0,t];\,L^p)} \\
&\leq (\nu 2^{2q})^{\frac{1}{r}} \sum_{j \geq q-N_0} \|\Delta_j \bar{a}_q\|_{L^r([0,t];\,L^p)} + (\nu 2^{2q})^{\frac{1}{r}} \sum_{j \leq q-N_0} \|\Delta_j \bar{a}_q\|_{L^r([0,t];\,L^p)} \\
&\leq C2^{2N_0} h(t)(\nu 2^{2q})^{\frac{1}{r}} \|a_q\|_{L^r([0,t];\,L^p)} + C2^{3N_0} \|a^0\|_{L^p} g(t) \\
&\quad + C\|a^0\|_{L^p} + C(\nu 2^{2q})^{\frac{1}{r}} \|a_q\|_{L^r([0,t];\,L^p)} 2^{-N_0} e^{CV(t)}. \qquad (23)
\end{aligned}$$

Sous cette forme on voit clairement le rôle de l'entier N_0 : dans la zone des hautes fréquences on profite de la petitesse (en temps) de la fonction h. Mais dans le spectre des basses fréquences on augmente N_0 de manière à ce que le dernier terme figurant dans (23) soit absorbé par la quantité de gauche. Mais le choix du temps et de N_0 sont fortement liés. Ils sont donnés par les deux conditions suivantes :

$$(24) \qquad C2^{2N_0} h(t) \leq \frac{1}{4} \quad \text{et} \quad C2^{-N_0} e^{CV(t)} \leq \frac{1}{4}.$$

Par suite, si $V(t) \leq 1$, on choisit N_0 pour que $2^{-N_0} \leq \frac{1}{4C} e^{-C}$, puis quitte à diminuer encore $V(t)$, on assure $C2^{2N_0} h(t) \leq 1/4$. Ainsi on montre l'existence d'une constante C_0 dépendant seulement de la dimension d avec

$$(25) \qquad \int_0^t \|\nabla v(\tau)\|_{L^\infty} d\tau \leq C_0$$

alors (24) aura lieu. Auquel cas l'entier N_0 est aussi absolu. Alors pour tout t satisfaisant (25) et pour tout $q \geq N_0$, on a :

$$(26) \qquad (\nu 2^{2q})^{\frac{1}{r}} \|a_q\|_{L^r([0,t];\,L^p)} \leq C\|a^0\|_{L^p}.$$

Pour achever cette première étape, il nous reste à estimer les basses fréquences : grâce à l'estimation $\|a(t)\|_{L^p} \leq \|a^0\|_{L^p}$ et via la continuité uniforme en q de l'opérateur de localisation en fréquence on obtient aisément : $\Delta_q \in \mathcal{L}(L^p)$, que

$$(\nu 2^q)^{\frac{1}{r}} \|\Delta_q a\|_{L^r([0,\,t];\,L^p)} \leq C(\nu t)^{\frac{1}{r}} \|a^0\|_{L^p}. \tag{27}$$

Ainsi, nous parvenons à établir, localement en temps, le résultat de la proposition 3.

2.2. **Globalisation.** L'extension du résultat local obtenu pour tout temps positif T n'est pas difficile. Nous parvenons à propager, de proche en proche, l'effet régularisant car la condition locale (25) ne tient pas compte des estimées de la solution a. Elle est uniquememt liée au gradient du champ de vecteurs v. Le point de départ de la preuve est de partager l'intervalle $[0,\, T]$ en une subdivision $(T_i)_{i=0}^N$ comme ci-dessous :

$$T_0 = 0 \leq T_1 \leq ... \leq T_N = T \quad \text{et} \quad \int_{T_i}^{T_{i+1}} \|\nabla v(\tau)\|_{L^\infty} d\tau \simeq C_0, \forall\, i \in [\![0, N-1]\!].$$

Dans chacun de ces sous intervalles $[T_i, T_{i+1}]$, on reproduit exactement la même démarche locale sauf qu'au lieu d'utiliser le flot ψ_q fixant l'espace à l'instant $t = 0$, nous devons réinitialiser le flot à l'instant T_i. On obtient alors pour tout entier $q \geq N_0$ (N_0 est le même entier qui apparaît dans la preuve locale)

$$\begin{aligned} (\nu 2^{2q})^{\frac{1}{r}} \|a_q\|_{L^r([T_i,\, T_{i+1}];\, L^p)} &\leq C\|a(T_i)\|_{L^p} \\ &\leq C\|a^0\|_{L^p}. \end{aligned} \tag{28}$$

Sachant que $N \simeq 1 + \displaystyle\int_0^T \|\nabla v(\tau)\|_{L^\infty} d\tau$, alors en sommant les inégalités de 0 jusqu'au $N-1$, nous obtenons grâce à l'inégalité triangulaire que pour tout entier $q \geq N_0$ et pour tout $r \in [1, +\infty[$

$$\begin{aligned} \nu 2^{2q} \|a_q\|^r_{L^r([0,\,T];\,L^p)} &= \nu 2^{2q} \sum_{i=0}^{N-1} \|a_q\|^r_{L^r([T_i,\,T_{i+1}];\,L^p)} \\ &\leq C\|a^0\|^r_{L^p}\Big(1 + \int_0^T \|\nabla v(\tau)\|_{L^\infty} d\tau\Big). \end{aligned} \tag{29}$$

Ainsi l'estimation de la proposition 3 découle facilement des relations (27) et (29).

3. Propagation dans les espaces de Hölder

Dans cette partie on démontre le théorème 2. On suit dans ses grands traits la démonstration de la proposition 3. Nous appliquons l'opérateur de filtrage en fréquences et par un changement de variables dans la nouvelle équation on masque le terme de convection. Ce qui ramène le problème initial à un problème parabolique à coefficients variables. L'information cruciale à la base de notre méthode est que la nouvelle métrique est proche de l'identité. Ce fait assure un résultat de propagation local qui peut s'itérer. Soulignons que le résultat local exige une estimation fine sur le commutateur donnée dans le Lemme 7.

3.1. **Estimation locale.** Dans une première étape, nous établissons des estimations de la solution a dans la $L^\infty(\mathbb{R}_+;\, B^s_p)$. Le contrôle, dans cet espace, est primordial pour établir des estimations $\widetilde{L}^r_t B^s_p$. Le lien apparaît dans le découpage du temps dans le passage d'un intervalle à l'autre. Posons :

$$a_q = \Delta_q a,\;\; F_q = \Delta_q F \quad \text{et} \quad G_q = \Delta_q G,$$

alors on a :

Lemme 7. *Pour tout entier $q \geq 1$, la fonction a_q vérifie*

$$\partial_t a_q + S_{q-1} v \cdot \nabla a_q - \nu \Delta a_q = F_q + \nu\, G_q + R_q(v,\, a) \tag{30}$$

telle que, d'une part, la transformée de Fourier de R_q est supportée dans une couronne de taille 2^q et d'autre part nous avons

$$\|R_q(v,\, a)\|_{L^p} \leq C\|\nabla v\|_{L^\infty} \sum_{q' \geq -1} 2^{-|q'-q|} \|\Delta_{q'} a\|_{L^p}. \tag{31}$$

De plus, pour tout $q \geq -1$

$$\|[\Delta_q,\, v\cdot\nabla]a\|_{L^p} \leq C\|\nabla v\|_{L^\infty} \sum_{q' \geq -1} 2^{-|q'-q|} \|\Delta_{q'} a\|_{L^p}. \tag{32}$$

Nous admettons pour l'instant ce lemme qui sera démontré à la fin de cette section. L'idée consiste à suivre la fonction a_q le long des lignes de courant correspondant au champ de vecteurs $S_{q-1}v$ et à décrire l'équation correspondante. Désignons comme dans la section précédente le flot associé au champ de vecteurs $S_{q-1}v$ par ψ_q et soit :

$$\begin{aligned} \bar{a}_q(t) = a_q\big(t, \psi_q(t)\big) \quad &, \quad \bar{F}_q(t) = F_q\big(t, \psi_q(t)\big), \\ \bar{G}_q(t) = G_q\big(t, \psi_q(t)\big) \quad &\text{et} \quad \bar{R}_q(v, a) = R_q(v,\, a) \circ \psi_q(t). \end{aligned}$$

Alors en imitant la démonstration du (16), on trouve :

$$\begin{aligned} (\partial_t - \nu\Delta)\bar{a}_q(t) &= \nu \sum_{i=1,2} \Big\langle \nabla^2 \bar{a}_q(t) g^i_q(t),\, g^i_q(t) \Big\rangle + 2\nu \sum_{i=1,2} \Big\langle \nabla^2 \bar{a}_q(t) e_i,\, g^i_q(t) \Big\rangle \\ &+ \nu \big\langle \nabla \bar{a}_q(t), (\Delta \psi_q^{-1})(t, \psi_q(t)) \big\rangle + \bar{F}_q(t) + \nu\, \bar{G}_q(t) + \bar{R}_q(v,a)(t). \end{aligned} \tag{33}$$

Les fonctions g^i_q sont celles déjà introduites dans (12). Ainsi en tronquant l'équation régissant $\bar{a}_q$ sur des couronnes de taille 2^j et avec les mêmes outils, le Lemme 2 et les estimations (11), (12), (13) et (15), on obtient pour tout $j \geq 0$:

$$\begin{aligned} \|\Delta_j \bar{a}_q(t)\|_{L^p} &\leq Ce^{-c\nu t 2^{2j}} \|\Delta_j a_q(0)\|_{L^p} + C\nu(g(t) + g^2(t)) \int_0^t e^{-c\nu(t-\tau)2^{2j}} \|\nabla^2 \bar{a}_q(\tau)\|_{L^p} d\tau \\ &+ C\nu 2^q g(t) \int_0^t e^{-c\nu(t-\tau)2^{2j}} \|\nabla \bar{a}_q(\tau)\|_{L^p} d\tau + C\nu \int_0^t e^{-c\nu(t-\tau)2^{2j}} \|\bar{G}_q(\tau)\|_{L^p} d\tau \\ &+ C \int_0^t e^{-c\nu(t-\tau)2^{2j}} \Big(\|\Delta_j \bar{F}_q(\tau)\|_{L^p} + \|\Delta_j \bar{R}_q(v,a)(\tau)\|_{L^p} \Big) d\tau. \end{aligned} \tag{34}$$

Pour le contrôle de la dernière intégrale de (34), le lemme 6 paraît un outil adapté. Il donne successivement, en vertu de l'inégalité (11) et du Lemme 7,

$$\|\Delta_j \bar{F}_q(t)\|_{L^p} \leq Ce^{CV(t)} 2^{-|q-j|} \|F_q(t)\|_{L^p} \quad \text{et} \tag{35}$$

$$\|\Delta_j \bar{R}_q(v,\, a)(t)\|_{L^p} \leq C2^{-|q-j|}e^{CV(t)}\|\nabla v(t)\|_{L^\infty}\sum_{q'} 2^{-|q'-q|}\|\Delta_{q'}a(t)\|_{L^p}. \tag{36}$$

L'estimation (36) est valable pour tout $j \geq -1$ et pour tout $q \geq 1$. Ainsi en utilisant (20), (21), (35) et (36), alors l'estimation (34) devient :

$$\begin{aligned} \|\Delta_j \bar{a}_q(t)\|_{L^p} &\leq Ce^{-c\nu t2^{2j}}\|\Delta_j a_q(0)\|_{L^p} + C\nu 2^{2q}h(t)\int_0^t e^{-c\nu(t-\tau)2^{2j}}\|a_q(\tau)\|_{L^p}d\tau \\ &+ Ce^{CV(t)}2^{q-j}\sum_{q'} 2^{-|q'-q|}\int_0^t \|\nabla v(\tau)\|_{L^\infty}\|\Delta_{q'}a(\tau)\|_{L^p}d\tau \\ &+ Ce^{CV(t)}2^{q-j}\int_0^t e^{-c\nu(t-\tau)2^{2j}}\|F_q(\tau)\|_{L^p}d\tau + C\nu\int_0^t e^{-c\nu(t-\tau)2^{2j}}\|G_q(\tau)\|_{L^p}d\tau, \end{aligned} \tag{37}$$

avec $h(t) = C\big(V(t) + V^2(t)\big)e^{CV(t)}$. Soient N_0 un entier positif qui sera déterminé à la fin de ce paragraphe et q un entier supérieur à N_0. Alors en prenant la norme L^r des deux côtés et en sommant sur les $j \geq q - N_0$, avec les inégalités de Young et de Hölder, on trouve

$$\begin{aligned} \sum_{j\geq q-N_0}\|\Delta_j \bar{a}_q(t)\|_{L^r_tL^p} &\leq C(\nu 2^{2q})^{\frac{-1}{r}}\|a_q(0)\|_{L^p} + Ch(t)2^{N_0}\|a_q\|_{L^r_tL^p} \\ &+ Ce^{CV(t)}2^{N_0}t^{\frac{1}{r}}\|\nabla v\|_{L^{\bar{r}}_tL^\infty}\sum_{q'} 2^{-|q'-q|}\|\Delta_{q'}a\|_{L^r_tL^p} \\ &+ Ce^{CV(t)}2^{N_0(1+\frac{2}{r})}(\nu 2^{2q})^{\frac{-1}{r}}\|F_q\|_{L^1_tL^p} + C2^{2N_0}2^{-2q}\|G_q\|_{L^r_tL^p}, \end{aligned} \tag{38}$$

où l'on désigne par $\bar{r}$ l'exposant conjugué de r. Nous signalons que l'estimation figurant dans (38) se déduit, à partir de (37), via l'inégalité suivante :

$$\Big\|\int_0^t f(\tau)g(\tau)d\tau\Big\|_{L^r_T} \leq t^{\frac{1}{r}}\|f\|_{L^{\bar{r}}_T}\|g\|_{L^r_T}.$$

Pour le traitement des basses fréquences en j, le Lemme 6 implique :

$$\sum_{j\leq q-N_0}\|\Delta_j \bar{a}_q(t)\|_{L^p} \leq Ce^{CV(t)}2^{-N_0}\|a_q(t)\|_{L^p}. \tag{39}$$

Donc, en utilisant la conservation de la mesure par le flot et en combinant (38) et (39), pour tout $q \geq N_0$ il vient :

$$\begin{aligned} \nu^{\frac{1}{r}}2^{q(s+\frac{2}{r})}\|a_q\|_{L^r_tL^p} &\leq \nu^{\frac{1}{r}}2^{q(s+\frac{2}{r})}\Big(\sum_{j\geq q-N_0}\|\Delta_j\bar{a}_q\|_{L^r_tL^p} + \sum_{j<q-N_0}\|\Delta_j\bar{a}_q\|_{L^r_tL^p}\Big) \\ &\leq C2^{qs}\|a_q(0)\|_{L^p} + C\big(h(t)2^{N_0} + e^{CV(t)}2^{-N_0}\big)\nu^{\frac{1}{r}}2^{q(s+\frac{2}{r})}\|a_q\|_{L^r_tL^p} \\ &+ Ce^{CV(t)}2^{3N_0}2^{qs}\|F_q\|_{L^1_tL^p} + C2^{2N_0}\nu^{\frac{1}{r}}2^{q(s+\frac{2}{r}-2)}\|G_q\|_{L^r_tL^p} \\ &+ Ce^{CV(t)}2^{N_0}t^{\frac{1}{r}}\|\nabla v\|_{L^{\bar{r}}_tL^\infty}\nu^{\frac{1}{r}}2^{q(s+\frac{2}{r})}\sum_{q'} 2^{-|q'-q|}\|\Delta_{q'}a\|_{L^r_tL^p}. \end{aligned} \tag{40}$$

Concernant les basses fréquences, i.e., correspondant aux entiers $q \leq N_0$, nous allons procéder différemment. Pour commencer, on note que a_q est solution de l'équation :

$$\Big(\partial_t + v\cdot\nabla - \nu\Delta\Big)a_q = F_q + \nu G_q - [\Delta_q,\, v\cdot\nabla]a. \tag{41}$$

Alors, il suffit d'utiliser les Lemmes 5 et 7 pour déduire, pour tout $q \geq -1$,

$$\begin{aligned}\|\Delta_q a(t)\|_{L^p} &\leq \|\Delta_q a(0)\|_{L^p} + \int_0^t \Big(\|F_q(\tau)\|_{L^p} + \nu\|G_q(\tau)\|_{L^p}\Big) d\tau \\ &+ \int_0^t \|\nabla v(\tau)\|_{L^\infty} \sum_{q'} 2^{-|q'-q|} \|\Delta_{q'} a(\tau)\|_{L^p} d\tau. \end{aligned} \tag{42}$$

Maintenant, on prend la norme L^r des deux côtés dans l'inégalité (42) tout en se servant de l'inégalité de Hölder. On trouve pour tout $q \leq N_0$

$$\begin{aligned}\nu^{\frac{1}{r}} 2^{q(s+\frac{2}{r})} \|a_q\|_{L^r_t L^p} &\leq (\nu t)^{\frac{1}{r}} 2^{\frac{2N_0}{r}} 2^{qs} \|\Delta_q a(0)\|_{L^p} \\ &+ (\nu t)^{\frac{1}{r}} 2^{\frac{2N_0}{r}} 2^{qs} \|F_q\|_{L^1_t L^p} + 2^{2N_0}(t\nu)\nu^{\frac{1}{r}} 2^{q(s+\frac{2}{r}-2)} \|G_q\|_{L^r_t L^p} \\ &+ t^{\frac{1}{r}} \|\nabla v\|_{L^{\bar{r}}_t L^\infty} \nu^{\frac{1}{r}} 2^{q(s+\frac{2}{r})} \sum_{q'} 2^{-|q'-q|} \|\Delta_{q'} a\|_{L^r_t L^p}. \end{aligned} \tag{43}$$

Posons

$$U_q(t) = \nu^{\frac{1}{r}} 2^{q(s+\frac{2}{r})} \|a_q\|_{L^r_t L^p} \quad \text{et} \quad V_r(t) = \|\nabla v\|_{L^{\bar{r}}_t L^\infty}.$$

Alors en combinant les inégalités (40) et (43), il vient :

$$\begin{aligned} U_q(t) &\leq C\big(1 + (\nu t)^{\frac{1}{r}}\big) 2^{2N_0} 2^{qs} \Big(\|a_q(0)\|_{L^p} + e^{CV(t)} \|F_q\|_{L^1_t L^p} \Big) \\ &+ C\Big(h(t) 2^{N_0} + e^{CV(t)} 2^{-N_0}\Big) U_q(t) + C 2^{2N_0}(1+\nu t)\nu^{\frac{1}{r}} 2^{q(s+\frac{2}{r}-2)} \|G_q\|_{L^r_t L^p} \\ &+ C e^{CV(t)} 2^{N_0} t^{\frac{1}{r}} V_r(t) \sum_{q'} 2^{-|q'-q|\alpha(r,s)} U_{q'}(t). \end{aligned} \tag{44}$$

où l'on a posé $\alpha(r,s) = \min\big\{1 + s + \frac{2}{r}, 1 - s - \frac{2}{r}\big\}$· L'inégalité de convolution que nous allons utiliser exige que $\alpha(r,s)$ soit strictement positif. C'est la source de la restriction sur r mentionnée dans le théorème 2. Soit t un réel positif tel

$$h(t) 2^{N_0} \leq \frac{1}{4C} \quad \text{et} \quad e^{CV(t)} 2^{-N_0} \leq \frac{1}{4C}. \tag{45}$$

Cette condition est semblable à (24). Donc, avec les mêmes arguments, elle est satisfaite pour

$$V(t) \leq C_0, \tag{46}$$

avec C_0 une constante universelle. De même N_0 est absolue. Ainsi l'estimation (44) devient :

$$\begin{aligned} U_q(t) &\leq C\big(1 + (\nu t)^{\frac{1}{r}}\big) \Big(2^{qs} \|a_q(0)\|_{L^p} + 2^{qs} \|F_q\|_{L^1_t L^p} \Big) \\ &+ C(1+\nu t)\nu^{\frac{1}{r}} 2^{q(s+\frac{2}{r}-2)} \|G_q\|_{L^r_t L^p} + C t^{\frac{1}{r}} V_r(t) \sum_{q'} 2^{-|q'-q|\alpha(r,s)} U_{q'}(t). \end{aligned} \tag{47}$$

En prenant la borne supérieure sur q des deux côtés comme la somme sur q' est une convolution, alors on obtient :

$$\begin{aligned} (U_q)_{\ell^\infty(\mathbb{Z})} &\leq C(1 + (\nu t)^{\frac{1}{r}}) \Big(\|a^0\|_{B^s_p} + \|F\|_{\widetilde{L}^1_t B^s_p} \Big) + C(1+\nu t)\nu^{\frac{1}{r}} \|G\|_{\widetilde{L}^r_t B_p^{s+\frac{2}{r}-2}} \\ &+ C\alpha(r,s)^{-1} t^{\frac{1}{r}} V_r(t) (U_q)_{\ell^\infty(\mathbb{Z})}. \end{aligned} \tag{48}$$

Si on impose sur le temps t la condition

$$C\alpha(r,s)^{-1}t^{\frac{1}{r}}V_r(t)\le\frac{1}{2}, \tag{49}$$

alors l'estimation (48) devient

$$(U_q)_{\ell^\infty(\mathbb{Z})}\le C(1+(\nu t)^{\frac{1}{r}})\Big(\|a^0\|_{B_p^s}+\|F\|_{\widetilde{L}_t^1B_p^s}\Big)+C(1+\nu t)\nu^{\frac{1}{r}}\|G\|_{\widetilde{L}_t^rB_p^{s+\frac{2}{r}-2}}. \tag{50}$$

En fait, quitte à prendre C_0 petite, on peut déduire, grâce à l'inégalité de Hölder, la condition par (46) à partir de (49). Pour être précis et pour avoir les deux simultanément les deux conditions, nous supposerons que t satisfait,

$$t^{\frac{1}{r}}V_r(t)\le C\alpha(r,s), \tag{51}$$

avec C une petite constante qui dépend uniquement de la dimension d. Dorénavant, c'est cette condition qu'on retient. Avec la norme L^∞ en temps, alors l'estimation par (50) devient :

$$\|a(t)\|_{B_p^s}\le C\|a^0\|_{B_p^s}+C\|F\|_{\widetilde{L}_t^1B_p^s}+C(1+\nu t)\|G\|_{\widetilde{L}_t^rB_p^{s+\frac{2}{r}-2}}, \tag{52}$$

sous réserve que (51) soit satisfaite. Nous donnons une autre estimation ponctuelle en temps : on prend le supremum en q des deux côtés dans (40) tout en l'introduisant à l'intérieur des intégrales. Ensuite on reproduit la même chose pour l'inégalité (42) mais après une mutilplication par 2^{qs}. On aboutit à

$$\|a(t)\|_{B_p^s}\le C\|a^0\|_{B_p^s}+C\|F\|_{\widetilde{L}_t^1B_p^s}+C\nu\int_0^t\|G(\tau)\|_{B_p^{s-2}}d\tau+C\|G\|_{L_t^\infty B_p^{s-2}}. \tag{53}$$

Comme $L_t^1B_p^s$ s'injecte continûment dans $\widetilde{L}_t^1B_p^s$, d'après l'estimation (53) on obtient :

$$\|a(t)\|_{B_p^s}\le C\|a^0\|_{B_p^s}+C\int_0^t\Big(\|F(\tau)\|_{B_p^s}+\nu\|G(\tau)\|_{B_p^{s-2}}\Big)d\tau+C\|G\|_{L_t^\infty B_p^{s-2}}. \tag{54}$$

Il n'est pas difficile d'obtenir des estimations globales en temps car la contrainte sur le temps n'est pas liée à la taille de la donnée initiale mais seulement à la taille lipschitzienne du champ de vecteurs v. En premier lieu, nous traitons l'extension des estimations (54) et (52). A partir de ces résultats, nous pouvons alors espérer une estimation de la solution dans les espaces $\widetilde{L}^r_{loc}(\mathbb{R}_+;B_p^s)$.

3.2. **Globalisation.** On donne un réel positif T et on découpe l'intervalle $[0,T]$ en une subdivision $(T_i)_{i=0}^N$ telle que $T_0=0<T_1<...<T_N=T$, et

$$\frac{1}{r}\big(T_{i+1}-T_i\big)+\frac{1}{\bar{r}}\int_{T_i}^{T_{i+1}}\|\nabla v(\tau)\|_{L^\infty}^{\bar{r}}d\tau\simeq C\alpha(r,s)\overset{\text{déf}}{=}c_2=C_2^{-1}. \tag{55}$$

Remarquons que l'inégalité (49) nous impose normalement la condition :

$$\big(T_{i+1}-T_i\big)^{\frac{1}{r}}\Big(\int_{T_i}^{T_{i+1}}\|\nabla v(\tau)\|_{L^\infty}^{\bar{r}}d\tau\Big)^{\frac{1}{\bar{r}}}\le c_2. \tag{56}$$

Mais cette dernière découle de la première grâce à l'inégalité de convexité suivante : pour tous les réels positifs a et b et pour tout $\theta\in]0,1[$,

$$ab\le\theta a^{\frac{1}{\theta}}+(1-\theta)b^{\frac{1}{1-\theta}}.$$

Nous avons opté pour (55) car elle permet d'expliciter sans peine le nombre N. Pour l'estimer, on somme sur i les égalités (55) et on trouve :

$$N \simeq C_2\Big(\frac{T}{r}+\frac{1}{\bar r}V_{\bar r}^{\bar r}(t)\Big). \tag{57}$$

Cette réduction est valable uniquement pour les réels $r\in]1,+\infty]$. Dans le cas limite correspondant à $r=1$, nous privilégions la condition (56). Elle implique :

$$N = C_2T\|\nabla v\|_{L^\infty_T L^\infty}.$$

Considérons tout d'abord le cas $r=+\infty$ et itérons l'estimation (54). Dans ce cas particulier, on note C_1 est notée C_2 et égale à $C/(1-s^2)$. Nous reproduisons dans l'intervalle $[T_i,\,T_{i+1}]$ la démonstration que nous venons d'exposer et au lieu de travailler avec le flot ψ_q nous devons utiliser le flot qui fixe les points de l'espace à l'instant T_i. Alors, sous la condition (55), nous obtenons une estimation semblable à (54), qui implique l'existence d'une constante C dépendant uniquement de d telle que pour tout réel $t\in[T_i,T_{i+1}]$, on ait :

$$\|a(t)\|_{B^s_p}\le C\Bigg(\|a(T_i)\|_{B^s_p}+\int_{T_i}^t\Big(\|F(\tau)\|_{B^s_p}+\nu\|G(\tau)\|_{B^{s-2}_p}\Big)d\tau+\|G\|_{L^\infty([T_i,\,t];\,B^{s-2}_p)}\Bigg). \tag{58}$$

En posant $\bar a_i=\|a(T_i)\|_{B^s_p}$, nous déduisons de (58) :

$$\begin{cases}\bar a_{i+1}\le C\Bigg(\bar a_i+\displaystyle\int_{T_i}^{T_{i+1}}\Big(\|F(\tau)\|_{B^s_p}+\nu\|G(\tau\|_{B^{s-2}_p}\Big)d\tau+\|G\|_{L^\infty([T_i,\,T_{i+1}];\,B^{s-2}_p)}\Bigg), i=0,..,N-1,\\[2ex] \bar a_0=\|a_0\|_{B^s_p}.\end{cases}$$

Posons $H(\tau)=\|F(\tau)\|_{B^s_p}+\nu\|G(\tau)\|_{B^{s-2}_p}$. Ainsi, par récurrence nous établissons :

$$\bar a_N\le C^N\Big(\bar a_0+\|G\|_{L^\infty([0,T];\,B^{s-2}_p)}\Big)+\sum_{i=0}^{N-1}C^{N-i}\int_{T_i}^{T_{i+1}}H(\tau)d\tau. \tag{59}$$

Nous pouvons déduire à partir de la relation (59) l'existence d'une constante $\bar C$ ne dépendant que de s telle qu'on ait :

$$\sum_{k=0}^{N-1}C^{N-i-1}\int_{T_i}^{T_{i+1}}H(\tau)d\tau\le e^{\bar CV(T)}\int_0^T e^{-\bar CV(\tau)}H(\tau)d\tau. \tag{60}$$

En effet, on décompose l'intégrale du second membre comme une somme d'intégrales admettant pour bornes T_i et T_{i+1} :

$$\begin{aligned}\int_0^T e^{-\bar CV(\tau)}H(\tau)d\tau &= \sum_{i=0}^{N-1}\int_{T_i}^{T_{i+1}}e^{-\bar CV(\tau)}H(\tau)d\tau\\ &\ge \sum_{i=0}^{N-1}e^{-\bar Cc_1(i+1)}\int_{T_i}^{T_{i+1}}H(\tau)d\tau.\end{aligned}$$

Notons que dans l'inégalité ci-dessus, nous avons utilisé le fait que $V(T_i)\simeq c_1 i$. Nous rappelons que $c_1=C_1^{-1}$ est la valeur de c_2 donnée par (55) pour $r=+\infty$. Donc nous aurons pour tout réel $\tau\in[T_i,T_{i+1}]$,

$$e^{-\bar CV(\tau)}\ge e^{-\bar Cc_1(i+1)}.$$

En conséquence, il vient :

$$e^{\bar{C}V(T)}\int_0^T e^{-\bar{C}V(\tau)}H(\tau)d\tau \geq \sum_{i=0}^{N-1} e^{\bar{C}c_1(N-i-1)}\int_{T_i}^{T_{i+1}} H(\tau)d\tau.$$

Par suite, la constante $\bar{C} = \frac{\ln C}{c_1} = C_1 \ln C$ convient dans (60) et l'on trouve, pour tout t positif,

$$\|a(t)\|_{B^s_p} \leq C_1 e^{C_1 V(t)}\Big(\|a^0\|_{B^s_p} + \|G\|_{L^\infty_t B^{s-2}_p)} + \int_0^t e^{-C_1 V(\tau)}H(\tau)d\tau\Big). \tag{61}$$

Ce qui achève la démonstration du premier point (**1**) du Théorème 2.

Si on suppose que F appartient à l'espace $\widetilde{L}^1_{loc}(\mathbb{R}_+;\, B^s_p)$, alors nous obtenons sur chaque intervalle $[T_i,\, T_{i+1}]$ une estimation similaire à (53) qui prend la forme suivante : Pour tout $t \in [T_i, T_{i+1}]$, on a

$$\|a(t)\|_{B^s_p} \leq C\Bigg(\|a(T_i)\|_{B^s_p} + \|F\|_{\widetilde{L^1}([T_i,\,t];\,B^s_p)} + \|G\|_{L^\infty([T_i,\,t],B^{s-2}_p)} + \nu\int_{T_i}^t \|G(\tau)\|_{B^{s-2}_p}d\tau\Bigg). \tag{62}$$

En reproduisant cette démarche de globalisation, nous aboutissons à :

$$\begin{aligned}
\|a(T)\|_{B^s_p} &\leq C_1 e^{C_1 V(T)}\Bigg(\|a^0\|_{B^s_p} + \|G\|_{L^\infty_T B^{s-2}_p} + \|F\|_{\widetilde{L^1_T} B^s_p} + \int_0^T e^{-C_1 V(\tau)}\nu\|G(\tau)\|_{B^{s-2}_p}d\tau\Bigg)\\
&\leq C_1 e^{C_1 V(T)}\Bigg(\|a^0\|_{B^s_p} + (1+\nu T)\|G\|_{L^\infty_T B^{s-2}_p} + \|F\|_{\widetilde{L^1_T} B^s_p}\Bigg). \qquad (63)
\end{aligned}$$

En ce qui concerne les estimations dans l'espace $\widetilde{L^r_t} B^s_p$, dans l'intervalle $[T_i,\, T_{i+1}]$, nous obtenons une estimation analogue à (50). Plus précisément , nous avons pour tout $t \in [T_i,\, T_{i+1}]$:

$$\begin{aligned}
\nu^{\frac{1}{r}}\|a\|_{\widetilde{L^r}([T_i,\,t];\,B^{s+\frac{2}{r}}_p)} &\leq C\big(1+(\nu(t-T_i))^{\frac{1}{r}}\big)\Big(\|a(T_i)\|_{B^s_p} + \|F\|_{\widetilde{L^r}([T_i,\,t];\,B^s_p)}\Big)\\
&+ C\big(1+\nu(t-T_i)\big)\nu^{\frac{1}{r}}\|G\|_{\widetilde{L^r_t} B^{s+\frac{2}{r}-2}_p}. \qquad (64)
\end{aligned}$$

Nous recollons ces estimations sur l'intervalle de temps $[0,\, T]$. Pour cela nous aurons besoin du résultat suivant : on se donne un espace normé E et une partition $(T_i)_0^N$ de l'intervalle $[0,\, T]$. Alors pour toute famille de fonctions $(f_q) \in L^r([0,\, T];\, E)$ nous avons :

$$\sup_q \|f_q\|_{L^r([0,T];\,E)} \leq \sum_{i=0}^{N-1}\sup_q \|f_q\|_{L^r([T_i,\,T_{i+1}];\,E)} \leq N\sup_q \|f_q\|_{L^r([0,T];\,E)}.$$

Il suffit maintenant d'appliquer ce résultat pour déduire à partir de (64) et (63) :

$$\begin{aligned}
\nu^{\frac{1}{r}}\|a\|_{\widetilde{L^r_T} B^{s+\frac{2}{r}}_p} &\leq C\big(1+(\nu T)^{\frac{1}{r}}\big)\Big(\sum_{i=0}^{N-1}\|a(T_i)\|_{B^s_p} + N\|F\|_{\widetilde{L^1_T} B^s_p}\Big)\\
&+ C(1+\nu T)N\nu^{\frac{1}{r}}\|G\|_{\widetilde{L^r_T} B^{s+\frac{2}{r}-2}_p},\\
&\leq C_1 N e^{C_1 V(T)}\big(1+(\nu T)^{\frac{1}{r}}\big)\Big(\|a^0\|_{B^s_p} + \|F\|_{\widetilde{L^1_T} B^s_p}\Big)\\
&+ C_1 N\Big(\nu^{\frac{1}{r}}\|G\|_{\widetilde{L^r_T} B^{s+\frac{2}{r}-2}_p} + e^{C_1 V(T)}(1+(\nu T)^{\frac{1}{r}})\|G\|_{L^\infty_T B^{s-2}_p}\Big). \qquad (65)
\end{aligned}$$

Pour enfin conclure et obtenir l'estimation désirée, il suffit de remplacer N par sa valeur qui est fournie par (57).

3.3. **Preuve du lemme de commutation.** Nous allons utiliser dans cette démonstration du calcul paradifférentiel introduit par J.-M. Bony dans [2]. Tout d'abord remarquons que le terme $R_q(v,\, a)$ est donné par :

$$\Delta_q(v\cdot\nabla a)=S_{q-1}v\cdot\nabla a_q+R_q(v,\, a). \tag{66}$$

Plus précisemment, il se décompose comme suit :

$$R_q(v,\, a)=\sum_{l=1}^{4}R_q^l(v,\, a),$$

où l'on a posé :

$$\begin{aligned}
R_q^1(v,\, a) &= \sum_{k=1}^{d}\Delta_q(T_{\partial_k a}v^k),\\
R_q^2(v,\, a) &= -\sum_{k=1}^{d}[T_{v^k}\partial_k,\, \Delta_q]a,\\
R_q^3(v,\, a) &= \sum_{k=1}^{d}T_{(v^k-S_{q-1}v^k)}\partial_k\Delta_q a,\\
R_q^4(v,\, a) &= \sum_{k=1}^{d}\Delta_q R(v^k,\, \partial_k a)-R(S_{q-1}v^k,\, \Delta_q\partial_k a).
\end{aligned}$$

En effet la décomposition de Bony du produit $v\cdot\nabla a$ donne :

$$v\cdot\nabla a=\sum_{k=1}^{d}T_{v^k}\partial_k a+T_{\partial_k a}v^k+R(v^k,\, \partial_k a).$$

En appliquant l'opérateur Δ_q à l'équation ci-dessus, on obtient :

$$\begin{aligned}
\Delta_q(v\cdot\nabla a) &= \sum_{l=1}^{2}R_q^l(v,\, a)+\sum_{k=1}^{d}T_{v^k}\partial_k\Delta_q a+\Delta_q R(v^k,\, \partial_k a),\\
&= \sum_{l=1}^{3}R_q^l(v,\, a)+\sum_{k=1}^{d}S_{q-1}v^k\partial_k\Delta_q a-T_{\partial_k\Delta_q a}S_{q-1}v^k\\
&- R(S_{q-1}v^k,\, \partial_k\Delta_q a)+\Delta_q R(v^k,\, \partial_k a),\\
&= \sum_{l=1}^{4}R_q^l(v,\, a)+S_{q-1}v\cdot\nabla a_q-\sum_{k=1}^{d}T_{\partial_k\Delta_q a}S_{q-1}v^k.
\end{aligned}$$

D'un autre côté, nous avons par définition du paraproduit

$$T_{\partial_k\Delta_q a}S_{q-1}v^k=\sum_j S_{j-1}\partial_k\Delta_q a\,\Delta_j S_{q-1}v^k.$$

Comme $\Delta_q\Delta_{q'}$ est l'opérateur nul si $|q'-q|\geq 2$, alors il est immédiat que les deux termes du produit figurant dans la somme ne peuvent pas être non nuls simultanément. En conséquence la somme est nulle. Ce qui achève la démonstration de l'égalité (66).

Estimation de $R_q^1(v,\,a)$: Comme la transformée de Fourier de $S_{q'-1}\partial_k a\Delta_{q'}v^k$ est supportée dans une couronne de taille $2^{q'}$ on ne tiendra compte, dans la décomposition de $R_q^1(v,\,a)$, que d'un nombre fini de termes et l'on écrit

$$R_q^1(v,\,a)=\sum_{k=1}^{d}\sum_{|q'-q|\leq M_0}\Delta_q\big(S_{q'-1}\partial_k a\,\Delta_{q'}v^k\big).$$

Soulignons que cette somme porte sur les entiers q' positifs, sinon $S_{q'-1}$ serait nul. Ceci permet, grâce au lemme de Bernstein, d'avoir :

$$\|S_{q'-1}\partial_k a\,\Delta_{q'}v^k\|_{L^p}\leq C\|\nabla v\|_{L^\infty}2^{-q'}\sum_{j\leq q'-2}2^j\|\Delta_j a\|_{L^p}.$$

Ainsi, comme $|q-q'|\leq M_0$, alors on a pour tout entier $q\geq -1$,

$$\|R_q^1(v,\,a)\|_{L^p}\leq C\|\nabla v\|_{L^\infty}\sum_{j\geq -1}2^{-|j-q|}\|\Delta_j a\|_{L^p}.$$

Estimation de $R_q^2(v,\,a)$: Nous avons, par définition du paraproduit et grâce à la commutation des opérateurs Δ_q entre eux,

$$\begin{aligned}R_q^2(v,\,a)&=\sum_{k=1}^{d}\sum_{q'}[S_{q'-1}v^k\partial_k\Delta_{q'},\,\Delta_q]a,\\&=\sum_{k=1}^{d}\sum_{q'}[S_{q'-1}v^k\partial_k,\,\Delta_q]\Delta_{q'}a.\end{aligned}$$

La somme est en fait finie. Elle ne porte que sur les indices q' vérifiant $|q'-q|\leq M_0$. Ceci est dû, d'une part, à la localisation du support de la transformée de Fourier de $S_{q'-1}v^k\Delta_{q'}\partial_k a$ dans une couronne de taille $2^{q'}$ et d'autre part au fait que $\Delta_q\Delta_{q'}\equiv 0$, si $|q'-q|\geq 2$. Maintenant considérons la majoration du commutateur qui nous permet de gagner une dérivée. Pour s'en rendre compte, nous écrivons l'opérateur Δ_q comme une intégrale de convolution :

$$\begin{aligned}\big\|[S_{q'-1}v^k\partial_k,\,\Delta_q]\Delta_{q'}a(x)\big\|_{L^p}&=2^{qd}\Big\|\int h(2^q(x-y))\big(S_{q'-1}v^k(x)-S_{q'-1}v^k(y)\big)\Delta_{q'}\partial_k a(y)dy\Big\|_{L^p},\\&\leq C2^{-q}\|\nabla S_{q'-1}v\|_{L^\infty}\|\Delta_{q'}\partial_k a\|_{L^p},\\&\leq C\|\nabla v\|_{L^\infty}2^{q'-q}\|\Delta_{q'}a\|_{L^p}.\end{aligned}\tag{67}$$

En conséquence, nous avons l'estimation :

$$\|R_q^2(v,\,a)\|_{L^p}\leq C\|\nabla v\|_{L^\infty}\sum_{|q'-q|\leq M_0}2^{-|q'-q|}\|\Delta_{q'}a\|_{L^p}.\tag{68}$$

Estimation de $R_q^3(v,\,a)$: Par définition du paraproduit, il vient :

$$R_q^3(v,\,a)=\sum_{k=1}^{d}\sum_{|q'-q|\leq 1}S_{q'-1}(v^k-S_{q-1}v^k)\Delta_{q'}\partial_k\Delta_q a.$$

Par suite, pour tout entier $q \geq 1$, nous écrivons à l'aide du lemme de Bernstein :

$$\begin{aligned}\|S_{q'-1}(v^k - S_{q-1}v^k)\|_{L^\infty} &\leq \sum_{j\geq q-1} \|\Delta_j v\|_{L^\infty},\\ &\leq C2^{-q}\|\nabla v\|_{L^\infty}.\end{aligned}$$

Ce qui nous assure dans ce cas la majoration souhaitée.

Estimation de $R_q^4(v,\, a)$: Nous commençons par décomposer ce terme de la manière suivante :

$$R_q^4(v,\, a) = R_q^{4,1}(v,\, a) + R_q^{4,2}(v,\, a),$$

avec

$$\begin{aligned}R_q^{4,1}(v,\, a) &= \sum_{k=1}^{d} \Delta_q R(v^k - S_{q-1}v^k,\, \partial_k a),\\ R_q^{4,2}(v,\, a) &= \sum_{k=1}^{d} \Delta_q R(S_{q-1}v^k,\, \partial_k a) - R(S_{q-1}v^k,\, \Delta_q\partial_k a).\end{aligned}$$

Par définition du reste et, grâce à la condition de divergence nulle du champ de vecteurs v, nous pouvons écrire :

$$R_q^{4,1}(v,\, a) = \sum_{k=1}^{d} \Delta_q\partial_k \sum_{\substack{q'\geq q-M_0\\ i\in\{\mp1,0\}}} \Delta_{q'}(\mathrm{Id} - S_{q-1})v^k\Delta_{q'+i}a. \tag{69}$$

Comme pour tout $q \geq 1$ le terme $(\mathrm{Id} - S_{q-1})v^k$ ne possède pas de basses fréquences, alors le lemme de Bernstein fournit l'estimation :

$$\begin{aligned}\|\Delta_{q'}(\mathrm{Id} - S_{q-1})v^k\|_{L^\infty} &= \Big\|\sum_{\substack{|q'-j|\leq 1\\ j\geq q-1}} \Delta_{q'}\Delta_j v^k\Big\|_{L^\infty},\\ &\leq C2^{-q'}\|\nabla v\|_{L^\infty}.\end{aligned}$$

En reportant cette inégalité dans (69), nous obtenons à partir d'une estimation L^p,

$$\|R_q^{4,1}(v,\, a)\|_{L^p} \leq C\|\nabla v\|_{L^\infty}2^q \sum_{q'\geq q-M_0} 2^{-q'}\|\Delta_{q'}a\|_{L^p}.$$

le terme $R_q^{4,2}(v,\, a)$, est traité comme le terme $R_q^2(v,\, a)$. Nous avons, grâce à la condition $\mathrm{div}\, S_{q-1}v = 0$,

$$\begin{aligned}R_q^{4,2}(v,\, a) &= \sum_{\substack{q'\geq q-M_0\\ i\in\{\mp1,0\}}} \big[\Delta_q, \Delta_{q'}S_{q-1}v^k\big]\Delta_{q'+i}\partial_k a = R_{q,1}^{4,2}(v,\, a) + R_{q,2}^{4,2}(v,\, a),\\ &= \sum_{\substack{|q'-q|\leq M_0\\ i\in\{\mp1,0\}}} \big[\Delta_q, \Delta_{q'}S_{q-1}v^k\big]\Delta_{q'+i}\partial_k a + \sum_{\substack{q'>q+M_0\\ i\in\{\mp1,0\}}} \Delta_q\partial_k(\Delta_{q'}S_{q-1}v^k\Delta_{q'+i}a).\end{aligned}$$

Notons que la condition $\Delta_q\Delta_{q'+i}a = 0$, si $|q'-q| \geq 3$, justifie bien l'expression figurant dans la dernière somme. En utilisant une démarche analogue à celle utilisée dans l'estimation de R_q^2, on obtient :

$$\|R^{4,2}_{q,1}(v,\,a)\|_{L^p}\leq C\|\nabla v\|_{L^\infty}\sum_{\substack{|q'-q|\leq M_0\\ i\in\{\mp1,0\}}}2^{q'-q}\|\Delta_{q'+i}a\|_{L^p}.$$

La deuxième somme se majore comme suit :

$$\begin{aligned}\|R^{4,2}_{q,2}(v,\,a)\|_{L^p} &\leq C2^q\sum_{\substack{q'>q+M_0\\ i\in\{\mp1,0\}}}\|\Delta_{q'}v\|_{L^p}\|\Delta_{q'+i}a\|_{L^p},\\ &\leq C\|\nabla v\|_{L^\infty}\sum_{q'\geq q+M_0-1}2^{q-q'}\|\Delta_{q'}a\|_{L^p}.\end{aligned}$$

Ceci achève la démonstration du Lemme 7. ■

4. Application aux poches de tourbillon höldériennes

Ce paragraphe porte sur l'étude des poches de tourbillon visqueuses à bord höldérien. Nous montrons que la perte de la régularité höldérienne, mentionnée dans [6], n'est qu'un fait apparent. En d'autres termes, nous allons démontrer que dans le cadre du système de Navier-Stokes, si l'on part d'une poche de tourbillon $\omega^0 = \mathbf{1}_\Omega$ de bord $C^{1+\epsilon}$, alors son transporté par le flot visqueux reste en tout temps de classe $C^{1+\epsilon}$. Ceci apparaît comme un cas particulier d'un résultat général de persistance des structures géométriques des poches de tourbillon généralisées. Nous insistons sur le fait que la Proposition 3 et le Théorème 2 constituent les deux piliers de la démonstration. Ce sont justement les deux informations nouvelles que nous avons obtenues en tenant compte d'une part du fait que le tourbillon est plus régulier qu'on l'attend et d'autre part du fait que le flot n'est pas quelconque mais qu'il préserve la mesure de Lebesgue. Nous montrons également des résultats de convergence non visqueuse des structures géométriques. Cela résulte du contrôle uniforme en ν de la norme lipschitzienne du champ des vitesses v_ν. Avant de donner nos résultats fondamentaux, nous allons d'abord rappeler quelques concepts de base et une estimation logarithmique du gradient de la vitesse.

4.1. **Outils préliminaires.** L'objet de ce paragraphe est l'introduction d'espaces de Hölder anisotropes construits à partir d'une famille donnée de champs de vecteurs. L'utilité de ces espaces se révèle lorsqu'on veut un contrôle lipschitzien de la vitesse, dans le cas de faible régularité, comme le montrera le Théorème 3.

Définition 1. *Soit $X=(X_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ une famille de champs de vecteurs telle que pour tout λ, X_λ et* div X_λ *sont dans la classe de Hölder C^ϵ. Cette famille est dite admissible si et seulement si, on a :*

$$I(X)=\inf_{x\in\mathbb{R}^d}\sup_{\lambda\in\Lambda}\big|X_\lambda(x)\big|>0.$$

On note :

$$\widetilde{\|}X_\lambda\|_{C^\epsilon}=\|X_\lambda\|_{C^\epsilon}+\|\mathrm{div}X_\lambda\|_{C^\epsilon}.$$

Nous définissons l'action de cette famille, sur une distribution u appartenant à L^∞, par :

$$\forall\,\lambda\in\Lambda,\;X_\lambda(x,\,D)u=\mathrm{div}(uX_\lambda)-u\;\mathrm{div}X_\lambda.$$

Nous allons maintenant introduire la notion d'espace de Hölder non isotrope modelé sur une famille de champs de vecteurs X.

Définition 2. *Soit X une famille admissible de champs de vecteurs. On note $C^\epsilon(X)$ l'espace des distributions tempérées u, bornées sur $\mathbb{R}^d$ et telles que*

$$\forall\,\lambda \in \Lambda,\ X_\lambda(x,\,D)u \in C^{\epsilon-1} \quad \text{et} \quad \sup_{\lambda\in\Lambda} \|X_\lambda(x,\,D)u\|_{C^{\epsilon-1}} < +\infty.$$

La norme correspondante est définie par :

$$\|u\|_{C^\epsilon(X)} = \frac{1}{I(X)}\Big(\|u\|_{L^\infty} \sup_{\lambda\in\Lambda} \widetilde{\|}X_\lambda\|_{C^\epsilon} + \sup_{\lambda\in\Lambda} \|X_\lambda(x,\,D)u\|_{C^{\epsilon-1}}\Big).$$

Cette notion de régularité stratifiée est d'une grande importance dans l'étude des poches höldériennes. En effet, J.-Y. Chemin établit dans [3] une estimation logarithmique stationnaire : elle montre que le contrôle des dérivées directionnelles du tourbillon le long des champs (X_λ), dans un espace de Hölder d'indice négatif permet de récupérer un contrôle logarithmique de la norme Lipschitz de v :

Théorème 3. *Il existe une constante $C > 0$ telle que, pour tout $\epsilon \in]0,\,1[$ et pour tout $a > 1$, on a la propriété suivante :*
Soit X une famille admissible de champs de vecteurs et leur divergence soient l'espace C^ϵ. Considérons une fonction ω appartenant à $C^\epsilon(X) \cap L^a$. Si v est un champ de vecteurs de divergence nulle et de tourbillon ω, alors il est lipschitzien et vérifie :

$$\|\nabla v\|_{L^\infty} \leq C\bigg(a\|\omega\|_{L^a} + \frac{\|\omega\|_{L^\infty}}{\epsilon}\log\Big(e + \frac{\|\omega\|_{C^\epsilon(X)}}{\epsilon\|\omega\|_{L^\infty}}\Big)\bigg). \tag{70}$$

4.2. **Principaux résultats.** Nous allons dans la proposition suivante décrire l'évolution d'un champ de vecteurs tangent par le flot. La démonstration se fait à l'aide d'un simple calcul de dérivation.

Proposition 4. *Soit v un champ de vecteurs lipschitzien et ψ le flot correspondant. Prenons une famille $X_0 = (X_{0,\lambda})_{\lambda\in\Lambda}$ de champs de vecteurs appartenant à C^ϵ. Alors, le champ de vecteurs $X_t = \big(X_{t,\lambda})_{\lambda\in\Lambda}$, défini par :*

$$X_{t,\lambda}(x) = \psi_\star(t)X_{0,\lambda} = \big(X_{0,\lambda}(x,\,D))\psi(t)\big)\big(\psi^{-1}(t,x)\big),$$

satisfait l'équation,

$$\big(\partial_t + v\cdot\nabla\big)X_{t,\lambda} = X_{t,\lambda}(x,\,D)v. \tag{71}$$

Le transporté par le flot visqueux sera noté X_t^ν.

Remarque : L'utilité de l'application $\psi_\star(t)$ est qu'elle envoie un champ de vecteurs tangent à une courbe γ en un champ de vecteurs tangent à $\psi(t,\gamma)$.

Maintenant, il est temps d'établir notre résultat essentiel sur les poches de tourbillon généralisées, c'est-à-dire, appartenant à l'espace anisotrope $C^\epsilon(X)$. Il permet en particulier d'obtenir la propagation de la régularité stratifiée dans les espaces de Hölder généralisant ainsi le Théorème 1.2 de [6].

Théorème 4. *Soient $0 < \epsilon < 1$, $a > 1$ et X_0 une famille admissible de champs de vecteurs. On donne un champ de vecteurs v^0 à coefficients dans C^1_* et de divergence nulle. On suppose en outre que $\nabla v^0 \in L^a$ et que $\omega^0 \in C^\epsilon(X_0)$. Alors, $\forall\,\nu \geq 0$, (NS_ν) possède une unique solution*

v_ν *dans* $L^\infty_{loc}(\mathbb{R}_+;\, \mathrm{Lip}(\mathbb{R}^2))$. *Plus précisément, il existe une constante* C *ne dépendant que de* ϵ, ω^0 *et* X_0 *telle que*

$$\begin{aligned} \|\nabla v_\nu(t)\|_{L^\infty} &\leq C(1+\nu)e^{Ct} \\ \|X_{0,\lambda}(x,\, D)\psi_\nu(t)\|_{C^\epsilon} + \|\omega_\nu(t)\|_{C^\epsilon(X^\nu_t)} &\leq Ce^{C\left(\nu t+1\right)\exp Ct}. \end{aligned}$$

De plus, lorsque la viscosité ν *tend vers zéro, alors* v_ν *tend vers* v *et* $\psi_\nu - Id$ *tend vers* $\psi - Id$ *dans l'espace* $L^\infty_{loc}(\mathbb{R}_+;\, C^\alpha)$ *pour tout* $\alpha < 1$. *En outre, si* $\epsilon' < \epsilon$ *alors* $X_{0,\lambda}(x, D)\psi_\nu, X^\nu_{t,\lambda}$ *et* $\mathrm{div}\, X^\nu_{t,\lambda}$ *convergent respectivement vers* $X_{0,\lambda}(x, D)\psi$, $X_{t,\lambda}$ *et* $\mathrm{div}\, X_{t,\lambda}$ *dans* $L^\infty_{loc}(\mathbb{R}_+;\, C^{\epsilon'})$, *uniformément en* λ.

Voyons comment on peut déduire le Théorème 1 à partir du Théorème 4. Pour commencer,construisons, à partir de la donnée d'un ouvert borné de classe $C^{1+\epsilon}$, une famille admissible X_0, telle que $\omega^0 = \mathbf{1}_\Omega \in C^\epsilon(X_0)$. Par définition d'un bord de classe $C^{1+\epsilon}$, il existe une fonction $f_0 \in C^{1+\epsilon}(\mathbb{R}^2)$ telle que $\partial\Omega$ coïncide, dans un de ses voisinages V, avec l'ensemble des zéros de f_0 et dont le gradient ne s'annule pas dans V. Soit α une fonction régulière supportée dans V et égale à 1 dans un petit voisinage de $\partial\Omega$. On pose :

$$X_{0,0} = \nabla^\perp f_0 \quad \text{et} \quad X_{0,1} = (1-\alpha)\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Une simple vérification montre que la famille de champs de vecteurs $(X_{0,i})_{i=0}^1$ est admissible. De plus, $X_{0,i}(x,\, D)\omega^0 = 0$. Considérons un point $x_0 \in \partial\Omega$ et définissons la courbe γ^0 par l'équation différentielle ordinaire :

$$\begin{cases} \partial_\sigma \gamma^0(\sigma) = \nabla^\perp f_0(\gamma^0(\sigma)), \\ \gamma^0(0) = x_0. \end{cases}$$

Il est facile de voir que γ^0 appartient à $C^{1+\epsilon}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^2)$ et qu'elle est une paramétrisation régulière de $\partial\Omega$. Soit $\gamma_\nu(t)$ le bord du transporté de Ω par le flot visqueux $\psi_\nu(t)$. Alors en différentiant l'égalité $\gamma_\nu(t) = \psi_\nu(t) \circ \gamma^0$, on montre que

$$\partial_\sigma \gamma_\nu(t, \sigma) = \big(X_{0,0}(x,\, D)\psi_\nu\big)(t,\, \gamma^0(\sigma)).$$

Comme le Théorème 4 implique $X_{0,0}(x,\, D)\psi_\nu$ appartient à $L^\infty_{loc}(\mathbb{R}_+;\, C^\epsilon)$, alors $\gamma_\nu(t)$ appartient à $L^\infty_{loc}(\mathbb{R}_+;\, C^{1+\epsilon})$. D'autre part, la matrice jacobienne de $\psi_\nu(t)$ est inversible. D'où $X_{0,0}(x,\, D)\psi_\nu(t)$ ne s'annule pas sur V. Ainsi la courbe $\gamma_\nu(t)$ est une paramétrisation régulière de $\partial\Omega_\nu(t)$. Les résultats de limite non visqueuse se déduisent sans peine à partir de ceux du Théorème 4. Le point crucial est justement l'uniformité des estimations par rapport à ν. ■

La démonstration du Théorème 4 utilise essentiellement la proposition ci-après,la fin de la démonstrationTthéorème 4 est analogue à celle du Théorème 1.2 que l'on retrouve dans [6].

Proposition 5. *Soient* $0 < \epsilon < 1$, $a > 1$ *et* $X_0 = (X_{0,\lambda})_\lambda$ *une famille admissible de champs de vecteurs. On suppose que* v_ν *est solution de* (NS_ν) *appartenant à* $L^\infty_{loc}(\mathbb{R}_+;\, C^\infty_b(\mathbb{R}^2))$ *et que son tourbillon est dans* $L^\infty_{loc}(\mathbb{R}_+;\, L^a \cap L^\infty)$. *Alors, le transporté* X^ν_t *de* X_0 *par le flot visqueux* ψ_ν *est admissible pour tout temps positif* t. *De plus, il existe une constante* C, *ne dépendant que de la dimension, telle que*

$$\begin{aligned} \|\nabla v_\nu(t)\|_{L^\infty} &\leq \big(C_{0,\epsilon} + \nu\big) \exp\Big(C_\epsilon \|\omega^0\|_{L^\infty}\, t\Big) \;; \\ I(X^\nu_0) &\geq I(X_0) \exp\Big(-\big(C_{0,\epsilon} + \nu\big) t\, \mathrm{e}^{C_\epsilon \|\omega^0\|_{L^\infty}\, t}\Big) \;; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Gamma(t) \overset{déf}{=} \|X_{0,\lambda}(x,\, D)\psi_\nu(t)\|_{C^\epsilon} \quad &+ \quad \|\omega_\nu(t)\|_{C^\epsilon(X_{\nu,t})} \le \Gamma(0)\mathrm{e}^{C_\epsilon}\\ &\times \quad \exp\Big(\big(C_{0,\epsilon}+\nu\big)t\,\mathrm{e}^{C_\epsilon\|\omega^0\|_{L^\infty}t}\Big);\end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned}C_\epsilon &= \frac{C}{\epsilon^3(1-\epsilon)}\log\frac{1}{\epsilon(1-\epsilon)} \quad \textit{et}\\ C_{0,\epsilon} &= C\left(C_\epsilon + a\|\omega^0\|_{L^a\cap L^\infty} + \epsilon^{-1}\|\omega^0\|_{L^\infty}\log\left(e+\frac{\|\omega^0\|_{C^\epsilon(X_0)}}{\epsilon\|\omega^0\|_{L^\infty}}\right)\right).\end{aligned}$$

4.3. **Démonstration de la Proposition 5.** Le point le plus délicat est d'estimer convenablement la quantité $\|X_{t,\lambda}(x,\, D)\omega_\nu\|_{C^{\epsilon-1}}$ et c'est exactement ici que l'effet régularisant et la propagation höldérienne sont décisifs. Lorsqu'on se place dans le cadre eulérien, alors $X_{t,\lambda}(x,\, D)\omega$ satisfait l'équation de transport :

$$\big(\partial + v\cdot\nabla\big)X_{t,\lambda}(x,\, D)\omega = 0.$$

Comme conséquence on peut propager facilement la régularité höldérienne, sous réserve que le champ v soit lipschitzien ; l'on obtient :

$$\|X_{t,\lambda}(x,\, D)\omega\|_{C^{\epsilon-1}} \le C\|X_{0,\lambda}(x,\, D)\omega^0\|_{C^{\epsilon-1}}\exp\Big(C_\epsilon\int_0^t\|\nabla v(\tau)\|_{L^\infty}d\tau\Big).$$

Pour plus de détails, on peut consulter le lemme 5.5.1 cité dans [3]. Par contre, dans le cadre visqueux la commutation des champs de vecteurs $\partial_t + v\cdot\nabla$ et $X_{t,\lambda}$ permet de dire que l'équation satisfaite par $X_{t,\lambda}(x,D)\omega_\nu$ est :

$$\big(\partial_t + v_\nu\cdot\nabla - \nu\Delta\big)X_{t,\lambda}(x,\, D)\omega_\nu = -\nu[\Delta,\, X_{t,\lambda}(x,\, D)]\,\omega_\nu. \tag{72}$$

Dans la suite nous omettons l'indice ν afin d'alléger les notations. Ainsi le problème est de donner un sens au commutateur qui n'a *a priori* aucune raison d'exister puisque le laplacien consomme deux dérivées et le tourbillon est supposé simplement borné. Cependant l'effet régularisant mis en évidence dans la Proposition 2 nous permettra effectivement de montrer que le commutateur est, presque pour tout temps, dans l'espace $C^{\epsilon-1}$.

La démonstration donnée ici est tout d'abord locale en temps puis nous sa globalisation est du même genre que celle de la Proposition 3 et du Théorème 2.

4.3.1. *Estimation locale.* Utilisant le calcul paradifférentiel introduit par J.-M. Bony [2], nous aboutissons à la décomposition suivante :

$$\nu[\Delta,\, X_{t,\lambda}(x,\, D)]\,\omega = F + \nu\, G,$$

où

$$F = 2\nu\, R(\nabla X^i_{t,\lambda},\, \partial_i\nabla\omega) + \nu R(\Delta X^i_{t,\lambda}, \partial_i\omega), \tag{73}$$

et

$$G = 2T_{\nabla X^i_{t,\lambda}}\partial_i\nabla\omega + 2T_{\partial_i\nabla\omega}\nabla X^i_{t,\lambda} + T_{\Delta X^i_{t,\lambda}}\partial_i\omega + T_{\partial_i\omega}\Delta X^i_{t,\lambda}. \tag{74}$$

Remarque : Nous avons utilisé la convention d'Einstein la sommation sur les indices répétés.

Le lemme suivant fournit des estimations sur F et G. Il montre en particulier que l'intégration en temps des blocs dyadiques de F permet de compenser les dérivées consommées par le laplacien.

Lemme 8. *Soient ϵ un réel appartenant à $]0,\,1[$ et C_0 une constante positive. Alors pour tous les réels $0 \leq T_1 < T_2$ vérifiant*

$$\nu(T_2 - T_1) + \int_{T_1}^{T_2} \|\nabla v(t)\|_{L^\infty} dt \leq C_0, \tag{75}$$

et pour tout $t \in [T_1,\,T_2]$, on a :

$$\sup_q 2^{q(\epsilon-1)} \int_{T_1}^{t} \|\Delta_q F(\tau)\|_{L^\infty} d\tau \leq \frac{CC_0}{\epsilon} \sup_{\tau\in[T_1,\,t]} \widetilde{\|} X_\lambda(\tau)\|_{C^\epsilon} \|\omega^0\|_{L^\infty}$$

et

$$\|G(t)\|_{C^{\epsilon-3}} \leq \frac{C}{1-\epsilon} \|X_\lambda(t)\|_{C^\epsilon} \|\omega^0\|_{L^\infty}.$$

La constante C qui figure dans ces estimations est universelle.

Démonstration

La démonstration du premier point s'effectue facilement à l'aide de la Proposition 3. En effet, on applique l'opérateur de localisation en fréquences Δ_q à F et on utilise les identités :

$$R(\Delta X^i_{t,\lambda}, \partial_i \omega) = \partial_i R(\Delta X^i_{t,\lambda}, \omega) - R(\Delta \mathrm{div} X, \omega) \quad \text{et}$$

$$R(\nabla X^i_{t,\lambda}, \nabla \partial_i \omega) = \partial_i R(\nabla X^i_{t,\lambda}, \nabla\omega) - R(\nabla \mathrm{div} X_{t,\lambda}, \nabla\omega),$$

on trouve, après une intégration en temps et un usage du lemme de Bernstein,

$$\begin{aligned} 2^{q(\epsilon-1)} \int_{T_1}^{t} \|\Delta_q F(\tau)\|_{L^\infty} d\tau \quad &\leq \quad C 2^{q(\epsilon-1)} 2^q \sum_{\substack{j \geq q-N_0 \\ i\in\{\mp 1, 0\}}} \nu 2^{2j} \int_{T_1}^{t} \|\Delta_{j+i} X_{\tau,\lambda}\|_{L^\infty} \|\Delta_j \omega(\tau)\|_{L^\infty} d\tau \\ &+ \quad C 2^{q(\epsilon-1)} \sum_{\substack{j \geq q-N_0 \\ i\in\{\mp 1, 0\}}} \nu 2^{2j} \int_{T_1}^{t} \|\Delta_{j+i} \mathrm{div} X_{\tau,\lambda}\|_{L^\infty} \|\Delta_j \omega(\tau)\|_{L^\infty} d\tau. \end{aligned}$$

Comme le champ $X_{t,\lambda}$ et sa divergence sont dans l'espace C^ϵ, d'indice strictement positif, et en utilisant l'inégalité (28) et de la condition (75), nous obtenons :

$$\begin{aligned} 2^{q(\epsilon-1)} \int_{T_1}^{t} \|\Delta_q F(t)\|_{L^\infty} dt \quad &\leq \quad C \|\omega^0\|_{L^\infty} \Big(1 + \nu(t - T_1) + \int_{T_1}^{t} \|\nabla v(t)\|_{L^\infty} dt\Big) \\ &\times \quad \sup_{\tau\in[T_1,\,t]} \widetilde{\|} X_\lambda(\tau)\|_{C^\epsilon} \sum_{j \geq q-N_0} 2^{(q-j)\epsilon}. \end{aligned}$$

Nous pouvons alors dériver facilement l'estimation du lemme à partir de cette forme. L'estimation de G, ne pose aucun problème significatif. Les paraproduits sont bien définis si le tourbillon est borné et que $\epsilon < 1$ et on obtient

$$\|G(t)\|_{C^{\epsilon-3}} \leq \frac{C}{1-\epsilon} \|X_{t,\lambda}\|_{C^\epsilon} \|\omega(t)\|_{L^\infty}.$$

Pour conclure, il suffit de recourir au principe du maximum qui implique $\|\omega(t)\|_{L^\infty} \leq \|\omega^0\|_{L^\infty}$. ■

Pour assurer en premier lieu une propagation locale nous allons prendre dans le lemme 8 la constante C_0 de manière à ce que la condition (55) soit respectée, avec $r = +\infty$. En d'autres termes, nous nous plaçons sous la condition

$$\nu(T_2 - T_1) + \int_{T_1}^{T_2} \|\nabla v(t)\|_{L^\infty} dt \le c\,\epsilon(1-\epsilon) \overset{déf}{=} C_\epsilon^{-1}. \tag{76}$$

avec c une constante que nous pouvons prendre aussi petite que l'on veut. Désormais, nous nous plaçons sous hypothèse (76). Estimons maintenant la norme de $X_{t,\lambda}(x,\,D)\omega(t)$. Pour ce faire, on utilise l'estimation (62) qui permet, via le lemme 8, de montrer que pour tout réel $t \in [T_1, T_2]$,

$$\begin{aligned} \|X_{t,\lambda}(x,D)\omega(t)\|_{C^{\epsilon-1}} &\le C\Big(\|X_{T_1,\lambda}(x,D)\omega(T_1)\|_{C^{\epsilon-1}} + \|F\|_{\widetilde{L^1}\left([T_1,\,t];\,C^{\epsilon-1}\right)} \\ &+ \big(1+\nu(t-T_1)\big)\|G\|_{L^\infty([T_1,\,t];\,C^{\epsilon-3})}\Big) \\ &\le \frac{C}{\epsilon(1-\epsilon)}\Big(\|X_{T_1,\lambda}(x,D)\omega(T_1)\|_{C^{\epsilon-1}} + \|\omega^0\|_{L^\infty}\sup_{\tau\in[T_1,\,t]}\widetilde{\|}X_\lambda(\tau)\|_{C^\epsilon}\Big). \end{aligned} \tag{77}$$

Dans ce qui suit, nous tâcherons de décrire la propagation höldérienne du champ de vecteurs $X_{t,\lambda}$. Pour cela, on s'appuit sur l'inégalité (58) et on se sert de la proposition 4. Alors, on parvient à établir l'existence d'une constante absolue C telle que pour tout $t \in [T_1,\,T_2]$

$$\|X_\lambda(t)\|_{C^\epsilon} \le C\Big(\|X_\lambda(T_1)\|_{C^\epsilon} + \int_{T_1}^t \|X_\lambda(x,D)v(\tau)\|_{C^\epsilon} d\tau\Big). \tag{78}$$

Nous allons admettre l'inégalité qui suit. Pour plus de détails sur la preuve, on renvoie, par exemple, au lemme 3.3.2 de [3].

$$\|X_{t,\lambda}(x,D)v\|_{C^\epsilon} \le \frac{C}{\epsilon}\Big(\epsilon\|X_{t,\lambda}(x,D)\omega\|_{C^{\epsilon-1}} + \|\mathrm{div}X_{t,\lambda}\|_{C^\epsilon}\|\omega(t)\|_{L^\infty} + \|X_{t,\lambda}\|_{C^\epsilon}\|\nabla v(t)\|_{L^\infty}\Big). \tag{79}$$

Par conséquent, vishik (78) et (79) et en utilisant la condition (76), on trouve que pour tout $t \in [T_1, T_2]$

$$\begin{aligned} \|X_\lambda(t)\|_{C^\epsilon} &\le C\Big(\|X_\lambda(T_1)\|_{C^\epsilon} + \int_{T_1}^t \Big(\|X_\lambda(x,D)\omega(\tau)\|_{C^\epsilon} + \epsilon^{-1}\|\omega^0\|_{L^\infty}\|\mathrm{div}X_\lambda(\tau)\|_{C^\epsilon}\Big)d\tau\Big) \\ &+ C\,c\sup_{T_1\le\tau\le t}\|X_\lambda(\tau)\|_{C^\epsilon}. \end{aligned}$$

Par suite, quitte à prendre c suffisamment petite dans (76), on trouve

$$\|X_\lambda(t)\|_{C^\epsilon} \le C\Big(\|X_\lambda(T_1)\|_{C^\epsilon} + \int_{T_1}^t \Big(\|X_\lambda(x,D)\omega(\tau)\|_{C^\epsilon} + \epsilon^{-1}\|\omega^0\|_{L^\infty}\|\mathrm{div}X_\lambda(\tau)\|_{C^\epsilon}\Big)d\tau\Big) \tag{80}$$

Le contrôle de la quantité $\|\mathrm{div}X_{t,\lambda}\|_{C^s}$ ne pose pas de véritables problèmes. En effet, en prenant la divergence dans l'équation (71) et en se servant de l'incompressibilité du fluide, on montre que $\mathrm{div}X_{t,\lambda}$ vérifie l'équation de transport

$$(\partial_t + v\cdot\nabla)\mathrm{div}X_{t,\lambda} = 0.$$

Ainsi en appliquant l'estimation (58), on obtient

$$\|\mathrm{div}X_\lambda(t)\|_{C^\epsilon} \le C\|\mathrm{div}X_\lambda(T_1)\|_{C^\epsilon},\ \forall t\in[T_1,\,T_2]. \tag{81}$$

Soit t un réel positif. Posons

$$\Gamma(t) \stackrel{déf}{=} \sup_{0\leq\tau\leq t} \Big(\widetilde{\|} X_\lambda(\tau)\|_{C^\epsilon} + \frac{\|X_\lambda(x,D)\omega(\tau)\|_{C^{\epsilon-1}}}{\|\omega^0\|_{L^\infty}}\Big).$$

Alors en combinant les inégalités (77), (80) et (81), on aboutit pour tout $t\in[T_1,\,T_2]$ à

$$\Gamma(t) \leq \frac{C}{\epsilon^2(1-\epsilon)}\Big(\Gamma(T_1) + \int_{T_1}^t \Gamma(\tau)\|\omega^0\|_{L^\infty} d\tau\Big).$$

Donc nous aurons par l'intermédiaire du lemme de Gronwall et la définition (76)

$$\Gamma(t) \leq C_\epsilon \epsilon^{-1}\Gamma(T_1)\exp\Big(C_\epsilon\epsilon^{-1}\Big(\int_{T_1}^t \|\omega^0\|_{L^\infty} d\tau\Big). \tag{82}$$

Ceci achève la formulation locale de nos estimations. Occupons-nous dans le paragraphe suivant de leur extension à tout temps arbitrairement choisi dans $\mathbb{R}_+$.

4.3.2. *Estimation globale.* Soit T un réel positif. Partageons l'intervalle $[0,T]$ en une subdivision $(T_i)_{i=0}^{N-1}$ telle que

$$\nu(T_{i+1}-T_i) + \int_{T_i}^{T_{i+1}} \|\nabla v(t)\|_{L^\infty} \simeq c\,\epsilon(1-\epsilon) = C_\epsilon^{-1}.$$

Signalons qu'en faisant la somme de ces égalités, on trouve

$$i \simeq C_\epsilon\Big(1+\nu T_i + \int_0^{T_i} \|\nabla v(\tau)\|_{L^\infty} d\tau\Big). \tag{83}$$

En appliquant l'inégalité (82) dans $[T_i,\,T_{i+1}]$, alors nous obtenons pour tout temps pris dans cet intervalle

$$\Gamma(t) \leq C_\epsilon \epsilon^{-1}\Gamma(T_i)\exp\Big(C_\epsilon\epsilon^{-1}\Big(\int_{T_i}^t \|\omega^0\|_{L^\infty} d\tau\Big). \tag{84}$$

Ainsi en itérant cette inégalité de proche en proche et en se servant de (83), on parvient à établir l'estimation

$$\Gamma(t) \leq \Gamma(0)\exp\widetilde{C}_\epsilon\Big(1+\nu t + \int_0^t \big(\|\omega^0\|_{L^\infty} + \|\nabla v(\tau)\|_{L^\infty}\big)d\tau\Big), \tag{85}$$

où l'on a posé $\widetilde{C}_\epsilon = \frac{C}{\epsilon^2(1-\epsilon)}\log\big(\frac{1}{\epsilon(1-\epsilon)}\big)\cdot$
Nous allons maintenant voir que l'estimation (85) permet de déduire, par le biais du théorème 3, un contrôle sur le gradient de la vitesse.

4.3.3. *Estimation du gradient de la vitesse.* En faisant une estimation rétrograde, on montre facilement que pour tout temps positif t,

$$I(X_t) \geq I(X_0)\exp\Big(-\int_0^t \|\nabla v(\tau)\|_{L^\infty}\Big).$$

Par suite, l'inégalité $\|\omega(t)\|_{L^\infty} \le \|\omega^0\|_{L^\infty}$ à laquelle on associe l'estimation (85) donne

$$\begin{aligned} \|\omega(t)\|_{C^\epsilon(X_t)} &\le \frac{\|\omega^0\|_{L^\infty}}{I(X_0)}\Gamma(t)\exp\int_0^t \|\nabla v(\tau)\|_{L^\infty}d\tau \\ &\le \frac{\Gamma(0)\|\omega^0\|_{L^\infty}}{I(X_0)}\exp\widetilde{C}_\epsilon\Big(1+\nu t+\int_0^t\big(\|\omega^0\|_{L^\infty}+\|\nabla v(\tau)\|_{L^\infty}\big)d\tau\Big) \\ &\le \|\omega^0\|_{C^\epsilon(X_0)}\exp\widetilde{C}_\epsilon\Big(1+\nu t+\int_0^t\big(\|\omega^0\|_{L^\infty}+\|\nabla v(\tau)\|_{L^\infty}\big)d\tau\Big). \end{aligned} \tag{86}$$

Or d'après le théorème 3, on sait qu'il existe une constante C telle que pour tout $\epsilon \in]0,1[$, on ait

$$\|\nabla v(t)\|_{L^\infty} \le C\bigg(a\|\omega(t)\|_{L^a} + \frac{\|\omega(t)\|_{L^\infty}}{\epsilon}\log\Big(e+\frac{\|\omega(t)\|_{C^\epsilon(X_t)}}{\epsilon\|\omega(t)\|_{L^\infty}}\Big)\bigg). \tag{87}$$

En reportant (86) dans (87) et en utilisant la monotonie de l'application de $x \to \log\,(e+\frac{a}{x})$ on trouve

$$\begin{aligned} \|\nabla v(t)\|_{L^\infty} &\le C\bigg(a\|\omega^0\|_{L^a}+\frac{\|\omega^0\|_{L^\infty}}{\epsilon}\log\Big(e+\frac{\|\omega^0\|_{C^\epsilon(X_0)}}{\epsilon\|\omega^0\|_{L^\infty}}\Big)\bigg) \\ &+ \frac{\widetilde{C}_\epsilon}{\epsilon}\bigg(1+\nu t\|\omega^0\|_{L^\infty}+\|\omega^0\|^2_{L^\infty}t+\|\omega^0\|_{L^\infty}\int_0^t\|\nabla v(\tau)\|_{L^\infty}d\tau\bigg). \end{aligned} \tag{88}$$

Posons

$$C_{0,\epsilon} \overset{déf}{=} C\bigg(\frac{\widetilde{C}_\epsilon}{\epsilon}+a\|\omega^0\|_{L^a\cap L^\infty}+\frac{\|\omega^0\|_{L^\infty}}{\epsilon}\log\Big(e+\frac{\|\omega^0\|_{C^\epsilon(X_0)}}{\epsilon\|\omega^0\|_{L^\infty}}\Big)\bigg).$$

Alors une simple application du lemme de Gronwall permet d'avoir

$$\begin{aligned} \mathit{Gronwall}\big\|\nabla v(t)\big\|_{L^\infty} &\le \Big(C_{0,\epsilon}+\widetilde{C}_\epsilon\epsilon^{-1}\Big(\nu t\|\omega^0\|_{L^\infty}+\|\omega^0\|^2_{L^\infty}t\Big)\Big)\exp\Big(\widetilde{C}_\epsilon\epsilon^{-1}\|\omega^0\|_{L^\infty}t\Big) \\ &\le \Big(C_{0,\epsilon}+\big(\nu+\|\omega^0\|_{L^\infty}\big)\Big)\exp\Big(\widetilde{C}_\epsilon\epsilon^{-1}\|\omega^0\|_{L^\infty}t\Big) \\ &\le \Big(C_{0,\epsilon}+\nu\Big)\exp\Big(\widetilde{C}_\epsilon\epsilon^{-1}\|\omega^0\|_{L^\infty}t\Big). \end{aligned} \tag{89}$$

Par conséquent en remplaçant dans (85) le gradient de la vitesse par la majoration (89), on parvient à

$$\begin{aligned} \Gamma(t) &\le \Gamma(0)\exp\widetilde{C}_\epsilon\bigg(1+\nu t+t\|\omega^0\|_{L^\infty}+\Big(\nu t+C_{0,\epsilon}t\Big)\exp\Big(\widetilde{C}_\epsilon\epsilon^{-1}\|\omega^0\|_{L^\infty}t\Big)\bigg) \\ &\le e^{\widetilde{C}_\epsilon}\Gamma(0)\exp\Big(\widetilde{C}_\epsilon\big(\nu+C_{0,\epsilon}\big)t\,e^{\widetilde{C}_\epsilon\epsilon^{-1}\|\omega^0\|_{L^\infty}t}\Big). \end{aligned} \tag{90}$$

En ce qui concerne l'estimation de $X_{0,\lambda}(x,D)\psi_\nu(t)$, nous avons par définition

$$X_{0,\lambda}(x,D)\psi_\nu(t) = X_{t,\lambda}\circ\psi_\nu(t).$$

En conséquence, il suffit pour conclure d'utiliser le lemme de composition suivant.

Lemme 9. *Soit d un entier supérieur ou égal à 2. Il existe une constante positive C dépendant de d telle que, si $s \in]0,\,1[$ et $p \in [1,+\infty]$, alors pour toute fonction f de B^s_p et pour tout difféomorphisme ψ, on aura*

$$\|f\circ\psi\|_{B^s_p} \le C\|\nabla\psi\|_{L^\infty}\|\nabla\psi^{-1}\|_{L^\infty}\|f\|_{B^s_p}.$$

Remarque

Nous avons supposé implicitement dans tout le calcul précédent que les fonctions en jeu sont suffisamment régulières. De façon plus rigoureuse, nous devons régulariser la donnée initiale, en prenant par exemple $v^{0,n} = S_n v^0$, et montrer que les estimations du théorème 4 sont stables par passage à la limite en n. Cette étude a été faite dans [6]. De même, les résultats de convergence cités dans le théorème 4 s'obtiennent de façon similaire au théorème 1 établi dans [6].

Références

[1] M. Ben-Artzi, Global solutions of two-dimensional Navier-Stokes and euler equations, Arch. Anal. Rational Mech. **128**, pages 329-358, 1994.

[2] J.-M. Bony, Calcul symbolique et propagation des singularités pour les équations aux dérivées partielles non linéaires, Annales de l'École supérieure, **14**, pages 209-246, 1981.

[3] J.-Y. Chemin, Perfect incompressible Fluids, Oxford University Press.

[4] J.-Y. Chemin, Théorèmes d'unicité pour le système de Navier-Stokes tridimensionnel J. Anal. Math. **77**, pages 27-50, 1999.

[5] J.-Y. Chemin, A Remark on the inviscid limit for two-dimmensionnel incompressible fluid, Communication in Partial Differential Equations, **21**, pages 1771-1779, 1996.

[6] R. Danchin, Poches de tourbillon visqueuses, Journal des Mathématiques Pures et Appliquées, **76**, issue 7, pages 609-647, 1997.

[7] R. Danchin, Évolution temporelle d'une poche de tourbillon singulière, Communications in Partial Differential Equations, **22**, pages 685-721, 1997.

[8] R. Danchin, Évolution d'une singularité de type cusp dans une poche de tourbillon, Revista Marematica Iberoamerica,**16**, pages 281-329., 2000.

[9] T. Hmidi, Transport-diffusion et viscosité évanescente, C. R. Math. Acad. Sci. Paris **337** (2003), no. 5, 309–312.

[10] A. Majda, Vorticity and the mathematical theory of an incompressible fluid flow, Communications in Pure and Applied Mathematics, **38**, pages 187-220, 1986.

[11] Mucha, Piotr Boguslaw ; Zajaczkowski, Wojciech, On the existence for the Dirichlet problem for the compressible linearized Navier-Stokes system in the *Lsbp*-framework. Ann. Polon. Math. **78** (2002), no. 3, 241–260.

[12] F. Planchon, Sur un inégalité de type Poincaré, C. R. Acad. Sci. Paris Sr. I Math. **330** (2000), no. 1, 21–23

[13] P. Serfati, Une preuve directe d'existence globale des vortex patches $2D$, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math, **318**, **no. 6,** pages 515–518, 1994.

[14] M. Vishik, Hydrodynamics in Besov Spaces, Arch. Rational Mech. Anal **145**, pages 197-214, 1998.

[15] M. Vishik, Incompressible flows of an ideal fluid with vorticity in borderline spaces of Besov type, Ann. scient. Éc. Norm. Sup. , 4^e série, **32**, pages 769-812, 1999.

[16] M. Vishik, Incompressible flows of an ideal fluid with unbounded vorticity. Comm. Math. Phys., no. 3, **213**, pages 697–731, 2000.

[17] V.I. Yudovich, Non-stationnary flows of an ideal incompressible fluid, Zhurnal Vych Matematika, **3**, pages 1032-106, 1963.