RAPPORT SCIENTIFIQUE

présenté à

L'UNIVERSITE DE RENNES 1

par

Taoufik Hmidi

pour obtenir

L'HABILITATION A DIRIGER DES RECHERCHES

Problème de Cauchy pour quelques équations d'évolution non-linéaires

Soutenue le 10 décembre 2008

Après avis des rapporteurs

M. Olivier Gues (Professeur, Université de Provence)
M. Herbert Koch (Professeur, Universität Bonn)
M. Thomas Sideris (Professeur, University of California)

Devant le jury composé de

M. Jean-Michel Bony (Professeur, Ecole Polytechnique)
M. Jean-Yves Chemin (Professeur, Université Paris 6)
M. Christophe Cheverry (Professeur, Université de Rennes 1)
M. Olivier Gues (Professeur, Université de Provence)
M. Roger Lewandowski (Professeur, Université de Rennes 1)
M. Fabrice Planchon (Professeur, Université Paris 13)

Table des matières

Remerciements

Mes remerciements les plus sincères vont en premier lieu à Jean-Yves Chemin qui a dirigé ma thèse puis suivi de près mes travaux de recherches. Qu'il trouve ici le témoignage de ma profonde reconnaissance.

Je tiens à remercier Olivier Gues, Herbert Koch et Thomas Sideris, rapporteurs de mon habilitation, pour la tâche qu'il ont bien voulu accomplir et l'intérêt qu'ils ont porté à mes travaux.

Je voudrais tout particulièrement remercier Jean-Michel Bony qui a accepté avec gentillesse de faire partie du jury. Sa fameuse formule du paraproduit m'est d'une extrême utilité.

J'adresse mes plus vifs remerciements à Fabrice Planchon pour avoir accepté de faire partie du jury, et ce malgré ses contraintes.

Je tiens également à exprimer mon amitié et ma reconnaissance à Christophe Cheverry et Roger Lewandowski, qui ont accepté d'être membres de jury.

Je voudrais aussi exprimer ma gratitude à tous les membres de l'Equipe EDP de l'Institut de Recherche Mathématique de Rennes et en particulier Francis, Frédéric et San.

Un remerciement particulier à Sahbi pour les discussions fructueuses et les débats passionnés que ce soit en rapport avec les mathématiques ou avec la littérature et l'histoire. Qu'il trouve ici l'expression de ma profonde amitié.

Je remercie également mes amis Hammadi et Issam.

Depuis mon recrutement en tant qu'enseignant-chercheur au sein de l'Institut de Recherche Mathématique de Rennes, j'ai bénéficié d'un environnement de travail exceptionnel. Je remercie ici l'ensemble des personnels administratifs pour leur compétence et leur gentillesse inestimables.

Je dois une grande reconnaissance à ma femme Kaouther et à toute ma famille pour le soutien sans limite qu'ils m'ont accordé.

Introduction

Je vais présenter dans ce mémoire d'habilitation mes travaux de recherche qui portent sur des problèmes mathématiques de quelques équations d'évolution non-linéaires. Je distingue essentiellement quatre parties.

La première partie est consacrée au problème des poches de tourbillon dans le cadre des équations de Navier-Stokes incompressibles en dimension deux d'espace. Ceci s'inscrit dans la suite des travaux de J.-Y. Chemin et R. Danchin obtenus respectivement dans le cadre non visqueux et visqueux. Il s'agit d'étudier la propagation uniforme en viscosité de la régularité höldérienne d'une poche de tourbillon. Dans [**35**], il est démontré que si le bord initial est $\mathscr{C}^{1+\epsilon}$ alors le transporté par le flot visqueux est uniformément de classe $\mathscr{C}^{1+\epsilon'}$, pour tout $\epsilon' < \epsilon$. Nous avons démontré dans [**56**] que cette perte n'a pas lieu pour cette classe de régularité. L'ingrédient principal est un effet régularisant dans les équations de transport-diffusion relativement à des régularités höldériennes. La démarche que nous avons adoptée est basée sur l'utilisation des coordonnées lagrangiennes combinée avec des outils de calcul paradifférentiel et d'analyse harmonique. Signalons que cette approche s'est avérée très efficace dans de nombreux problèmes de mécanique des fluides comme nous allons le voir au cours de cette présentation. L'autre problème que j'ai traité, toujours dans le cas des poches de tourbillon visqueuses, concerne des bords singuliers. Ceci complète le résultat de J.-Y. Chemin dans le cadre eulérien [**20**]. Nous avons démontré en particulier que la vitesse visqueuse est uniformément lipschitzienne lorsque on tronque à une distance finie du transporté de la partie singulière par le flot visqueux.

Dans la deuxième partie, nous allons discuté les résultats de [**64, 65, 42**] portant sur deux problèmes différents mais qui traitent de la question de passage à la limite dans certaines équations de la mécanique des fluides associées à un petit paramètre censé tendre vers zéro. Le premier problème concerne la limite non visqueuse 2D correspondant à des régularités critiques pour le système d'Euler incompressible. Il s'agit en particulier de valider des estimations, uniformes en viscosité et globales en temps, pour les solutions de Navier-Stokes incompressibles dans des espaces fonctionnels qui sont optimaux pour le problème de Cauchy du système d'Euler. Plus explicitement, les espaces en question sont de type Besov $\mathscr{B}_{p,1}^{1+\frac{2}{p}}$ et pour lesquels on sait d'après un résultat de M. Vishik [**113**] que le système d'Euler est globalement bien posé. Il est important de souligner que ce résultat n'est pas fondé sur le critère de B-K-M qui est adapté uniquement à des régularités sous-critiques. La méthode utilisée par M. Vishik est basée à une estimation logarithmique dont la démonstration repose sur la structure de transport de l'équation de la vorticité et du coup elle ne s'adapte pas à un modèle de transport-diffusion comme celle qui gouverne le tourbillon visqueux. Dans [**64, 65**], nous avons démontré des estimations uniformes en viscosité d'abord pour le cas $p \leq 2$ et ensuite nous avons complété le cas $p > 2$. Les méthodes présentées sont différentes : une qui utilise un effet régularisant sur le tourbillon combinée avec des estimations d'énergie. Par contre la deuxième est une estimation logarithmique similaire à celle de Vishik et qui repose sur une décomposition astucieuse de la vorticité conjuguée avec le calcul paradifférentiel.

Concernant le deuxième problème, il traite de la limite incompressible pour le système d'Euler faiblement compressible en dimension deux d'espace [**42**]. Nous avons établi le passage à la limite pour des données initiales très mal-préparées : elles ne sont pas uniformément bornées dans des espaces trop réguliers et leurs normes explosent quand le nombre de Mach tend vers zéro. Ceci nous a permis par exemple de considérer des données de type Yudovich pour le système limite. Les estimations de dispersion et la structure particulière de la vorticité sont les deux principaux éléments derrière cette amélioration.

La troisième partie est réservée au problème de Cauchy pour quelques équations d'évolution non-linéaires issues de la mécanique des fluides. Le point commun est d'étudier l'existence et l'unicité globale pour des données initiales avec régularité minimale. Dans [**3, 59, 60**], nous avons démontré l'existence globale pour le système de Boussinesq partiellement visqueux en dimension deux. Nous avons également étudié dans [**4, 66**] l'existence globale pour l'équation quasi-geostrophique critique et sur-critique et pour lesquelles, et encore une autre fois, le passage en coordonnées lagrangiennes s'avère très efficace. L'autre problème que nous avons également étudié concerne l'existence globale pour les équations d'Euler axisymétriques sans *swirl* [**5**]. Dans ce dernier cas on travaille avec des régularités critiques pour lesquelles le critère de B-K-M n'est pas censé applicable, ce qui complique largement la situation et au lieu de contrôler la vorticité dans L^∞ nous serions amenés à l'estimer dans un petit espace fermé qui est $\mathscr{B}^0_{\infty,1}$. Pour y parvenir nous utilisons des techniques de calcul paradifférentiel combinées avec la géométrie particulière des champs de vecteurs axisymétriques. Nous achevons cette partie par présenter les résultats du [**2**] portant sur le problème de Cauchy pour le système visqueux de la magnéto-hydrodynamique avec des données initiales à la Fujita-Kato.

La dernière partie est consacrée à la théorie d'explosion pour l'équation de Schrödinger focalisante avec une nonlinéarité L^2-critique. Dans [**61**], nous redémontrons de manière assez simple les résultats classiques de l'explosion dans le cadre H^1, en particulier le résultat de concentration de la masse dû à M. I. Weinstein et le théorème de classification de F. Merle. La démonstration repose sur un nouveau lemme de compacité. En dessous de la régularité H^1 le paysage n'est pas bien identifié. On a les mêmes questions sur la dynamique explosive que dans le cadre H^1 mais peu de résultats sont connus. Dans [**58**], nous avons étudié la concentration de la masse des solutions explosives et montré que la masse minimale nécessaire à l'explosion est $\|Q\|_{L^2}$, où Q est l'état fondamental. Ces résultats ont été obtenus auparavant par J. Colliander *et al.* [**26**] dans le cas des données radiales.

CHAPITRE 1

Poches de tourbillon visqueuses

Dans ce chapitre je vais discuter les résultats du **[1, 55, 56, 57]** portant en partie sur le problème des poches de tourbillon dans le cadre du système de Navier-Stokes incompressible $2D$. Il s'agit tout particulièrement d'étudier la stabilité de ces structures dans le cas d'une poche à bord régulier comme aussi pour un bord singulier.

1. Problème de Cauchy pour (NS_ν) et (E)

Je vais donner dans ce paragraphe un bref aperçu portant sur quelques résultats d'existence et d'unicité pour les modèles de Navier-Stokes et Euler incompressibles.
Rappelons que le système de Navier-Stokes décrit l'évolution du champ des vitesses $v_\nu(t,x)$ en présence de forces de frottement visqueux suivant les équations suivantes :

$$(NS_\nu)\begin{cases} \partial_t v_\nu + v_\nu\cdot\nabla v_\nu - \nu\Delta v_\nu = -\nabla p_\nu \\ \operatorname{div} v_\nu = 0 \\ v_{\nu|t=0} = v^0, \end{cases}$$

où le paramètre ν désigne la viscosité cinématique du fluide et la pression p_ν est un scalaire qui est donné par l'équation de Poisson

$$-\Delta p_\nu = \sum_{i,j}\partial_i\partial_j(v_\nu^i v_\nu^j).$$

En l'absence de forces dissipatives le système ci-dessus est réduit au système d'Euler incompressible (E) que l'on note parfois (NS_0) :

$$(E)\begin{cases} \partial_t v + v\cdot\nabla v = -\nabla p \\ \operatorname{div} v = 0 \\ v_{|t=0} = v^0. \end{cases}$$

Il est souvent très commode d'utiliser la formulation tourbillon- vitesse pour ces équations : elle permet, comme nous allons le voir, de différencier structurellement la dimension deux des autres dimensions. Rappelons d'abord que le tourbillon ω d'un champ de vecteurs v est donné en dimension 2 par le scalaire $\omega = \partial_1 v^2 - \partial_2 v^1$. Par contre en dimension 3 c'est un vecteur ayant pour expression $\omega = \nabla\wedge v$. Lorsque la vitesse est de divergence nulle alors on a la relation,

$$\Delta v = \begin{cases} \nabla^\perp\omega & \text{si} \quad d = 2, \\ \nabla\wedge\omega & \text{si} \quad d = 3. \end{cases}$$

Il en découle que modulo des hypothèses de décroissance à l'infini la vitesse v peut être retrouvée à partir de la vorticité grâce à la loi de Biot-Savart :

$$v(x) = c_d\int_{\mathbb{R}^d} K(x-y)\cdot\omega(y)dy,$$

avec

$$K(x) = \begin{cases} \frac{x^\perp}{|x|^2} & \text{si} \quad d = 2, \\ \frac{x}{|x|^3}\wedge & \text{si} \quad d = 3. \end{cases}$$

Les équations $(NS_\nu)_{\nu\geq 0}$ peuvent se réécrire en dimension 2 sous la forme :

$$(NS_\nu)\begin{cases}\partial_t\omega_\nu+(\Delta^{-1}\nabla^\perp\omega_\nu)\cdot\nabla\omega_\nu-\nu\Delta\omega_\nu=0\\ \omega_{\nu|t=0}=\omega^0.\end{cases}$$

C'est à ce niveau qu'on distingue la particularité de la dimension 2 : le tourbillon satisfait une équation de transport-diffusion. Par contre en dimension 3, le système de (NS_ν) prend la forme

$$(NS_\nu)\begin{cases}\partial_t\omega_\nu+(\Delta^{-1}\nabla\wedge\omega_\nu)\cdot\nabla\omega_\nu-\nu\Delta\omega_\nu=(\omega_\nu\cdot\nabla)\Delta^{-1}\nabla\wedge\omega_\nu\\ \omega_{\nu|t=0}=\omega^0.\end{cases}$$

Nous allons maintenant rappeler quelques résultats classiques d'existence et d'unicité pour (NS_ν) et (E). Le point de départ dans l'étude mathématique du système de Navier-Stokes est un résultat qui remonte à J. Leray **[81]** dans les années trente. Il démontre par le biais d'une méthode de compacité que (NS_ν) admet une solution globale dans l'espace d'énergie $L^\infty(\mathbb{R}_+;L^2)\cap L^2(\mathbb{R}_+;\dot H^1)$. Cependant l'unicité de telles solutions faibles est encore un problème ouvert en dimension $d\geq 3$. Quelques décennies plus tard, H. Fujita et T. Kato **[44]** ont démontré par un argument de point fixe l'existence et l'unicité locale lorsque les données initiales appartiennent à l'espace de Sobolev homogène $\dot H^{\frac d2-1}$. L'existence globale de telles solutions est établie pour des données petites devant la viscosité. L'espace $\dot H^{\frac d2-1}$ est dit dans ce contexte critique dans la mesure où le terme d'advection $v\cdot\nabla v$ et le terme de dissipation $-\Delta v$ sont de même régularité Sobolev $\dot H^{\frac d2-3}$. On peut aussi interpréter la criticité par l'invariance de l'espace fonctionnel via le scaling du système : pour $\lambda>0$, si $u(t,x)$ est solution de (NS_ν) alors $u_\lambda(t,x)=\lambda u(\lambda^2t,\lambda x)$ l'est aussi. Nous mentionnons que des résultats similaires ont été validés dans d'autres espaces critiques comme L^d, $\dot B_{p,\infty}^{-1+\frac dp}$, BMO^{-1}. On pourra consulter **[80]** pour une discussion plus complète.
Concernant le système d'Euler, il est bien connu suite au travail de T. Kato **[72]** qu'il est localement bien posé dans l'espace de Sobolev H^s pour $s>d/2+1$. Remarquons que le système d'Euler est souvent perçu comme un système hyperbolique quasi-linéaire d'ordre 1 et nécessite à cet effet que la vitesse soit dans $W^{1,\infty}=\mathrm{Lip}(\mathbb{R}^d)$. Ceci explique la restriction sur l'indice de régularité s. L'unique solution maximale vit dans l'espace $\mathscr{C}([0,T^*[,H^s)$ et l'on dispose d'un critère d'explosion naturel qui ramène la finitude de T^* à l'explosion de la quantité $\int_0^{T^*}\|\nabla v(\tau)\|_{L^\infty}d\tau=\infty$.
Ce critère n'est pas en général exploitable et il est trop limité dans les applications. Il s'est avéré ensuite que l'explosion est uniquement orchestrée par la partie antisymétrique de ∇v, qui est le tourbillon. Le critère en question est dû à Beale, Kato et Majda **[10]** et s'énonce comme suit :
si $v\in\mathscr{C}([0,T^*[,H^s)$ est une solution maximale du système d'Euler (E) alors,

$$T^*<\infty\Longleftrightarrow\int_0^{T^*}\|\omega(\tau)\|_{L^\infty}d\tau=\infty.$$

En dimension 2, le tourbillon est transporté par le flot

$$\omega(t,x)=\omega^0(\psi^{-1}(t,x))$$

où $\psi:\mathbb{R}\times\mathbb{R}^d\to\mathbb{R}^d$ est le flot décrivant les trajectoires des particules par le biais de l'équation intégrale

$$\psi(t,x)=x+\int_0^t v(\tau,\psi(\tau,x))d\tau.$$

L'incompressibilité du fluide entraîne que le flot préserve la mesure de Lebesgue et en conséquence toutes les normes L^p sont conservées. Ceci garantit l'existence globale en dimension 2 pour les solutions de Kato. Par contre en dimension 3, le tourbillon vérifie l'équation

$$\partial_t\omega+v\cdot\nabla\,\omega=\omega\cdot\nabla\,v.$$

Le terme d'étirement $\omega \cdot \nabla v$ qui est " quadratique" par rapport au tourbillon est source d'énormes difficultés mathématiques et jusqu'ici on ne sait pas s'il y a explosion ou non pour des données régulières et d'énergie finie. Remarquons d'ailleurs que le modèle scalaire ultra-simplifié $u'(t) = u^2(t)$ développe des singularités en temps fini. Nous allons voir plus tard que pour des données initiales admettant une symétrie cylindrique il y a un phénomène de presque *cancellation* donnant lieu à l'existence globale.

2. Poches de tourbillon : présentation générale

En utilisant la formulation tourbillon- vitesse, Yudovich a pu affaiblir les conditions de régularité exigées pour la construction de solutions au système (E), en travaillant légèrement en dessous de la régularité lipschitzienne. Plus précisément il démontre le théorème suivant :

THÉORÈME 1.1. *Soit $\omega^0 \in L^2 \cap L^\infty$, alors le système (E) admet une unique solution globale $\omega \in L^\infty(\mathbb{R}_+; L^2 \cap L^\infty)$. De plus la vitesse associée v admet un unique flot $\psi \in \mathscr{C}(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^2)$ défini par l'équation intégrale :*

$$\psi(t, x) = x + \int_0^t v(\tau, \psi(\tau, x))d\tau.$$

De plus ce flot est un homéomorphisme préservant la mesure de Lebesgue et vérifiant pour régularité :

$$\psi(t) - \mathrm{I}d \in \mathscr{C}^{\exp -Ct}.$$

Ce théorème est important dans la mesure où l'on peut définir de manière unique le flot dans un cadre non lipschitzien. Ce qui permet d'expliciter le tourbillon à chaque instant par la méthode des caractéristiques : $\omega(t, x) = \omega^0(\psi^{-1}(t, x))$. On dit dans ce cas que le tourbillon est transporté par le flot. Une des conséquences de la forme explicite du tourbillon est la persistance globale des structures de poches de tourbillon. En d'autres termes, si le tourbillon initial $\omega^0 = \mathbf{1}_\Omega$, avec Ω un domaine borné alors le tourbillon satisfait $\omega(t) = \mathbf{1}_{\Omega^t}$, avec $\Omega^t = \psi(t, \Omega)$. Néanmoins le théorème de Yudovich ne permet pas de prévoir ce qui se passe pour la régularité du bord vu que le flot admet une régularité qui dégénère au cours du temps, qui est d'ailleurs un résultat optimal d'après un exemple de Bahouri-Chemin [**7**]. L'objectif des sections à venir est d'analyser de près ce problème d'abord pour le système d'Euler et je vais jeter la lumière essentiellement sur les contributions de J.-Y. Chemin [**20**] que ce soit pour un bord régulier ou singulier. Je vais ensuite discuter le problème de la stabilité des structures de poches de tourbillon dans le cadre visqueux qui fut initié par R. Danchin [**36**] et poursuivi dans mes travaux [**56, 57**].

3. Poches régulières

3.1. Cas non visqueux. Le problème est le suivant : considérons une donnée initiale de type poche de tourbillon, c'est-à-dire, $\omega^0 = \mathbf{1}_\Omega$ avec Ω un domaine borné dont le bord est régulier. Est-ce que la régularité du bord est préservée au cours du temps ou l'on peut assister à l'apparition de singularités. Cette question fut soulevée par A. Majda dans les années 80', qui a conjecturé la perte instantanée de la régularité et s'attendre même à ce que le bord ne soit plus rectifiable. La réponse définitive est apportée par J.-Y. Chemin qui a démontré la persistance globale en temps de la régularité $\mathscr{C}^{1+\epsilon}$ du bord. Son résultat ne concerne pas seulement les poches de tourbillon mais plutôt des données plus générales dites poches de tourbillon généralisées. La pertinente constatation et qui est d'une extrême importance et à la base du résultat de J.-Y. Chemin est que le contrôle de la norme lipschitz de la vitesse est reliée logarithmiquement à la dérivée tangentielle du tourbillon ; la dérivée normale qui donne lieu à la discontinuité n'intervient pas. Nous allons illustrer partiellement ce principe en montrant sur un exemple particulier de poche que la vitesse associée est lipschitzienne. Prenons $\omega = \mathbf{1}_{D(0,1)}$, où $D(0,1)$ désigne le disque unité. Alors dans ce cas la formule de Green donne :

$$\Delta v = \nabla^{\perp} \mathbf{1}_{D(0,1)} = -T(x) d\sigma(x),$$

avec $T(x)$ est le vecteur tangent unitaire au cercle unité et $d\sigma$ la mesure de surface de $\mathbb{S}^1$. Ainsi la loi de Biot-Savart se réécrit

$$v(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{S}^1} \log |x - e^{i\theta}| \begin{pmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix} d\theta.$$

Nous obtenons aisément grâce à cette formule que la vitesse est de classe $\mathscr{C}^\infty$ en dehors de $\mathbb{S}^1$. Reste maintenant à étudier ce qui se passe pour un point du cercle. Par un argument de symétrie on se ramène au point $x = (1,0)$. Comme $\operatorname{div} v = 0$ et $\operatorname{rot} v \in L^\infty$, alors pour contrôler $\nabla v(x)$ il suffit de contrôler $\nabla v^1(x)$. Un calcul simple donne

$$\begin{aligned} |\nabla v^1(x)| &\leq \frac{1}{2\sqrt{2}\pi} \int_0^{2\pi} \frac{|\sin\theta|}{\sqrt{1-\cos\theta}} d\theta \\ &\leq 1. \end{aligned}$$

Il s'agit maintenant d'introduire le formalisme général des poches de tourbillon élaboré par J.-Y. Chemin. Nous allons voir en particulier que la norme Lipschitz de la vitesse est reliée à une régularité de type $\mathscr{C}^{-\epsilon}$ de la dérivée tangentielle du tourbillon par rapport à une famille de champs de vecteurs bien adaptés. Rappelons que les espaces de Hölder $\mathscr{C}^{-\epsilon}$, avec $0 < \epsilon < 1$ sont les dérivées au sens des distributions des fonctions hölderiennes de classe $\mathscr{C}^{1-\epsilon}$. Nous aurons besoin de quelques définitions.

DÉFINITION 1.2. *Soit $X = (X_i)_{i \in I}$ une famille de champs de vecteurs telle que pour tout $i \in I$, X_i et $\operatorname{div} X_i$ sont dans la classe de Hölder $\mathscr{C}^\epsilon$, avec $0 < \epsilon < 1$. Cette famille est dite admissible si et seulement si,*

$$I(X) = \inf_{x \in \mathbb{R}^d} \sup_{i \in I} \left| X_i(x) \right| > 0.$$

On note

$$\widetilde{\|} X_i \|_{\mathscr{C}^\epsilon} = \|X_i\|_{\mathscr{C}^\epsilon} + \|\operatorname{div} X_i\|_{\mathscr{C}^\epsilon}.$$

Nous définissons l'action de cette famille sur une fonction $u \in L^\infty$ par :

$$\forall\, i \in I,\ \partial_{X_i} u = \operatorname{div}(u X_i) - u \operatorname{div} X_i.$$

Nous allons maintenant introduire la notion d'espace de Hölder anisotrope construit relativement par rapport à une famille de champs de vecteurs donnée $(X_i)_{i \in I}$.

DÉFINITION 1.3. *Soit $X = (X_i)_{i \in I}$ une famille admissible de champs de vecteurs. On définit l'espace $\mathscr{C}^\epsilon(X)$ comme l'ensemble des fonctions bornées u telles que,*

$$\|u\|_{\mathscr{C}^\epsilon(X)} := \frac{1}{I(X)} \Big(\|u\|_{L^\infty} \sup_{i \in I} \widetilde{\|} X_i \|_{\mathscr{C}^\epsilon} + \sup_{i \in I} \|\partial_{X_i} u\|_{\mathscr{C}^{\epsilon - 1}} \Big) < \infty.$$

Cette notion de régularité stratifiée est d'une si grande importance dans l'étude des poches höldériennes. En effet, J.-Y. Chemin établit dans **[20]** une estimation logarithmique stationnaire : elle montre que le contrôle des dérivées directionnelles du tourbillon le long des champs (X_i) dans un espace de Hölder d'indice négatif permet de récupérer un contrôle logarithmique de la norme Lipschitz de la vitesse v :

$$\|\nabla v\|_{L^\infty} \leq C \|\omega\|_{L^2 \cap L^\infty} \log \Big(e + \frac{\|\omega\|_{\mathscr{C}^\epsilon(X)}}{\|\omega\|_{L^2 \cap L^\infty}} \Big). \tag{1}$$

Nous allons vérifier que pour un ouvert borné Ω de classe $\mathscr{C}^{1+\epsilon}$, il existe une famille admissible X_0, telle que $\omega^0 = \mathbf{1}_\Omega \in \mathscr{C}^\epsilon(X_0)$. Par définition d'un bord de classe $\mathscr{C}^{1+\epsilon}$, il existe une fonction $f_0 \in \mathscr{C}^{1+\epsilon}(\mathbb{R}^2)$ telle que $\partial\Omega$ coïncide dans un de ses voisinages V avec l'ensemble des zéros de f_0 et dont le gradient ne s'annule pas dans V. Soit χ une fonction régulière supportée dans V et valant 1 dans un petit voisinage de $\partial\Omega$. On pose

$$X_{0,0} = \nabla^\perp f_0 \quad \text{et} \quad X_{0,1} = (1-\chi)(1,0).$$

Une simple vérification montre que la famille de champs de vecteurs $(X_{0,i})_{i=0}^1$ est admissible et vérifie de plus $\partial_{X_{0,i}}\omega^0 = 0$. Ceci permet en vertu de l'estimation logarithmique d'avoir $\nabla v^0 \in L^\infty$. Reste maintenant à contrôler à chaque instant la norme lipschitz de la vitesse. Pour ce faire on doit construire une famille admissible de champs de vecteurs (X_t) qui détecte à chaque instant la structure de la poche. La manière la plus naturelle est de considérer le transporté de la famille initiale (X_0) par le flot ψ que l'on définit par

$$X_{t,i}(x) = \psi_\star(t)X_{0,i} = \big(\partial_{X_{0,i}}\psi(t)\big)\big(\psi^{-1}(t,x)\big).$$

Il s'en suit que le champ $X_{t,i}$ obéit à l'équation de transport

$$\big(\partial_t + v\cdot\nabla\big)X_{t,i} = \partial_{X_{t,i}}v.$$

Ceci permet en conséquence de montrer que les champs de vecteurs $X_{t,i}$ et $(\partial_t + v\cdot\nabla)$ commutent, qui entraîne à son tour,

$$(\partial_t + v\cdot\nabla)\partial_{X_{t,i}}\omega = 0.$$

D'un autre côté l'incompressibilité de la vitesse donne que la quantité $\mathrm{div}X_{t,i}$ est transportée par le flot,

$$(\partial_t + v\cdot\nabla)\mathrm{div}X_{t,i} = 0.$$

En appliquant les résultats de propagation de régularité dans une équation de transport on obtient l'estimation suivante :

$$\|\omega(t)\|_{\mathscr{C}^\epsilon(X_t)} \lesssim e^{C\|\nabla v\|_{L^1_tL^\infty}}.$$

Il suffit ensuite de combiner cette estimation avec l'estimation logarithmique (1) afin de contrôler pour tout temps la norme Lipschitz de la vitesse. Ceci consiste une esquisse de la démonstration du théorème de J.-Y. Chemin [**20**].

THÉORÈME 1.4. *Soit (X_0) une famille admissible de champs de vecteurs et $\omega^0 \in \mathscr{C}^\epsilon(X_0)$. Alors la solution de Yudovich associée vérifie pour tout $t \in \mathbb{R}_+$,*

$$\omega(t) \in \mathscr{C}^\epsilon(X_t) \quad \text{et} \quad \|\nabla v(t)\|_{L^\infty} \le Ce^{Ct}.$$

Dans le cas d'une poche de tourbillon dont le bord est de classe $\mathscr{C}^{1+\epsilon}$, nous avons la persistance de cette régularité au cours du temps grâce au caractère lipschitzien de la vitesse.

3.2. Cas visqueux. Dans ce paragraphe je vais discuté le résultat obtenu dans [**57**] et qui porte sur la stabilité des structures de poches de tourbillon pour le système de (NS_ν) bidimensionnel. Certes, le terme de dissipation $\nu\Delta\omega_\nu$ brise instantanément la structure de poches de tourbillon mais on peut se demander si les estimations obtenues pour (E) comme la norme Lipschitz de la vitesse restent valables dans le cadre visqueux avec un contrôle uniforme en viscosité évanescente. On peut également se demander s'il y a convergence de $\psi_\nu(t,\partial\Omega)$ vers $\psi(t,\partial\Omega)$, où ψ_ν désigne le flot visqueux. Dans [**35**], R. Danchin apporte une réponse positive en montrant que si Ω est un domaine borné de classe $\mathscr{C}^{1+\epsilon}$, alors le champ v_ν est lipschitzien uniformément en viscosité. En conséquence, il en déduit que le transporté $\psi_\nu(t,\Omega)$ du domaine initial par le flot visqueux est de classe $\mathscr{C}^{1+\epsilon'}$, pour tout $\epsilon' < \epsilon$ avec des résultats de convergence géométrique. La méthode utilisée s'inspire de celle donnée par J.-Y. Chemin dans le cas non visqueux mais il y a une différence majeure entre les deux situations surtout dans le traitement de la dérivée tangentielle $\partial_X\omega$ qui ne vérifie plus une équation de transport mais plutôt une équation de transport-diffusion avec second terme :

$$\big(\partial_t + v\cdot\nabla - \nu\Delta\big)\partial_X\omega = -\nu[\Delta, \partial_X]\omega.$$

Il n'est pas du tout évident si le commutateur est bien défini ici vu que le tourbillon n'est pas trop régulier. Pour surmonter cette difficulté R. Danchin utilise les techniques de para-champs combinées avec un nouvel effet régularisant dans les équations de transport-diffusion de type :

$$(TD_\nu)\begin{cases}\partial_t a + v\cdot\nabla a - \nu\Delta a = f + \nu g\\ a_{|t=0} = a^0,\end{cases}$$

Plus précisément, on peut gagner deux crans de régularité sur g dans les espaces de Besov $\mathscr{B}^\epsilon_{p,\infty}$,

$$\|a(t)\|_{\mathscr{B}^\epsilon_{p,\infty}} \leq C\, e^{C\int_0^t\|\nabla v(\tau)\|_{L^\infty}d\tau}\Big(\|a^0\|_{\mathscr{B}^\epsilon_{p,\infty}} + \|f\|_{\widetilde{L}^1_t\mathscr{B}^\epsilon_{p,\infty}} + \big(1+\nu t\big)\|g\|_{\widetilde{L}^\infty_t\mathscr{B}^{\epsilon-2}_{p,\infty}}\Big). \tag{2}$$

Cet effet régularisant est le coeur de la démonstration mais il est limité aux cas $p < \infty$ ce qui explique la perte artificielle dans la régularité du bord. La démonstration est de type énergétique dont le point essentiel est une estimation de type Bernstein généralisée

$$C2^{2q}\|\Delta_q u\|^p_{L^p} \leq \int_{\mathbb{R}^d}|\nabla\Delta_q u(x)|^2|\Delta_q u(x)|^{p-2}dx.$$

Le but de mon travail **[57]** était de valider l'effet régularisant dans le cas hölderien correspondant au cas limite $p = \infty$. Ceci nous a permis en conséquence de récupérer la perte de la régularité du bord. Je vais me restreindre dans l'énoncé au cas particulier de vraies poches de tourbillon.

THÉORÈME 1.5. *Soient $\epsilon\ \in]0,1[$ et Ω un un ouvert borné dont le bord est une courbe simple de classe $\mathscr{C}^{1+\epsilon}$. Soit v^0 de divergence nulle et dont le tourbillon vaut $\omega^0 = \mathbf{1}_\Omega$. Alors pour tout $\nu \geq 0$ le système (NS_ν) admet une unique solution dans $L^\infty_{loc}(\mathbb{R}_+; W^{1,\infty}(\mathbb{R}^2))$. D'une manière plus précise, il existe une constante C ne dépendant que de ϵ et Ω telle que, pour tout $\nu \geq 0$ et pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, on ait*

$$\|\nabla v_\nu(t)\|_{L^\infty} \leq C(1+\nu)e^{Ct}.$$

De plus, si l'on désigne par $\Omega_\nu(t)$ le transporté de Ω par le flot de v_ν, alors $\partial\Omega_\nu(t)$ est une courbe simple de classe $\mathscr{C}^{1+\epsilon}$. En outre, il existe une paramétrisation régulière γ_ν de la frontière de $\Omega_\nu(t)$ appartenant à $L^\infty_{loc}(\mathbb{R}_+; \mathscr{C}^{1+\epsilon}(\mathbf{S}^1, \mathbb{R}^2))$ telle que, pour tout $\epsilon' < \epsilon$, γ_ν converge vers γ_0 dans l'espace $L^\infty_{loc}(\mathbb{R}_+; \mathscr{C}^{1+\epsilon'}(\mathbf{S}^1, \mathbb{R}^2))$ lorsque ν tend vers zéro.

La démonstration repose essentiellement sur deux nouvelles estimations . La première est une extension de (2) pour le cas limite $p = +\infty$: pour tout $\epsilon \in]-1,1[$,

$$\|a(t)\|_{\mathscr{C}^\epsilon} \leq C\, e^{C\int_0^t\|\nabla v(\tau)\|_{L^\infty}d\tau}\Big(\|a^0\|_{\mathscr{C}^\epsilon} + \|f\|_{\widetilde{L}^1_t\mathscr{C}^\epsilon} + \big(1+\nu t\big)\|g\|_{\widetilde{L}^\infty_t\mathscr{C}^{\epsilon-2}}\Big).$$

REMARQUE. *Dans le cas $g = 0$ et $s \in]-1,1[$ nous avons obtenu l'effet régularisant suivant :*

$$\nu^{\frac{1}{m}}\|a\|_{\widetilde{L}^m_t\mathscr{C}^{s+\frac{2}{m}}} \leq Ce^{C\int_0^t\|\nabla v(\tau)\|_{L^\infty}d\tau}\big(1+(\nu t)^{\frac{1}{m}}\big)\Big(\|a^0\|_{\mathscr{C}^s} + \|f\|_{\widetilde{L}^1_t\mathscr{C}^s}\Big).$$

Nous insistons sur le fait que la fonction g a deux crans de régularité de moins que la donnée initiale et pourtant la régularité initiale est propagée de façon uniforme en viscosité évanescente. La deuxième estimation que j'ai obtenue est un effet régularisant pour l'équation (TD_ν) sans second membre et toujours dans le cas limite $p = +\infty$. Le résultat en question s'énonce comme suit :

THÉORÈME 1.6. *Soit v un champ de vecteurs à divergence nulle et appartenant à $L^1_{\rm loc}(\mathbb{R}_+;W^{1,\infty})$. On se donne une solution a de l'équation de transport-diffusion*

$$(\partial_t + v\cdot\nabla - \nu\Delta)a = 0.$$

Alors il existe une constante $C := C(d)$ telle que

$$\nu 2^{2q}\int_0^t \|\Delta_q a(\tau)\|_{L^\infty}d\tau \leq C\|a^0\|_{L^\infty}\Big(1+\int_0^t\|\nabla v(\tau)\|_{L^\infty}d\tau\Big).$$

Remarquons que ce résultat est bien connu pour l'équation de la chaleur et sa validation pour le modèle de transport-diffusion est moins évidente à cause du terme d'advection qui nécessite un traitement particulier et sa présence est légèrement sanctionnée par une croissance linéaire de la norme Lipschitz de la vitesse. Ce dernier effet est très important dans les applications que ce soit ici pour les poches de tourbillon ou encore dans un autre contexte comme nous allons le voir dans l'étude de la persistance uniforme en viscosité de la régularité Besov $\mathscr{B}_{p,1}^{1+\frac{2}{p}}$ pour (NS_ν) en dimension deux d'espace.

Idée de la démonstration. Les deux résultats évoqués ci-dessus sont obtenus par une nouvelle approche qui consiste à passer en coordonnées lagrangiennes après avoir localisé en fréquence l'équation. Le prix payé est double : en premier lieu on perd la localisation en fréquence à cause de la composition avec le flot. Ceci nous amène fatalement à localiser de nouveau l'équation induisant un nombre de complications techniques . En second lieu, notre opérateur $-\Delta$ est modifié donnant suite à des termes supplémentaires mais heureusement ils se comportent comme des perturbations du laplacien sur des temps petits. Ainsi on parvient au résultat sur un petit intervalle de temps et la globalisation en temps se déroule sans réelle difficulté. Je vais essayer de donner plus d'explications sans rentrer vraiment dans les détails. Pour $q\in\mathbb{N}$, on pose $a_q = \Delta_q a$, alors en localisant l'équation en fréquence on obtient

$$(\partial_t + S_{q-1}v\cdot\nabla - \nu\Delta)a_q = (S_{q-1}v - v)\cdot\nabla a_q - [\Delta_q, v\cdot\nabla]a := f_q.$$

Le traitement du terme source f_q s'effectue sans difficulté et pour alléger notre discussion on peut supposer que $f_q \equiv 0$. On désigne par ψ_q le flot associé au champ régularisé $S_{q-1}v$ et l'on pose $\bar{a}_q(t,x) = a_q(t,\psi_q(t,x))$. Un simple calcul donne

$$(\partial_t - \nu\Delta)\bar{a}_q(t,x) = \nu((\Delta a_q)(t,\psi_q(t,x)) - \Delta\bar{a}_q(t,x)) := g_q.$$

Le terme g_q s'estime comme suit

$$\|g_q(t)\|_{L^\infty} \leq C\nu 2^{2q}V(t)e^{CV(t)}\|a_q(t)\|_{L^\infty},\quad V(t)=\int_0^t\|\nabla v(\tau)\|_{L^\infty}d\tau.$$

Soit $j\in\mathbb{N}$, alors en localisant l'équation de $\bar{a}_q$ et en servant de l'effet régularisant du semi-groupe de la chaleur,

$$\|\Delta_j\bar{a}_q(t)\|_{L^\infty} \leq Ce^{-c\nu t2^{2j}}\|\Delta_j a_q^0\|_{L^\infty} + C\nu 2^{2q}V(t)e^{CV(t)}\int_0^t e^{-c\nu(t-\tau)2^{2j}}\|a_q(\tau)\|_{L^\infty}d\tau.$$

Il s'en suit que

$$\nu\|\Delta_j\bar{a}_q\|_{L^1_tL^\infty} \leq C2^{-2j}\|\Delta_j a_q^0\|_{L^\infty} + C\nu 2^{2(q-j)}V(t)e^{CV(t)}\|a_q\|_{L^1_tL^\infty}. \tag{3}$$

Soit $N \in \mathbb{N}$ un entier qui sera judicieusement choisi à la fin. Alors on a

$$\begin{aligned}
\alpha_q(t) := \nu 2^{2q} \|a_q\|_{L^1_t L^\infty} &= \nu 2^{2q} \|\bar{a}_q\|_{L^1_t L^\infty} \leq \nu 2^{2q} \sum_j \|\Delta_j \bar{a}_q\|_{L^1_t L^\infty} \\
&\leq \nu 2^{2q} \sum_{|j-q|>N} \|\Delta_j \bar{a}_q\|_{L^1_t L^\infty} + \nu 2^{2q} \sum_{|j-q|\leq N} \|\Delta_j \bar{a}_q\|_{L^1_t L^\infty} \\
&:= \mathrm{I}+\mathrm{II}.
\end{aligned}$$

Le premier terme est majoré grâce à l'estimation (3),

$$\mathrm{I} \leq C\|a^0\|_{L^\infty} + C2^{2N} V(t) e^{CV(t)} \alpha_q(t).$$

Le terme II est traité différemment : nous utilisons un lemme de double localisation dû à Vishik **[113]** qui implique en vertu du fait que ψ_q préserve la mesure de Lebesgue,

$$\|\Delta_j(a_q \circ \psi_q)(t)\|_{L^\infty} \leq C2^{-|j-q|} e^{CV(t)} \|a_q(t)\|_{L^\infty}.$$

Ainsi on obtient

$$\mathrm{II} \leq C2^{-N} e^{CV(t)} \alpha_q(t).$$

Finalement on trouve

$$\alpha_q(t) \leq C\|a^0\|_{L^\infty} + Ce^{CV(t)} \big(2^{2N} V(t) + 2^{-N}\big) \alpha_q(t).$$

Il en découle l'existence de deux nombres absolus N et C_0 tels que si $V(t) \leq C_0$, on a

$$\alpha_q(t) \leq C\|a^0\|_{L^\infty}.$$

Ceci donne le résultat sur un petit intervalle de temps et son extension pour des temps arbitraires se fait aisément. Signalons que le principe d maximum $\|a(t)\|_{L^\infty} \leq \|a^0\|_{L^\infty}$ est crucial et permet d'avoir la croissance linéaire en $V(t)$.

4. Poches de tourbillon singulière

4.1. Cas (E). Il est bien connu que si la poche est un carré alors la vitesse n'est lipschtzienne qu'en dehors des coins et son gradient explose à l'approche des singularités comme le logarithme de la distance. La question de savoir si au cours de son évolution la partie singulière de la poche interagit avec la partie régulière est résolue par J.-Y. Chemin dans **[20]**. Il démontre en particulier que l'image par le flot de la partie régulière préserve sa régularité sans aucune perte. L'information importante qui permet de récupérer cette propriété est le caractère lipschitzien de la vitesse en dehors de la partie singulière. Nous allons nous contenter ici de donner un résultat partiel de **[20]** dans le cadre des poches de tourbillon. L'énoncé général requiert une lourdeur technique dans les définitions que nous voulons l'éviter ici.

THÉORÈME 1.7. *Soit $\omega^0 = \mathbf{1}_\Omega$, telle que $\partial\Omega$ est de classe $\mathscr{C}^{1+\epsilon}$ en dehors d'un ensemble singulier Σ_0. Alors pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, $\psi(t, \partial\Omega)$ est de classe $\mathscr{C}^{1+\epsilon}$ en dehors de $\Sigma_t := \psi(t, \Sigma)_0$. De plus*

$$\sup_{0 \leq h \leq \frac{1}{2}} \frac{\|\nabla v(t)\|_{L^\infty((\Sigma_t)^c_h)}}{-\log h} \leq Ce^{\exp Ct},$$

avec $(\Sigma_t)^c_h := \big\{x \in \mathbb{R}^2, d(x, \Sigma_t) \geq h\big\}$.

La démonstration s'inspire de celle du cas régulier sauf qu'il y a plus de complications techniques. Les champs de vecteurs que l'on construit sont dégénérés et s'annulent sur les lieus des singularités et pour ne plus les voir on tronque à une distance h, ce qui amène à travailler avec des champs de vecteurs modelés sur ce paramètre h et le contrôle des quantités en h requiert de la finesse technique. Les deux principaux ingrédients sont : une estimation logarithmique analogue à (1) et certaines propriétés pseudo-locales de la théorie de Littlewood-Paley. Ce résultat fut ensuite généralisé par R. Danchin **[34]** à les poches de classe $\mathscr{C}^{k+\epsilon}$. Il s'avère que la nature de la singularité joue un facteur déterminant dans le comportement de la vitesse : lorsque la poche initiale admet une singularité de type *cusp*, R. Danchin **[33]** montre qu'au cours du temps la vitesse reste lipschitzienne partout, ce qui permet d'identifier la singularité au cours de son évolution : elle ne change pas de nature et reste de type *cusp*. En toute généralité, l'étude de l'évolution de la singularité au cours du temps est un problème assez difficile et reste encore un champ quasiment vierge.

4.2. Cas (NS). Dans **[57]**, je me suis intéressé à la stabilité des poches de tourbillon singulières pour le système de Navier-Stokes bidimensionnel. Il s'agit essentiellement d'étudier la persistance uniforme en viscosité de la régularité de $\psi_\nu(t,\partial\Omega^0)$ et d'apporter des précisions sur la convergence du bord $\psi_\nu(t,\partial\Omega^0)$ vers $\psi(t,\partial\Omega^0)$. Pour y parvenir, on a démontré que la vitesse est lipschitzienne en dehors du transporté des singularités initiales par le flot visqueux et de manière uniforme en viscosité. Plus précisément, nous avons obtenu le résultat suivant.

THÉORÈME 1.8. *Soit Ω un domaine borné de $\mathbb{R}^2$ et $\epsilon \in]0,1[$. On suppose que $\partial\Omega$ est de classe $\mathscr{C}^{1+\epsilon}$ en dehors d'un ensemble fermé Σ. Posons $\omega^0 = \mathbf{1}_\Omega$ et désignons par v_ν la solution de Yudovich de (NS_ν) associée à ω^0. Soit $\psi_\nu(t)$ le flot associé au champ de vecteurs $v_\nu(t)$. Notons pour tout $h>0$,*

$$\Omega_\nu(t)=\psi_\nu(t,\Omega),\ \Sigma_\nu(t)=\psi_\nu(t,\Sigma)\quad\text{et}\quad \big(\Sigma_\nu(t)\big)^c_h=\Big\{x\in\mathbb{R}^2\,;\mathrm{dist}\big(x,\psi_\nu(t,\Sigma)\big)\geq h\Big\}\cdot$$

Alors il existe une constante C dépendant seulement de ϵ et de ω^0, telle que pour tout $t\in\mathbb{R}_+$,

$$\sup_{h\in]0,\frac12]}\frac{\|\nabla v_\nu(t)\|_{L^\infty((\Sigma_\nu(t))^c_h)}}{-\log h}\leq C(1+\nu t)^{\frac{16}{\epsilon}}e^{\exp Ct}.$$

Soit ψ le flot eulérien, alors $\partial\Omega_\nu(t)\backslash\Sigma_\nu(t)$ est une courbe de classe $\mathscr{C}^{1+\epsilon'}$, $\forall\epsilon'<\epsilon$.
De plus, pour tout $h>0$, $\partial\Omega_\nu(t)\cap(\Sigma_\nu(t))^c_h$ converge au sens de la distance de Hausdorff vers l'ensemble $\psi(t,\partial\Omega)\cap\psi(t,\Sigma)^c_h$ dans $\mathbb{R}^2\times\mathbf{S}^1$. Nous signalons qu'on a identifié un point de la partie régulière de la courbe avec un point de $\mathbb{R}^2\times\mathbf{S}^1$, la deuxième composante donne la direction de la tangente à la courbe en ce point.

La démonstration repose sur le formalisme développé par J.-Y. Chemin dans le cadre eulérien et tout particulièrement sur une estimation logarithmique similaire à (1). Cependant l'existence d'un terme dissipatif a tendance à étaler ce qui est confiné et génère plus de difficultés techniques. Ces dernières se manifestent essentiellement lorsqu'il s'agit de propager certaines informations géométriques à travers une équation de transport-diffusion : elles sont brouillées par le laplacien. Comme dans le cas visqueux avec une poche régulière le point clé est de bien contrôler la régularité conormale du tourbillon ω_ν mesurée par rapport à une famille adéquate de champs de vecteurs $X_t=(X_{t,h,\lambda})_{h,\lambda}$ (ici le paramètre h est relié à une troncature loin de l'ensemble singulier) :

$$\big(\partial_t+v\cdot\nabla-\nu\Delta\big)\partial_{X_t}\omega=-\nu[\Delta,\partial_{X_t}]\omega.$$

Il y a une deux principales difficultés pour ce modèle : la première est en connexion avec la définition du commutateur qui n'a aucune raison d'exister ponctuellement en temps car le tourbillon n'est pas trop régulier. La deuxième est liée au fait que la vitesse n'est pas forcément lipschitzienne mais seulement log-lipschitzienne ce qui nous oblige à manipuler des estimations à perte et tout le jeu consiste à récupérer une partie raisonnable de l'information initiale. Nous étions également amenés à utiliser une version Besov de la théorie de Littlewood-Paley pseudo-locale qui exploite l'information que le champ des vitesses est à la fois logarithmiquement lipschitzien et lipscitzien en dehors de l'ensemble singulier. Cette partie est une généralisation du résultat de J.Y. Chemin établi dans le cas höldérien.

Je vais me contenter uniquement d'explorer la réponse à la première problématique. Certes le commutateur n'est pas bien défini à chaque instant mais nous parvenons à y donner sens suite à une moyennisation en temps. Pour se faire nous établissons un effet régularisant pour le tourbillon de type :

PROPOSITION 1.9. *Soit $\omega^0 \in L^1 \cap L^\infty$ alors la solution visqueuse de Yudovich vérifie*

$$\forall q \geq -1, \quad \nu 2^{2q} \|\Delta_q \omega_\nu\|_{L^1_t L^\infty} \leq C(q+2)\|\omega^0\|_{L^\infty}\big(1 + t\|\omega^0\|_{L^1\cap L^\infty}\big).$$

Par rapport à la proposition 1.6 nous avons une perte logarithmique de la fréquence. Ce coût provient manifestement du fait que la solution de Yudovich n'est pas en général mieux que $\mathscr{C}^1_*$:

$$\|v_\nu(t)\|_{\mathscr{C}^1_*} \leq C\|\omega^0\|_{L^1\cap L^\infty}.$$

Il en découle que la moyennisation en temps du tourbillon permet de récupérer presque les deux dérivées consommées par le laplacian dans le commutateur. Là encore une fois le laplacian permet de rétablir le dégât qu'il a provoqué !

Nous allons retourner maintenant à la proposition 1.9 et en discuter brièvement la démonstration. Elle ressemble à celle de la proposition 1.6 et l'idée consiste à localiser en fréquence l'équation sur des couronnes dyadiques de taille 2^q suivi d'un changement de variables lagrangien permettant de se débarrasser du terme du transport. La troncature en fréquence de l'équation donne :

$$\begin{aligned}\Big(\partial_t + S_{q-1}v\cdot\nabla - \nu\Delta\Big)\Delta_q\omega_\nu \quad &= \quad S_{q-1}v\cdot\nabla\Delta_q\omega_\nu - \Delta_q(v\cdot\nabla\omega_\nu)\\ &\overset{déf}{=} \quad \mathscr{R}_q.\end{aligned}$$

La difficulté supplémentaire par rapport au cas visqueux à bord régulier réside dans la vitesse qui n'est pas forcément lipschitzienne mais log-lipschitzienne. Donc il va falloir contrôler convenablement le commutateur :

$$\|\mathscr{R}_q\|_{L^\infty} \leq C\|v\|_{LL}\sum_{j\geq q-3}(j+2)2^{q-j|}\|\Delta_j\omega_\nu\|_{L^\infty}.$$

Ici on désigne par LL la norme log-lipschitz. Nous parvenons pour une fréquence donnée de taille 2^q à boucler nos estimations mais sur un intervalle de temps $[0, T_q]$ ne dépendant que de la fréquence :

$$(q+2)\int_0^{T_q}\|v(\tau)\|_{LL}d\tau \approx C_0.$$

La constante C_0 est absolue. Ceci permet par des itérations faciles de valider l'estimation pour tout temps.

5. Confinement de la vorticité

Dans [55], je me suis intéressé à la répartition de la masse de toute solution de l'équation de transport diffusion,

$$(TD_\nu)\begin{cases}\partial_t a_\nu + v_\nu\cdot\nabla a_\nu - \nu\Delta a_\nu = 0\\ a_{\nu|t=0} = a^0.\end{cases}$$

Le champ de vecteurs v_ν est supposé de divergence nulle. Il est démontré dans [35] que si la vitesse est uniformément lipschitzienne alors la solution a_ν se concentre autour de la solution de l'équation de transport $a(t)$. Pour énoncer ce résultat nous aurons besoin de quelques définitions. Soit A un ensemble de $\mathbb{R}^d$ et h une longueur. On définit les ensembles

$$A^c_h = \big\{x\in\mathbb{R}^d,\, \mathrm{dist}(x,\, A) \geq h\big\} \quad \text{et} \quad (A^c)_h = \big\{x\in\mathbb{R}^d,\, \mathrm{dist}(x,\, A^c) \geq h\big\}.$$

THÉORÈME 1.10 ([**35**]). *Soient $\nu > 0$ et v_ν un champ de vecteurs appartenant à $L^\infty_{loc}(\mathbb{R}_+; \mathrm{Lip}(\mathbb{R}^d))$ et à divergence nulle. On suppose que a_ν vérifie (TD_ν) avec $a^0 \in L^2(\mathbb{R}^d)$. Alors on a pour tout $t > 0$ et $h > 0$:*

(1) $\|a_\nu(t)\|_{L^2((\Omega_{t,\nu})^c_h)} \leq e^{-\frac{h^2}{4\nu t}e^{-4V_\nu(t)}}\|a^0\|_{L^2}$.

(2) *Si $a^0 = 1_\Omega$, alors*

$$\|a_\nu(t) - \mathbf{1}_{\Omega_{t,\nu}}\|_{L^2((\Omega^c_{t,\nu})_h)} \leq 2\|a^0\|_{L^2} \min\Big\{1, C\Big(\frac{\nu t}{h^2}\Big)^{\frac{1}{2}} e^{2V_\nu(t)} e^{-\frac{h^2}{\nu t}e^{-4V_\nu(t)}}\Big\}.$$

avec C est une constante universelle, $V_\nu(t) = \int_0^t \|\nabla v_\nu(\tau)\|_{L^\infty} d\tau$ et $\Omega_{t,\nu} = \psi_\nu(t, \Omega)$.

Comme application dans le cas des poches de tourbillon en dimension 2 on a le résultat suivant : si la poche initiale admet un bord régulier alors on sait que la vitesse est uniformément lipschitzienne et en conséquence on a

$$\|\omega_\nu(t) - \mathbf{1}_{\Omega_{t,\nu}}\|_{L^2((\partial\Omega_{t,\nu})^c_h)} \leq C_0 \min\Big\{1, \Big(\frac{\nu t}{h^2}\Big)^{\frac{1}{2}} e^{e^{\exp C_0 t}} e^{-\frac{h^2}{\nu t}e^{-e^{\exp C_0 t}}}\Big\}.$$

A partir de cette estimation on peut démontrer la convergence L^2 du tourbillon visqueux vers celui d'Euler dans le cas particulier d'une poche de tourbillon :

$$\lim_{\nu \to 0} \|\omega_\nu - \omega\|_{L^\infty_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+; L^2)} = 0.$$

Dans [**55**], nous avons démontré un résultat de convergence L^2 pour des poches de tourbillon qui ont un bord seulement rectifiable. La vitesse associée n'est pas en général lipschitzienne mais quasi-lipschitzienne, i.e., appartenant à l'espace $(\mathscr{C}_{LL}, \|\cdot\|_{LL})$ constitué par les fonctions v vérifiant

$$\|v\|_{LL} = \frac{\|v\|_{L^\infty}}{\ell} + \sup_{0<|x-x'|\leq \ell} \frac{|v(x) - v(x')|}{|x - x'| \log \frac{e\ell}{|x-x'|}} < \infty,$$

où l'on a désigné par ℓ une unité de longueur. Alors nous avons obtenu la décroissance suivante qui est polynomiale et non pas exponentielle.

THÉORÈME 1.11. *Soient (v_ν) une famille de champs de vecteurs de divergence nulle, appartenant à $L^1_{loc}(\mathbb{R}_+; \mathscr{C}_{LL})$ et a_ν une solution de (TD_ν) avec $a^0 \in L^2(\mathbb{R}^d)$. On se donne un temps $T > 0$ et deux nombres réels $\alpha \in (0, 1)$ et $h \in [0, \ell]$. Si ν vérifie*

$$\frac{\nu T}{\ell^2} \leq \min\bigg\{\Big(\frac{h}{C\ell}\Big)^{C\exp\big(C_\alpha V_\nu^2(T)\big)}, \Big(\frac{e^{1-\exp CV_\nu(T)}}{CV_\nu(T)}\Big)^{\frac{4}{1+\alpha}}\bigg\}, \tag{4}$$

alors on aura pour tout temps t appartenant à $[0, T]$

$$\|a_\nu(t)\|_{L^2((\Omega_{t,\nu})^c_h)} \leq C\Big(\frac{\nu t}{\ell^2}\Big)^{\frac{\alpha}{2}} \Big(\frac{C\ell}{h}\Big)^{\exp\big(C_\alpha V_\nu^2(T)\big)} \|a^0\|_{L^2}.$$

De plus, si $a^0 = \mathbf{1}_\Omega$, avec Ω un domaine borné. Alors pour tout h et ν vérifiant la condition (4) et pour tout $t \in [0, T]$, on aura l'estimation suivante

$$\|a_\nu(t) - \mathbf{1}_{\Omega_{t,\nu}}\|_{L^2((\Omega^c_{t,\nu})_h)} \leq C\Big(\frac{\nu t}{\ell^2}\Big)^{\frac{\alpha}{2}} \Big(\frac{C\ell}{h}\Big)^{\exp\big(C_\alpha V_\nu^2(T)\big)} \|a^0\|_{L^2}.$$

Nous avons posé $C_\alpha = C/(1-\alpha)^2$, avec $C := C(d)$ et $V_\nu(t) = \int_0^t \|v(\tau)\|_{LL} d\tau$.

Le corollaire suivant fournit un résultat de convergence forte du tourbillon ω_ν vers ω lorsque la viscosité tend vers zéro. Il est basé sur le théorème 1.11 et un résultat de convergence de $\psi_\nu - \psi$ vers 0 dans l'espace $L^\infty_{loc}(\mathbb{R}_+; L^\infty)$. Le taux de convergence que l'on réussit à expliciter est une puissance de ν qui se dégrade au cours du temps.

COROLLAIRE 1.12. *Soient ω_ν et ω les tourbillons respectifs de (NS_ν) et de (E) tels que, $\omega_\nu(0) = \omega(0) = \omega^0 = \mathbf{1}_\Omega$, avec Ω un domaine borné ayant un bord rectifiable de longueur finie. Alors*

$$\lim_{\nu\to 0^+} \|\omega_\nu - \omega\|_{L^\infty_{loc}(\mathbb{R}_+; L^2(\mathbb{R}^2))} = 0.$$

Plus précisément, il existe $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ strictement décroissante vers zéro et une constante $C > 0$, telles que pour tout $T > 0$ et pour tout ν vérifiant

$$\frac{\nu T}{\ell^2} \leq f(T\|\omega^0\|_{L^1\cap L^\infty}),$$

on aura pour tout $t \in [0, T]$ l'estimation

$$\|\omega_\nu(t) - \omega(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} \leq C_0\Big(\frac{\nu T}{\ell^2}\Big)^{C^{-1}\exp(-C_0 T^2}.$$

De plus, il existe $C_1 > 0$ telle que $\forall h \in [0, \ell]$ et $\forall t \in [0, C_1\|\omega^0\|^{-1}_{L^1\cap L^\infty}[$, on a

$$\lim_{\nu\to 0^+} \|\omega_\nu(t) - \omega(t)\|_{L^\infty((\partial\Omega_t)^c_h)} = 0, \qquad \Omega_t = \psi(t, \Omega).$$

Nous avons eu pour objectif dans **[1]** d'étudier le problème de la répartition spatiale de la masse dans le cas des poches de tourbillon axisymétriques. Nous allons étudier ces structures géométriques avec plus de détails dans le paragraphe 3 du chapitre 4 et l'on va se limiter ici à quelques points caractéristiques : le tourbillon possède une structure particulière $\omega_\nu(t) = \omega^\nu(t, r, z)e_\theta$. Ainsi en identifiant le vecteur ω_ν au scalaire ω^ν, on s'aperçoit que la quantité $a_\nu = \omega_\nu/r$ satisfait l'équation

$$\partial_t a_\nu + v_\nu \cdot \nabla a_\nu - \nu(\partial_r^2 + \partial_z^2 + 3r^{-1}\partial_r)a_\nu = 0. \tag{5}$$

Ce problème a été traité dans **[11]** par Ben Amer et Danchin pour des données initiales $a_{\nu|t=0} = \mathbf{1}_\Omega$, avec Ω un domaine borné régulier axisymétrique, i.e., admettant une symétrie de révolution autour de l'axe (oz). Ils démontrent que a_ν reste concentrée autour de la solution de transport. L'information de base est que dans ce cas la vitesse v_ν est uniformément lipschitzienne par rapport à ν. Dans **[1]**, nous avons établi un résultat semblable lorsque le bord n'est pas régulier. La vitesse n'est plus lipschitziene mais uniformément bornée dans la classe de zygmund $\mathscr{C}^1_* \hookrightarrow \mathscr{C}_{LL}$.

THÉORÈME 1.13. *Il existe une constante $C > 0$, telle que on a les propriétés suivantes.*
Soit $(v_\nu)_\nu$ est une famille de champs de vecteurs axisymétriques appartenant à $L^1_{loc}(\mathbb{R}_+; \mathscr{C}_{LL}(\mathbb{R}^3))$ et de divergence nulle. On suppose que pour tout $T > 0$, on a

$$\widetilde{V}(T) \overset{déf}{=} \sup_{0<\nu\leq 1} \int_0^T \|v_\nu(\tau)\|_{LL} d\tau < +\infty.$$

Soit $a_\nu(t, r, z)$ une solution de (5) avec a^0 axisymétrique dans $L^2(\mathbb{R}^3)$ et dont le support est un compact axisymétrique de $\mathbb{R}^3$. Alors pour tout $\alpha \in]0, \frac{1}{2}[$ et $h \in [0, \ell]$, si ν vérifie

$$\frac{\nu T}{\ell^2} \leq \min\left\{ \Big(\frac{h}{C\ell}\Big)^{C\exp\left(\frac{\widetilde{V}(T)}{1-2\alpha}\right)^2} \Big(\frac{e^{1-\exp C\widetilde{V}(T)}}{C\widetilde{V}(T)}\Big)^{\frac{4}{1+\alpha}} \right\}, \tag{6}$$

on aura pour tout $t \in [0,\, T]$

$$\|a_\nu(t)\|_{L^2((\Omega_{t,\nu})^c_h)} \leq C\Big(\frac{\nu t}{\ell^2}\Big)^{\frac{\alpha}{2}}\Big(\frac{C\ell}{h}\Big)^{\exp\big(\frac{C\widetilde{V}(T)}{1-2\alpha}\big)^2}\|a^0\|_{L^2}.$$

De plus, si $a^0 = \mathbf{1}_\Omega$, avec Ω un domaine borné axisymétrique, alors pour tout h et ν vérifiant (6) et pour tout $t \in [0,\, T]$, on aura l'estimation

$$\|a_\nu(t) - \mathbf{1}_{\Omega_{t,\nu}}\|_{L^2((\Omega^c_{t,\nu})_h)} \leq C\Big(\frac{\nu t}{\ell^2}\Big)^{\frac{\alpha}{2}}\Big(\frac{4e\ell}{h}\Big)^{\exp C\big(\frac{\widetilde{V}(T)}{1-2\alpha}\big)^2}\|a^0\|_{L^2}.$$

Ce théorème permet de montrer un résultat global de limite non visqueuse dans le cadre des poches de tourbillon axisymétriques.

COROLLAIRE 1.14. *Soit Ω un domaine borné axisymétrique tel que $\partial\Omega \cap \{0\} \times \mathbb{R}^2$ est une courbe simple rectifiable de longueur L. Désignons respectivement par ω_ν et ω les tourbillons de (NS_ν) et (E) correspondant à la même donnée initiale $\omega^0 = r\mathbf{1}_\Omega$. Alors, on a*

$$\lim_{\nu\to 0}\|\omega_\nu(t)/r - \mathbf{1}_{\Omega_t}\|_{L^\infty(\mathbb{R}_+;\, L^2)} = 0.$$

Plus présisément, il existe $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ strictement décroissante vers zéro telle que si $\dfrac{\nu T}{\ell^2} \leq f_0(T)$, alors

$$\big\|\omega_\nu(t)/r - \mathbf{1}_{\Omega_t}\big\|_{L^\infty([0,T];\, L^2)} \leq C(L+\ell)\sqrt{\ell}\Big(\frac{\nu T}{\ell^2}\Big)^{C^{-1}e^{-CT^4}}\|\omega^0/r\|_{L^2\cap L^\infty},$$

avec C une constante universelle.

6. Perspectives de recherche

Il est démontré dans **[34]** que si la poche initiale est de type *cusp* alors on n'a pas seulement que cette structure est propagée au cours du temps pour le système d'Euler mais aussi un contrôle lipschitizien de la vitesse. Une question sous-jacente que l'on peut se poser et dont la réponse est loin d'être triviale porte sur la persistance uniforme en viscosité de cette structure pour le système de Navier-Stokes. La démonstration proposée pour le système (E) ne s'adapte pas malheureusement au cas visqueux à cause de la dissipation qui a tendance à brouiller les informations de type géométriques. Il serait alors d'une extrême importance de valider le résultat pour le cas visqueux qui, je pense, va requérir une nouvelle approche et plus de technicité. L'autre question qui reste à explorer porte sur l'évolution d'un bord supposé seulement rectifiable : est-ce qu'il reste rectifiable ou bien bien il y a des enroulements qui peuvent advenir ? Le simulations numériques faites à ce propos par A. Cohen et R. Danchin **[25]** laissent prévoir que le bord reste rectifiable mais pour démontrer un résultat pareil il va falloir développer des outils qui permettent de donner plus de précisions sur l'évolution de la poche et qui est loin d'être fait actuellement.

CHAPITRE 2

Limites non visqueuse et incompressible

Je vais présenter dans ce chapitre les résultats obtenus dans **[62, 64, 65, 42]** et qui traitent essentiellement de deux problématiques. La première est reliée à la limite non visqueuse pour le système de Navier-Stokes 2-d avec des données initiales dans des espaces de Besov qui sont critiques pour le système d'Euler. Par contre la deuxième problématique porte sur la limite incompressible pour le système d'Euler faiblement compressible 2-d avec des données très mal préparées.

1. Limite non visqueuse dans les espaces critiques

Nous avons vu dans le chapitre 1 que le système d'Euler incompressible est localement bien posé dans les espaces de Sobolev H^s, avec $s > \frac{d}{2} + 1$. On peut se demander si l'on peut affaiblir la régularité requise pour l'existence et l'unicité locale pour (E). Il n'est pas du tout clair si l'on peut valider une théorie locale dans l'espace $H^{\frac{d}{2}+1}$ vu qu'il ne s'injecte pas dans l'espace $W^{1,\infty}$. Par contre on peut démontrer l'existence et l'unicité locale dans l'espace de Besov $\mathscr{B}_{2,1}^{\frac{d}{2}+1}$ et plus généralement dans les espaces $\mathscr{B}_{p,1}^{\frac{d}{p}+1}$ qui sont des sous-espaces de $W^{1,\infty}$ et admettant la même échelle, voir par exemple **[17]**. On convient dans la suite de qualifier ces espaces de critiques pour le système (E). L'existence globale de ces solutions en dimension 2 est démontrée par M. Vishik **[113]**. C'est un résultat qui n'est pas trivial et ne découle pas du critère de B-K-M qui est valable pour des régularités sous-critiques. La démonstration repose sur une nouvelle estimation logarithmique liée de manière incontournable à la structure de la vorticité en dimension 2. L'estimation clé est une loi de composition dans les espaces de Besov : pour tout $f \in \mathscr{B}_{\infty,1}^0$ et pour tout difféomorphisme ψ préservant la mesure de Lebesgue,

$$\|f \circ \psi\|_{\mathscr{B}_{\infty,1}^0} \leq C\|f\|_{\mathscr{B}_{\infty,1}^0} \log\left(e + \|\nabla\psi\|_{L^\infty}\|\nabla\psi^{-1}\|_{L^\infty}\right).$$

Ceci permet d'avoir

$$\|\omega(t)\|_{\mathscr{B}_{\infty,1}^0} \leq C\|\omega^0\|_{\mathscr{B}_{\infty,1}^0}\Big(1 + \int_0^t \|\nabla v(\tau)\|_{L^\infty} d\tau\Big). \tag{7}$$

D'un autre côté, on a $\|\nabla v\|_{L^\infty} \lesssim \|v\|_{L^\infty} + \|\omega\|_{\mathscr{B}_{\infty,1}^0}$. Le contrôle de la norme L^∞ de la vitesse peut se faire sans réelle difficulté et par suite un argument de Gronwall permet de contrôler la norme Lipschitz de la vitesse, et donc de prouver l'existence globale.

REMARQUE. *Signalons de passage que Vishik n'a pas traité le cas $p = \infty$ à cause de la non continuité de l'opérateur de Riesz sur L^∞ mais nous avons réussi dans* **[62]** *à valider l'existence globale dans ce cas limite.*

Dans **[64, 65]** nous avons répondu à la question suivante : est-ce qu'on peut avoir globalement en temps des estimations uniformes en viscosité dans les espaces de Besov $\mathscr{B}_{p,1}^{\frac{2}{p}+1}$ pour les solutions de (NS_ν) avec une même donnée initiale et peut-on avoir des résultats de limite non visqueuse ? Notons que pour des données régulières le paysage est quasiment identifié. En effet, A. Majda **[85]** a fourni une réponse positive si $v^0 \in H^s$ avec $s > \frac{d}{2} + 1$ et de plus la famille (v_ν) converge dans L^2

vers la solution d'Euler v avec un taux de convergence majoré par νt. Il a également démontré sous la même hypothèse de régularité que si la solution d'Euler vit jusqu'à l'instant T alors la solution de Navier-Stokes l'est aussi et converge fortement vers la solution d'Euler sur le même intervalle de temps. Le taux de convergence dans l'espace L^2 est de l'ordre νt. Le même résultat persiste encore dans les espaces critiques $\mathscr{B}_{p,1}^{1+\frac{d}{p}}$. Cependant, ce dernier fait est établi sur un petit intervalle de temps même en dimension deux d'espace, voir [**35**]. Notre résultat principal dans [**64, 65**] est le théorème suivant.

THÉORÈME 2.1 ([**64, 65**]). *Soit $p \in [1,\infty]$ et v^0 un champ de vecteurs de $\mathscr{B}_{p,1}^{\frac{2}{p}+1}(\mathbb{R}^2)$ de divergence nulle. Alors le système (NS_ν) possède une unique solution v_ν dans $\mathscr{C}(\mathbb{R}_+;\mathscr{B}_{p,1}^{\frac{2}{p}+1})$ satisfaisant l'estimation uniforme en $\nu \in [0,1]$*

$$\|v_\nu(t)\|_{\mathscr{B}_{p,1}^{\frac{2}{p}+1}} \leq C_0 e^{\exp C_0 t}.$$

De plus, on a

$$\|v_\nu(t) - v(t)\|_{\mathscr{B}_{\tilde{p},1}^{0}} \leq C_0 e^{\exp C_0 t} (\nu t)^{\frac{1}{2}+\frac{1}{\tilde{p}}},$$

avec $\tilde{p} = \max\{p,2\}$ et C_0 est une constante qui dépend uniquement de $\|v^0\|_{\mathscr{B}_{p,1}^{\frac{2}{p}+1}}$ et non pas de la viscosité.

Dans [**64**], nous avons établi le résultat du théorème pour $p \in [1,2]$, qui était ensuite étendu dans [**65**] pour $p > 2$. Les deux approches sont complètement différentes mais s'appuyant toutes les deux sur un contrôle uniforme en viscosité de la norme Lipschitz de la vitesse visqueuse. Je vais esquisser brièvement les deux démonstrations. Dans le premier cas nous utilisons une interpolation entre deux estimations cruciales : la première porte sur un effet régularisant du tourbillon visqueux démontré dans [**57**] :

$$\nu 2^{2q} \int_0^t \|\Delta_q \omega_\nu(\tau)\|_{L^\infty} d\tau \leq C\|\omega^0\|_{L^\infty}\Big(1 + \int_0^t \|\nabla v_\nu(\tau)\|_{L^\infty} d\tau\Big).$$

Par contre la deuxième est une estimation d'énergie de type :

$$\begin{aligned}\|v_\nu(t) - v(t)\|_{L^2} &\leq C\nu e^{C\int_0^t \|\nabla v(\tau)\|_{L^\infty} d\tau} \int_0^t \|v(\tau)\|_{H^2} d\tau \\ &\leq C_0 e^{\exp C_0 t}(\nu t).\end{aligned}$$

Soit $N \in \mathbb{N}$ un entier quelconque alors on démontre que

$$\|\nabla v_\nu\|_{L^1_t L^\infty} \leq C_0 e^{\exp C_0 t}(1 + \nu t 2^{2N}) + C\frac{\|\omega^0\|_{L^\infty}}{\nu 2^{2N}}\Big(1 + \|\nabla v_\nu\|_{L^1_t L^\infty}\Big).$$

En choisissant N de sorte que $C\frac{\|\omega^0\|_{L^\infty}}{\nu 2^{2N}} \approx \frac{1}{2}$ on parvient au résultat souhaité.

REMARQUE. *Cette méthode ne permet pas d'aller au delà de $p = 2$ vu qu'on s'est servi de $v \in H^2$. Or l'injection $\mathscr{B}_{p,1}^{\frac{2}{p}+1} \hookrightarrow H^2$ est valable pourvu que $p \leq 2$.*

Pour valider le résultat dans le cas $p > 2$ il nous a fallu démontrer une estimation logarithmique de type (7) pour le tourbillon visqueux qui satisfait un modèle général de transport-diffusion :

$$(\mathrm{TD}_\nu) \qquad \begin{cases} \partial_t a + v \cdot \nabla a - \nu \Delta a = f \\ a_{|t=0} = a^0. \end{cases}$$

L'estimation que nous avons établi est la suivante :

THÉORÈME 2.2. *Soient $p \in [1,\infty]$, v un champ de vecteurs de divergence nulle appartenant à $L^1_{\rm loc}(\mathbb{R}_+; W^{1,\infty}(\mathbb{R}^d))$ et f une fonction de $L^1_{\rm loc}(\mathbb{R}_+;\mathscr{B}^0_{p,1})$. Alors toute solution a de (TD_ν) satisfait pour tout $t\in\mathbb{R}_+$*

$$\|a(t)\|_{\mathscr{B}^0_{p,1}} \leq C\Big(\|a^0\|_{\mathscr{B}^0_{p,1}} + \|f\|_{L^1_t\mathscr{B}^0_{p,1}}\Big)\Big(1+\int_0^t \|\nabla v(\tau)\|_{L^\infty}d\tau\Big),$$

où C est une constante ne dépendant que de la dimension d et non pas de la viscosité.

L'application de ce théorème dans le cas particulier de l'équation de la vorticité visqueuse ($f=0$) et $p=\infty$ permet d'obtenir une estimation similaire à (7) et ceci est suffisant pour ensuite dériver un contrôle uniforme en ν de la norme Lipschitz de la vitesse visqueuse v_ν, un fait crucial dans la preuve de la persistance de la régularité initiale.
Notons que la démonstration de Vishik est étroitement liée à la structure particulière de l'équation et ne s'applique guère à notre modèle à cause du terme de dissipation. Je vais décrire brièvement la démonstration du théorème 2.2 dans le cas particulier $f=0$. On décompose convenablement la solution a de la manière suivante : $a(t,x)=\sum_{q\geq -1}\bar a_q(t,x)$, où $\bar a_q$ est l'unique solution de

$$\partial_t\bar a_q + u\cdot\nabla\bar a_q - \nu\Delta\bar a_q = 0 \quad \text{et} \quad \bar a_q(0,\cdot)=\Delta_q a^0.$$

En appliquant le principe du maximum on trouve pour tout $p\in[1,\infty]$,

$$\|\bar a_q(t)\|_{L^p} \leq \|\Delta_q a^0\|_{L^p} \tag{8}$$

Par un résultat classique de propagation de la régularité Besov on a

$$\|\bar a_q(t)\|_{\mathscr{B}^{\pm\frac12}_{p,\infty}} \lesssim \|\Delta_q a^0\|_{\mathscr{B}^{\pm\frac12}_{p,\infty}} e^{CV(t)}, \quad \text{avec} \quad V(t):=\|\nabla v\|_{L^1_tL^\infty}.$$

Ceci se réécrit par définition des espaces de Besov : pour tout $j,q\geq -1$

$$\|\Delta_j\bar a_q(t)\|_{L^p} \lesssim 2^{-\frac12|j-q|}\|\Delta_q a^0\|_{L^p}e^{CV(t)}. \tag{9}$$

Nous allons procéder à un argument d'interpolation. Fixons $N\in\mathbb{N}$, alors on a

$$\|\bar a(t)\|_{\mathscr{B}^0_{p,1}} \leq \sum_{|j-q|\geq N}\|\Delta_j\bar a_q(t)\|_{L^p} + \sum_{|j-q|<N}\|\Delta_j\bar a_q(t)\|_{L^p}. \tag{10}$$

Pour estimer la première somme on utilise (9)

$$\sum_{|j-q|\geq N}\|\Delta_j\bar a_q(t)\|_{L^p} \lesssim 2^{-\frac N2}\|a^0\|_{\mathscr{B}^0_{p,1}}e^{CV(t)}.$$

Concernant la deuxième somme de (10) on se sert de (8),

$$\begin{aligned}\sum_{|j-q|<N}\|\Delta_j\bar a_q(t)\|_{L^p} &\lesssim \sum_{|j-q|<N}\|\bar a_q(t)\|_{L^p}\\ &\lesssim N\|a^0\|_{\mathscr{B}^0_{p,1}}.\end{aligned}$$

Ainsi nous obtenons

$$\|a(t)\|_{\mathscr{B}^0_{p,1}} \lesssim \|a^0\|_{\mathscr{B}^0_{p,1}}\Big(2^{-\frac N2}e^{CV(t)}+N\Big).$$

Pour achever la démonstration on choisit $N=\Big[\frac{2CV(t)}{\log 2}\Big]+1$.
La démonstration du taux de convergence du théorème 2.1 repose sur un effet régularisant pour l'équation de transport-diffusion qui généralise un résultat du **[57]**.

THÉORÈME 2.3. *Soient $s \in]-1,1[$, $(p,r,m) \in [1,+\infty]^3$ et u un champ de vecteurs de divergence nulle appartenant à $L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+;\mathrm{Lip}(\mathbb{R}^d))$. Alors il existe une constante $C = C(d,s)$ telle que pour toute solution a du système (TD_ν), on ait*

$$\nu^{\frac{1}{m}}\|a\|_{\widetilde{L}^m_t\mathscr{B}^{s+\frac{2}{m}}_{p,r}} \le Ce^{CV(t)}\big(1+(\nu t)^{\frac{1}{m}}\big)\Big(\|a^0\|_{\mathscr{B}^s_{p,r}} + \|f\|_{L^1_t\mathscr{B}^s_{p,r}}\Big), \qquad \forall t \in \mathbb{R}_+,$$

avec $V(t) = \int_0^t \|\nabla v(\tau)\|_{L^\infty} d\tau.$

Le cas important correspond à $r = 1$ où la moyennisation en temps permet de gagner deux dérivées. Ce fait est prouvé par R. Danchin **[36]** dans le cas $p < \infty$ qui utilise une nouvelle inégalité de Poincaré précisée. Cependant le cas hölderien $p = r = \infty$ est démontré récemment dans **[57]**. La preuve de ce résultat utilise une approche lagrangienne combinée avec des outils fins du calcul paradifférentiel. Nous reprenons ces mêmes idées pour démontrer le théorème ci-dessus.

2. Système d'Euler faiblement compressible

Je vais présenter dans ce paragraphe les résultats obtenus dans **[42]** portant sur le système d'Euler faiblement compressible 2-d isentropique évoluant dans l'espace tout entier. On démontre en particulier que l'on a la convergence vers le système d'Euler incompressible, quand le nombre de Mach tend vers zéro, même pour des données qui ne sont pas uniformément bornées dans les espaces de Sobolev $H^s, s > 2$. Ceci permet par exemple de considérer des régularisations des données de type Yudovich et de justifier le passage à la limite dans ce cadre de faible régularité. Pour commencer nous rappelons que l'état d'un fluide compressible parfait est donné par le champ de vitesses $v(t,x)$, la densité $\rho(t,x)$ et la pression $p(t,x)$ suivant le couplage,

$$\begin{cases} \rho(\partial_t v + v\cdot\nabla v) + \nabla p = 0, \\ \partial_t \rho + v\cdot\nabla\rho = 0. \end{cases}$$

On se place dans le cadre d'un fluide isentropique, i.e., évoluant à entropie constante, ce qui induit la relation $p = \rho^\gamma$, avec $\gamma > 1$ un paramètre fixé. Ce système peut-être symétrisé en introduisant la vitesse du son

$$c := \rho^{\bar\gamma}\sqrt{\gamma}/\bar\gamma, \quad \bar\gamma = (\gamma-1)/2.$$

Ainsi le système s'écrit avec les nouvelles inconnues v et c sous forme

$$\begin{cases} \partial_t v + v\cdot\nabla v + \bar\gamma c\nabla c = 0 \\ \partial_t c + v\cdot\nabla c + \bar\gamma c \operatorname{div} v = 0. \\ (v,c)|_{t=0} = (v_0,c_0), \end{cases}$$

Par la théorie des systèmes hyperboliques symétriques quasi-linéaires on montre que ce système admet une unique solution locale $(v,c) \in \mathscr{C}([0,T];H^s) \cap \mathscr{C}([0,T];\bar c + H^s)$, avec avec $s > \frac{d}{2}+1$ et $\bar c$ une constante. L'explosion en temps finie de certaines solutions régulières est établie même en dimension deux d'espace, voir **[96, 100]**. Pour mettre en évidence la dépendance des inconnues par rapport au nombre de Mach ϵ on fait le changement d'échelle suivant :

$$c_\epsilon(t,x) = c(\epsilon^{-1}t,x), \quad v_\epsilon(t,x) = \epsilon^{-1}v(\epsilon^{-1}t,x).$$

Ainsi on obtient,

$$\begin{cases} \partial_t v_\epsilon + v_\epsilon\cdot\nabla v_\epsilon + \frac{\bar\gamma}{\epsilon^2}c_\epsilon\nabla c_\epsilon = 0 \\ \partial_t c_\epsilon + v_\epsilon\cdot\nabla c_\epsilon + \bar\gamma c_\epsilon \operatorname{div} v_\epsilon = 0 \\ (v_\epsilon,c_\epsilon)|_{t=0} = (v_{0,\epsilon},c_{0,\epsilon}), \end{cases}$$

On suppose également que le fluide est faiblement compressible, ce qui veut dire que la vitesse du son c_ϵ est proche de $c_0 > 0$ et l'on pose

$$v_\epsilon(t,x) = \bar{\gamma} c_0 \tilde{v}_\epsilon(\bar{\gamma} c_0 t, x) \text{ and } c_\epsilon(t,x) = c_0 + \epsilon \bar{\gamma} c_0 \tilde{c}_\epsilon(\bar{\gamma} c_0 t, x).$$

En renommant $\tilde{v}_\epsilon$ en v_ϵ et $\tilde{c}_\epsilon$ en c_ϵ, on trouve finalement le système d'Euler faiblement compressible

$$\begin{cases} \partial_t v_\epsilon + v_\epsilon \cdot \nabla v_\epsilon + \bar{\gamma} c_\epsilon \nabla c_\epsilon + \frac{1}{\epsilon} \nabla c_\epsilon = 0 \\ \partial_t c_\epsilon + v_\epsilon \cdot \nabla c_\epsilon + \bar{\gamma} c_\epsilon \operatorname{div} v_\epsilon + \frac{1}{\epsilon} \operatorname{div} v_\epsilon = 0 \\ (v_\epsilon, c_\epsilon)|_{t=0} = (v_{0,\epsilon}, c_{0,\epsilon}). \end{cases} \tag{11}$$

La question qui se pose naturellement est comment se comporte le système pour des faibles nombres de Mach ? Par un raisonnement formel on s'attend à ce pour le système limite on ait

$$\operatorname{div} v = 0, \nabla c = 0. \tag{12}$$

Ce qui veut dire que l'on récupère à la limite le système d'Euler incompressible.

$$\begin{cases} \partial_t v + v \cdot \nabla v = -\nabla p \\ \operatorname{div} v = 0 \\ v|_{t=0} = v_0. \end{cases} \tag{13}$$

On distingue deux cas suivant que la famille de données initiales vérifie ou non la condition de compatibilité (12). Il y a les données bien préparées pour lesquelles la partie compressible $\operatorname{div} v_{0,\epsilon}$ et acoustique $c_{0,\epsilon}$ convergent fortement vers zéro quand $\epsilon \to 0$. Dans ce cas, S. Klainerman et A.Majda ont démontré dans **[77, 78]** que l'on a existence sur un temps uniforme en ϵ et l'on a même la convergence forte vers l'unique solution d'Euler incompressible. Le cas mal préparé correspond à une famille de données initiales bornées uniformément en ϵ dans des espaces de Sobolev assez réguliers et telles que la partie incompressible de $v_{0,\epsilon}$ converge fortement vers un champ de vecteurs v_0. Dans ce cas on peut justifier le passage à la limite en se servant de la dispersion des ondes acoustiques à travers les estimations de Strichartz, voir **[6, 108]**.
L'objectif de **[42]** est de traiter en dimension deux des données très mal préparées correspondant à des solutions qui convergent vers une poche de tourbillon ou plus généralement vers une solution de Yudovich. Ces solutions ne sont pas uniformément bornées dans les espaces de Sobolev H^{2+s} pour tout $s > 0$, mais elles peuvent cependant exploser lentement en ϵ. Le temps de vie n'est pas non seulement uniformément minoré en ϵ mais aussi il tend vers l'infini. Nous utilisons comme outil principal les estimations de Strichartz qui montrent que les parties acoustique et compressible sont amorties par les oscillations. Nous utilisons également la structure bidimensionnelle à travers la vorticité $\omega_\epsilon = \partial_1 v_\epsilon^2 - \partial_2 v_\epsilon^1$ qui satisfait une équation de transport de type

$$\partial_t \omega_\epsilon + v_\epsilon \cdot \nabla \omega_\epsilon + \omega_\epsilon \operatorname{div} v_\epsilon = 0.$$

Avant d'énoncer les principaux résultats nous allons rappeler la notion de champ stationnaire. Dans **[20]**, il est démontré qu'un champ de vecteurs de divergence nulle dont le tourbillon est borné et à support compact n'est pas forcément dans L^2 mais il est dans un espace de type $\sigma' + L^2(\mathbb{R}^2)$, où

$$\sigma'(x_1, x_2) = \frac{1}{|x|^2} \begin{pmatrix} -x_2 \\ x_1 \end{pmatrix} \int_0^{|x|} \tau g(\tau)\, d\tau, \tag{14}$$

avec $g \in \mathscr{C}_0^\infty(\mathbb{R}_0^+)$ et tel que σ' est une solution stationnaire du système d'Euler incompressible :

$$\partial_t \sigma' = P(\sigma' \cdot \nabla \sigma') = 0,$$

où P désigne le projecteur de Leray sur les champs de divergence nulle. Remarquons que ces champs se comportent comme $1/|x|$ au voisinage de l'infini et $\nabla \sigma' \in H^s(\mathbb{R}^2)$ pour tout $s \in \mathbb{R}$.

Notre premier résultat concerne les solutions de type Yudovich :

THÉORÈME 2.4. *Soit $v_0 \in \sigma' + L^2$ un champ de divergence nulle tel que*

$$\operatorname{rot} v_0 \in L^1 \cap L^\infty.$$

On suppose qu'il existe $s \in]0,1[$ $\alpha < 1$, $\beta < 1/12$ et une constante C_0 independants de ϵ, tels que

$$\begin{aligned} \|\operatorname{rot} v_{0,\epsilon}\|_{L^1\cap L^\infty} &\leq C_0, \\ \|\operatorname{rot} v_{0,\epsilon}\|_{\mathscr{C}^s} &\leq C_0 \exp((\ln \epsilon^{-1})^\alpha), \\ \|(v_{0,\epsilon} - \sigma', c_{0,\epsilon})\|_{H^{s+\frac{11}{4}}} &\leq C_0 \epsilon^{-\beta}, \end{aligned} \tag{15}$$

et

$$\lim_{\epsilon \to 0} \|Pv_{0,\epsilon} - v_0\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} = 0.$$

Alors les temps d'existence T_ϵ des solutions de (11) vérifient

$$T_\epsilon \gtrsim \ln \ln \epsilon^{-1}.$$

De plus, les parties incompressibles convergent vers la solution de Yudovich du système (13) :

$$(Pv_\epsilon - v) \to 0 \quad \text{dans } L^\infty_{\text{loc}}(\mathbb{R}^+; L^2(\mathbb{R}^2);$$

Par contre, les parties compressibles et acoustiques tendent vers zéro :

$$(v_\epsilon - Pv_\epsilon, c_\epsilon) \to 0 \quad \text{dans } L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^+; \operatorname{Lip}(\mathbb{R}^2).$$

Ce théorème permet de traiter des données initiales qui sont des régularisations des données de type Yudovich. Soit v^0 de divergence nulle tel que $v_0 \in \sigma' + L^2$ et $\omega_0 \in L^1 \cap L^\infty$. On se donne une approximation de l'identité $(\rho_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et l'on pose

$$v_{0,\epsilon} = \rho_n * v_0.$$

Si $n = n(\epsilon)$ est choisi de sorte que

$$n^s \leq C_0 \exp((\ln \epsilon^{-1})^\alpha) \tag{16}$$

et

$$n^{s+\frac{11}{4}} \leq C_0 \epsilon^{-\beta},$$

alors les conditions du théorème sont satisfaites pour ϵ suffisamment petit. En conséquence, la famille de solutions (v_ϵ, c_ϵ) converge fortement vers la solution de Yudovich $(v, 0)$. Signalons que la condition (16) découle de (15).

Dans le cas des poches de tourbillon on peut obtenir un résultat meilleur que celui qui donné par le théorème 2.4 : on peut en fait se débarrasser de la condition (16).

THÉORÈME 2.5. *Soit $s \in]0,1[$ et $v_0 \in \sigma' + L^2(\mathbb{R}^2)$ un champ de divergence nulle et tel que*

$$\operatorname{rot} v_0 = \omega_{0,i} \mathbf{1}_\Omega + \omega_{0,e} \mathbf{1}_{\mathbb{R}^2 \setminus \Omega},$$

avec $\omega_{0,i} \in \mathscr{C}^s(\bar{\Omega})$, $\omega_{0,e} \in \mathscr{C}^s \cap L^1(\mathbb{R}^2 \setminus \Omega)$ et Ω un domaine borné de classe $\mathscr{C}^{1+s}$.
On suppose que

$$v_{0,\epsilon} = \rho_{\lfloor \epsilon^{-\frac{1}{15}} \rfloor} * v_0 + w_{0,\epsilon},$$

avec $\operatorname{rot} w_{0,\epsilon} = 0$ pour tout ϵ et tel que

$$\|w_{0,\epsilon}\|_{H^{s+\frac{11}{4}}} + \|c_{0,\epsilon}\|_{H^{s+\frac{11}{4}}} \lesssim \epsilon^{-\frac{1}{9}}.$$

Alors les temps de vie T_ϵ des solutions de (11) vérifient

$$T_\epsilon \gtrsim \ln \ln \epsilon^{-1},$$

les parties incompressibles convergent dans $L^\infty_{loc}(\mathbb{R}^+;\sigma' + L^2)$ *vers l'unique solution d'Euler incompressible avec donnée initiale* v_0*. Les parties compressibles et acoustiques tendent vers zéro dans l'espace* $L^1_{loc}(\mathbb{R}^+;\mathrm{Lip}(\mathbb{R}^2)$.

L'amélioration dans ce cas particulier découle du fait qu'on utilise le formalisme des poches de tourbillon qui fait appel dans le contrôle de la norme Lipschitz de la vitesse à la régularité tangentielle du tourbillon dans un espace hoöldérien de régularité négative : $\mathscr{C}^s$, avec $-1 < s < 0$.

3. Perspectives de recherche

Depuis le travail de Vishik **[114]** on sait que l'on peut relaxer la régularité des données initiales pour le système (E) à des espaces qui ne sont forcément contenus dans les fonctions lipschitziennes et même on autorise des tourbillons non bornés. Il est alors tout-à-fait envisageable d'étendre ces résultat pour (NS_ν) avec bien-sûr des contrôles uniformes en viscosité. Je pense que c'est une piste que l'on peut explorer mais il va falloir abandonner la démarche de Vishik qui est liée à la structure de transport de la vorticité.
D'un autre côté, les résultats de convergence obtenus dans le cas du système d'Euler faiblement compressible ne donnent pas suffisamment d'informations. On peut alors songer à étudier le comportement asymptotique des solutions ainsi que sa durée de validité. Pour ce faire, on peut s'inspirer de la méthode de filtration de Schochet. Une autre question sous-jacente consiste à étudier le même problème en présence d'un terme visqueux sur la vitesse. Il s'agit par exemple d'étudier le problème de passage à la limite quand les deux paramètres ϵ et ν tendent vers zéro et d'établir éventuellement une description asymptotique des solutions.

CHAPITRE 3

Existence globale pour quelques modèles de la mécanique des fluides

Nos allons dans ce chapitre discuter des résultats d'existence et d'unicité globale obtenus pour quelques modèles de la mécanique des fluides, essentiellement en dimension deux d'espace. Les modèles en question sont le système de Boussinesq partiellement visqueux, l'équation quasi-géostrophique critique et sur-critique, le système d'Euler axisymétrique et le système de la magnéto-hydrodynamique. Il s'agit tout particulièrement de démontrer que ces systèmes sont globalement bien posés pour des régularités optimales, dites aussi critiques. Ma discussion va porter en premier lieu sur le système de Boussinesq.

1. Problème de Cauchy pour le système de Boussinesq 2D

Dans cette section, je vais analyser les résultats obtenus dans [**3, 59, 60**] pour le modèle de Boussinesq 2D. Ce dernier est donné par un couplage entre le champ des vitesses $v(t,x)$ et la température $\theta(t,x)$ suivant les équations :

$$(B_{\nu,\kappa}) \qquad \begin{cases} \partial_t v + v\cdot\nabla v - \nu\Delta v + \nabla p = \theta e_2, \\ \partial_t\theta + v\cdot\nabla\theta - \kappa\Delta\theta = 0, \\ \operatorname{div} v = 0. \end{cases}$$

Les deux coefficients ν et κ sont positifs et représentent successivement la viscosité cinématique et la conductivité moléculaire. Ces équations peuvent être obtenues à partir de l'approximation de Boussinesq , dite aussi des faibles perturbations, appliquée au système de Navier-Stokes inhomogène. Elles interviennent dans la modélisation de nombreux phénomènes géophysiques et océanographiques.
Lorsque les deux viscosités sont strictement positives alors l'existence globale pour des données régulières se résout sans difficulté, voir [**13, 51**]. Ceci revient aux effets régularisants relativement puissants qui portent à la fois sur la vitesse et la température. Pour s'en rendre compte il suffit d'écrire l'équation de la vorticité :

$$(\partial_t + v\cdot\nabla - \nu\Delta)\omega = \partial_1\theta. \tag{17}$$

L'équation en θ diffuse fortement de sorte que l'effet du terme $\partial_1\theta$ se trouve amorti et affaibli, ce qui permet par exemple de contrôler la croissance du tourbillon, une quantité clé pour l'existence globale. L'autre cas extrême correspond à deux viscosités nulles : le système d'Euler combiné avec une équation de transport. On peut démontrer que le système est localement bien posé du moment que $v^0, \theta^0 \in H^s$, avec $s > 2$. Cependant le problème régularité/singularité devient plus complexe et demeure jusqu'ici sans issue. Les méthodes d'énergie qui sont à notre disposition montrent rapidement leur limitation. Dans le cas d'un fluide partiellement visqueux, et comme nous allons le voir dans les paragraphes qui suivent, la question est complètement élucidée suite à de récents travaux.

1.1. Cas de la conductivité nulle. Dans ce cas le modèle est réduit à un couplage du système de (NS) avec une équation de transport et la théorie d'existence locale est bien établie pour des données régulières. Un critère d'explosion à la Beale-Kato-Majda est établi pour ce modèle [**10, 99**])

et qui ramène la formation de singularités en temps fini à l'accumulation de la norme L^∞ du tourbillon. Remarquons au passage que si $\theta \equiv 0$ alors on retrouve le système de Navier-Stokes 2D. pour lequel on a existence globale. Dans le cas général le couplage avec la température qui obéit à une équation de transport complique largement la situation : le gradient de θ vérifie une équation de transport avec un terme de *stretching*. Ainsi pour espérer un résultat d'existence globale il va falloir tirer profit de l'unique effet régularisant.
Avant de présenter ma contribution dans ce sujet je vais donner un bref aperçu des résultats existants et qui datent depuis si peu de temps. C'est dans [**84**] que K. Moffatt a mis l'accent sur ce problème et a lancé le débat sur l'existence globale pour le modèle de Boussinesq. Peu de temps après, D. Cordóba, C. Fefferman et R. De La Llave [**32**] ont exclu l'apparition en temps fini de certaines familles de singularités comme celle de type *squirt*. Ils ont montré que l'apparition de ce genre de singularités est reliée à l'explosion de la quantité $\int_0^T \|v(\tau)\|_{L^\infty} d\tau$. Cette éventualité est écartée grâce à l'effet régularisant sur la vitesse. L'existence globale pour des données régulières est résolue récemment par D. Chae [**18**] et T. Y. Hou et C. Li [**54**] de manière indépendante. Dans leur contexte les données initiales u^0 et θ^0 sont supposées appartenir à l'espace de Sobolev H^s, avec $s > 2$. L'approche utilisée s'appuie sur sur deux principaux ingrédients : l'exploitation de l'effet régularisant sur la vorticité conjugué avec une estimation de Sobolev logarithmique. La restriction de la régularité à $s > 2$ est due à la méthode qui requiert que la vitesse et la température soient lipschitziennes.
Notre objectif dans [**59**] est d'affaiblir la régularité des données initiales et de se rapprocher au maximum du résultat d'existence globale pour (NS) avec donnée initiale dans L^2. Nous avons réussi à baisser de deux crans l'indice de régularité de la donnée initiale par rapport au résultat de Chae. De manière plus précise nous avons obtenu le résultat suivant.

THÉORÈME 3.1 (Existence). *Soient $\theta^0 \in L^2$ et v^0 un champ de vecteurs de divergence nulle et appartenant à l'espace H^s avec $s \in [0, 2[$. Alors le système de Boussinesq $(B_{1,0})$ admet une solution faible globale*

$$(v, \theta) \in \mathscr{C}(\mathbb{R}_+; H^s) \cap L^2_{\text{loc}}(\mathbb{R}_+; H^{\min\{s+1,2\}}) \times \mathscr{C}_b(\mathbb{R}_+; L^2).$$

La démonstration de ce théorème d'existence repose d'un côté sur le calcul paradifférentiel qui permet d'avoir des estimations *a priori* et d'un autre côté sur une méthode de compacité classique «à la Leray». Pour $s = 0$, nous avons obtenu un effet régularisant mieux que celui annoncé dans le théorème. En d'autres termes, nous avons l'estimation suivante :

$$\|v\|_{\widetilde{L}^1_t H^2} \leq C_0(1 + t^2), \tag{18}$$

où C_0 est une constante ne dépendant que des quantités $\|v^0\|_{L^2}$ et $\|\theta^0\|_{L^2}$). Cette information nous garantit l'existence et l'unicité globale du flot. Ceci découle du travail de J.Y. Chemin et N. Lerner [**21**].
En ce qui concerne l'unicité de ces solutions nous avons apporté une réponse positive lorsque les données initiales, notamment la température initiale, vérifient des conditions de régularité supplémentaires. Ces conditions sont imposées afin d'avoir $v \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}_+; W^{1,\infty}(\mathbb{R}^2))$, qui est un point clé pour notre preuve d'unicité.

THÉORÈME 3.2 (Existence-Unicité). *Soient $s \in]0, 2]$ et $p \in]2, +\infty]$. Supposons que v^0 est un champ de vecteurs de divergence nulle qui appartient à H^s et $\theta^0 \in \mathscr{B}^0_{2,1} \cap \mathscr{B}^0_{p,\infty}$. Alors le système de Boussinesq $(B_{1,0})$ admet une unique solution faible globale*

$$v \in \mathscr{C}(\mathbb{R}_+; H^s) \cap L^2_{\text{loc}}(\mathbb{R}_+; H^{\min\{s+1,2\}}) \cap L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}_+; \mathscr{B}^2_{2,1}) \quad \textit{and} \quad \theta \in \mathscr{C}(\mathbb{R}_+; \mathscr{B}^0_{2,1} \cap \mathscr{B}^0_{p,\infty}).$$

La démonstration repose sur un contrôle de la norme de v dans $L^1_T W^{1,\infty}$ qui nécessite, outre le calcul paradifférenetiel, l'estimation logarithmique de Vishik. En conséquence de ce théorème on a l'unicité si $\theta^0, v^0 \in H^s$, avec $s > 0$. Dans l'espace d'énergie L^2 le problème est plus sérieux car la vitesse n'est pas lipschitzienne. Dans [**3**], nous avons démontré l'unicité pour un sous-espace de L^2, ayant la même échelle .

THÉORÈME 3.3. *Soient v^0 un champ de divergence nulle qui appartient à $L^2 \cap \mathscr{B}^{-1}_{\infty,1}$ et $\theta^0 \in \mathscr{B}^0_{2,1}$. Alors le système de Boussinesq $(B_{1,0})$ admet une unique solution globale (v, θ), avec*

$$\begin{aligned} &v \in \mathscr{C}(\mathbb{R}_+; L^2 \cap \mathscr{B}^{-1}_{\infty,1}) \cap L^2_{\text{loc}}(\mathbb{R}_+; H^1) \cap L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}_+; \mathscr{B}^1_{\infty,1}), \\ &\theta \in \mathscr{C}_b(\mathbb{R}_+; \mathscr{B}^0_{2,1}) \end{aligned}$$

Il s'agit de montrer que la vitesse est dans $L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}_+, W^{1,\infty})$ et pour ce faire on fait usage de manière intensif du calcul para-différentiel. On utilise au passage que la vitesse est dans $L^2_{\text{loc}}(\mathbb{R}_+, L^\infty)$, qui est une précision importante et qui n'est pas englobée par l'information $L^2_{\text{loc}}(\mathbb{R}_+, \dot{H}^1)$. C'est en fait la limite de l'injection de Sobolev et dont on sait qu'elle n'est pas vraie. Ceci fut découvert par J.-Y. Chemin et I. Gallagher [**23**] pour (NS_ν) 2D et nous avons adapté leur approche pour notre modèle.
L'unicité pour des données seulement L^2 est récemment résolue par R. Danchin et M. Paicu [**37**] par le biais d'estimations avec perte utilisant l'information (18).

1.2. Cas de la viscosité nulle. Dans [**60**] nous avons considéré le problème de Cauchy pour le système de Boussinesq $(B_{0,1})$:

$$\begin{cases} \partial_t v + v \cdot \nabla v + \nabla p = \theta e_2, \\ \partial_t \theta + v \cdot \nabla \theta - \Delta \theta = 0, \\ \operatorname{div} v = 0. \end{cases}$$

Lorsque $\theta^0 = 0$ le système est réduit au système d'Euler 2D dont une discussion détaillée sur l'existence globale a été menée dans le chapitre 1 et 2. Notons en particulier que l'existence globale est assurée sous réserve que $v^0 \in H^s, s > 2$ ou mieux $v^0 \in \mathscr{B}^{\frac{2}{p}+1}_{p,1}$. S'attendre à un résultat pareil pour $(B_{0,1})$ semble alors un espoir légitime. Il existe peu de résultats dans cette direction. Dans [**18**], D. Chae a démontré l'existence globale pour $(\theta^0, v^0) \in H^s \times H^s$, avec $s > 2$. Comme c'est le cas dans la plupart des EDPs d'évolution l'existence globale est fondée sur de bonnes estimations *a priori* dites aussi lois de conservation. Pour le modèle en question on dispose d'une estimation H^1 sur la vitesse : la partie L^2 découle d'une simple estimation d'énergie. Par contre la partie homogène $\|\nabla v(t)\|_{L^2}$ est équivalente à $\|\omega(t)\|_{L^2}$ et que l'on peut contrôler à partir de l'équation du tourbillon conjuguée avec l'effet régularisant sur la température.
Notre objectif dans [**60**] est d'obtenir un résultat similaire pour des vitesses se trouvant dans des espaces de Besov critiques pour Euler et de baisser le mieux possible la régularité de la température. Pour énoncer notre résultat nous aurons besoin d'introduire un nouvel espace de Banach :

$$v \in \mathscr{B}^\infty \iff \|v\|_{\mathscr{B}^\infty} := \|v\|_{L^\infty} + \|\Delta_{-1} v\|_{\dot{\mathscr{B}}^0_{\infty,1}} < \infty.$$

THÉORÈME 3.4. [**60**] *Pour $p \in]1, \infty], r \in]2, \infty[$ on pose*

$$\mathscr{X}^r_p = \begin{cases} \mathscr{B}^{-1+\frac{2}{p}}_{p,1} \cap L^r, & si \quad p < \infty \\ \\ \mathscr{B}^\infty, & si \quad p = +\infty. \end{cases}$$

Soit $v^0 \in \mathscr{B}_{p,1}^{1+\frac{2}{p}}$ un champ de vecteurs à divergence nulle et $\theta^0 \in \mathscr{X}_p^r$. Alors, il existe une unique solution globale (v,θ) pour le système $(B_{0,1})$, telle que

$$v \in \mathscr{C}(\mathbb{R}_+;\mathscr{B}_{p,1}^{1+\frac{2}{p}}) \quad et \quad \theta \in L^\infty_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+;\mathscr{X}_p^r) \cap L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+;W^{1,\infty}).$$

Remarquons que dans notre contexte la situation dégénère et plus de complications techniques apparaissent à cause de la faible régularité des données initiales : d'une part, nous sommes dépourvus des lois de conservations sur la vitesse qui sont importantes et pour en remédier nous avons démontré un nouvel effet régularisant sur la température. D'autre part, comme nous l'avons déjà indiqué le contrôle de $\|\omega(t)\|_{L^\infty}$ ne suffit pas pour propager globalement en temps les régularités de Besov critiques. La quantité qu'il faut contrôler est $\|\omega(t)\|_{B^0_{\infty,1}}$. La première estimation clé est la suivante introduite dans le théorème 2.2 qui généralise l'estimation de Vishik :

$$(19) \qquad \|\omega(t)\|_{\mathscr{B}^0_{\infty,1}} \leq C\big(\|\omega^0\|_{\mathscr{B}^0_{\infty,1}} + \|\theta\|_{L^1_t\mathscr{B}^1_{\infty,1}}\big)\Big(1+\int_0^t \|\nabla v(\tau)\|_{L^\infty}d\tau\Big).$$

Pour espérer avoir une estimation globale de la norme lipschitz de la vitesse on devrait contrôler $\|\theta\|_{L^1_t\mathscr{B}^1_{\infty,1}}$ qui nécessite un effet régularisant adéquat. Ce que nous avons obtenu est valable pour un modèle de transport-diffusion avec un champ de vitesses qui n'est pas nécessairement lipschitzien :

$$(20) \qquad \partial_t a + v\cdot\nabla a - \Delta a = 0; \quad a_{|t=0} = a^0.$$

Plus précisément, nous avons établi le résultat suivant.

THÉORÈME 3.5. *Soit v de divergence nulle et ω son tourbillon. On se donne une solution a de l'équation* (20) *alors il existe une constante C, telle que pour tout $q \in \mathbb{N}, t \in \mathbb{R}$*

$$2^{2q}\int_0^t \|\Delta_q a(\tau)\|_{L^\infty}d\tau \leq C\|a^0\|_{L^\infty}\Big(1+t+(q+1)\|\omega\|_{L^1_tL^\infty} + \|\nabla\Delta_{-1}v\|_{L^1_tL^\infty}\Big).$$

Une fois qu'on a cette estimation il n'est pas difficile d'établir une estimation de $\|\nabla v\|_{L^1_tL^\infty}$. Néanmoins il reste un problème à régler concernant les basses fréquences : c'est-à-dire contrôler la quantité $\|\nabla\Delta_{-1}v\|_{L^1_tL^\infty}$. Lorsque $p<\infty$ on applique le résultat de Caldéron-Zygmund qui donne l'équivalence $\|\nabla v\|_{L^p} \approx \|\omega\|_{L^p}$. Par contre pour $p=+\infty$ la situation est plus subtile et on s'en sort par des arguments d'interpolation. Je vais dire quelques mots sur la démonstration de l'effet régularisant. Elle suit les mêmes idées développées dans le cadre des poches de tourbillon [**56, 57**] : on utilise le passage en coordonnées lagrangiennes combiné avec des outils d'analyse harmonique et de calcul paradifférentiel.

REMARQUES. **1.** *La perte logarithmique en fréquence qui apparaît dans le terme de droite est due au fait que la vitesse n'est pas supposée lipschitzienne. Un résultat semblable est obtenu dans* [**57**] *dans le cadre des poches de tourbillon singulières pour (NS) 2d.*
2. *Lorsque la vitesse est lipschitzienne on obtient une estimation meilleure, déjà démontrée dans* [**56**] *:*

$$(21) \qquad 2^{2q}\int_0^t \|\Delta_q a(\tau)\|_{L^\infty}d\tau \lesssim \|a^0\|_{L^\infty}\Big(1+t+\int_0^t \|\nabla v(\tau)\|_{L^\infty}d\tau\Big).$$

Cependant elle n'est pas très commode dans notre cadre car elle ne permet pas d'avoir une estimation globale en temps de la norme Lipschitz de la vitesse. Dans les meilleures situations on parvient par le biais de (19) à

$$\|\omega(t)\|_{\mathscr{B}^0_{\infty,1}} \leq C_0\Big(1+\int_0^t \|\nabla v(\tau)\|_{L^\infty}d\tau\Big)^{\frac{3}{2}}.$$

Cette estimation donne uniquement une information locale en temps.

2. Le modèle quasi-géostrophique 2D

Nous avons étudié dans [**4, 66**] le problème de Cauchy pour l'équation quasi-géostrophique dissipative 2D qui est un modèle avec une non linéarité quadratique et un terme linéaire non local lorsque $\alpha \neq 2$:

$$(\mathrm{QG}_\alpha): \qquad \partial_t\theta + v\cdot\nabla\theta + |\mathrm{D}|^\alpha\theta = 0 \quad \text{et} \quad v = (-\mathcal{R}_2\theta, \mathcal{R}_1\theta),$$

où $\mathcal{R}_j = \frac{\partial_j}{\sqrt{-\Delta}}, j = 1, 2$ sont les transformations de Riesz, $|\mathrm{D}| = \sqrt{-\Delta}$ et $\alpha \in]0, 2]$. Cette équation est invariante par le changement d'échelle suivant : si θ est une solution de (QG_α) avec donnée initiale θ_0, alors pour tout $\lambda > 0$, la fonction $\theta_\lambda(t, x) = \lambda^{\alpha-1}\theta(\lambda^\alpha t, \lambda x)$ l'est aussi avec donnée initiale $\theta_\lambda(0, x) = \lambda^{\alpha-1}\theta_0(\lambda x)$. Parmi les espaces qui sont invariants par ce *scaling* on cite les espaces $\dot{H}^{2-\alpha}$ ou plus généralement les espaces de Besov $\dot{\mathscr{B}}_{p,r}^{1+\frac{2}{p}-\alpha}$, p, $r \in [1, \infty]$. Ces espaces sont appelés dans la suite critiques. L'exposant $\alpha = 1$ apparaît comme un indice seuil ou critique pour lequel les deux mécanismes d'advection et de diffusion ont des effets comparables. Il n'est pas du tout difficile de montrer l'existence et l'unicité locale de solutions pour des données régulières. Cependant la question de l'existence globale n'est pas complètement résolue et la situation dépend fortement de l'exposant α. On distingue trois situations suivant la position de α par rapport à l'indice critique 1.

2.1. Cas sous-critqiue $\alpha > 1$. L'une des démarches pour démontrer l'existence globale des solutions fortes est de dégager des lois de conservations à un seuil de régularité raisonnable. Dans notre contexte, on dispose d'estimations L^p sur la solution θ : pour tout $p \in [1, \infty]$, on a

$$\|\theta(t)\|_{L^p} \leq \|\theta_0\|_{L^p}.$$

Cette estimation est obtenue par A. Cordoba et D. Cordoba dans [**31**] et reste valable pour toute valeur de $\alpha \in]0, 2]$. Elle découle de la positivité du terme $\int_{\mathbb{R}^2} (|\mathrm{D}|^\alpha f)|f|^{p-2} f dx$ et la démonstration repose sur la représentation intégrale du laplacian fractionnaire, donnée en dimension 2 par

$$|\mathrm{D}|^\alpha f(x) = C_\alpha \mathrm{P.V.} \int_{\mathbb{R}^2} \frac{f(x) - f(y)}{|x-y|^{2+\alpha}} dy. \tag{22}$$

On peut se demander si ces lois de conservations sont suffisamment fortes pour empêcher la formation de singularités en temps finie. Pour le savoir il faut et il suffit, d'après la théorie d'existence locale, de contrôler la quantité $\|\nabla\theta\|_{L^1_t L^\infty}$. Dans [**30**] on a apporté une réponse positive, c'est-à-dire, on a existence globale pour des données régulières prises dans divers espaces fonctionnels. Intuitivement, ceci est lié au fait que la loi de conservation L^∞ se trouve dans une échelle plus haute que l'espace critique $H^{2-\alpha}$. De manière plus concrète, on démontre par l'effet régularisant du semi-groupe de la chaleur $e^{t|\mathrm{D}|^\alpha}$ que la quantité qui joue un rôle important dans le contrôle de la norme Lipschitz de la solution est $\|\theta(t)\|_{L^\infty}$ qui est dominée par sa valeur initiale.

2.2. Cas critique $\alpha = 1$. Pour ce cas qui est critique, la situation se dégrade énormément et la loi de conservation L^∞ est à la même échelle que l'espace critique $\dot{H}^1$. D'ailleurs, les méthodes classiques de type point fixe ne valident l'existence globale que sous une hypothèse de petitesse de la norme $\|\theta_0\|_{L^\infty}$. Pour plus de détails on renvoie à l'article de P. Constantin et *al.* [**29**]. Récemment, A. Kiselev et *al.* [**76**] ont démontré l'existence globale pour des données suffisamment régulières et périodiques. Leur méthode est trop élégante et basée sur un argument de module de continuité. Au lieu de contrôler la nome Lipschitz de θ on contrôle plutôt son module de continuité. Ensuite tout l'enjeu consiste à trouver un module de continuité convenable pour la donnée initiale de sorte que la solution garde ce module au cours du temps. Il y a derrière ça un raisonnement par l'absurde.

Dans [**4**], nous avons démontré dans le cas de l'espace tout entier l'existence et l'unicité globale pour des données de faibles régularités. Notre résultat est le suivant :

THÉORÈME 3.6. *Soit $\theta_0 \in \dot{\mathscr{B}}^0_{\infty,1}$, alors le système ($QG_{\frac{1}{2}}$) admet une unique solution globale telle que*

$$\theta \in \mathscr{C}(\mathbb{R}_+; \dot{\mathscr{B}}^0_{\infty,1}) \cap L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}_+; \mathscr{B}^1_{\infty,1}).$$

REMARQUE. *L'espace $\dot{\mathscr{B}}^0_{\infty,1}$ est défini ici comme la fermeture de la classe de Schwartz dans l'ensemble L^∞ mais par rapport à la norme $\|u\|_{\dot{\mathscr{B}}^0_{\infty,1}} = \sum_{q\in\mathbb{Z}} \|\dot{\Delta}_q u\|_{L^\infty}$. C'est un sous espace des fonctions continues tendant vers zéro à l'infini, noté $\mathscr{C}^0_b$. Ceci permet d'exclure les fonctions périodiques qui se trouvent dans un espace légèrement différent*

$$\mathcal{B}^0_{\infty,1} := \Big\{ u \in \mathcal{S}',\, \|u\|_{\dot{\mathscr{B}}^0_{\infty,1}} < \infty \Big\}.$$

Il y a deux difficultés principales dans la démonstration du théorème. La première réside dans l'existence locale avec ce type de régularité initiale. La méthode de contraction de Picard semble trop limitée pour ce problème vu que l'advection et la dissipation sont du même ordre, donc il va falloir traiter le problème autrement. La deuxième est liée à l'existence globale sans condition de périodicité qui est fondamentale dans les arguments de Kiselev et *al.* Je vais donner plus de précisions sur les solutions proposées pour s'affranchir de ces difficultés. Concernant la construction de solutions locales, le point clé est un effet régularisant pour le modèle de transport-diffusion suivant :

$$(\mathrm{TD}_\alpha) \begin{cases} \partial_t a + v \cdot \nabla a + |\mathrm{D}|^\alpha a = f \\ a_{|t=0} = a^0. \end{cases}$$

Le résultat que nous avons établi est le suivant.

THÉORÈME 3.7. *Soient $s \in]-1,1[$, $\alpha \in]0,2]$, $(p,r) \in [1,+\infty]^2$, $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}_+; \dot{\mathscr{B}}^s_{p,1})$ et v un champ de divergence nulle appartenant à $L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}_+; W^{1,\infty}(\mathbb{R}^2))$. Alors il existe $C := C(s,\alpha)$ telle que pour toute solution a de (TD_α) , on ait*

$$\|a\|_{\widetilde{L}^r_t \dot{\mathscr{B}}^{s+\frac{\alpha}{r}}_{p,1}} \leq C e^{C\int_0^t \|\nabla v(\tau)\|_{L^\infty} d\tau} \Big(\|a^0\|_{\dot{\mathscr{B}}^s_{p,1}} + \|f\|_{L^1_t \dot{\mathscr{B}}^s_{p,1}} \Big).$$

De plus, si $v = \nabla^\perp |\mathrm{D}|^{-1} a$, alors l'estimation ci-dessus est vraie pour tout $s \geq 1$ pourvu que l'on remplace $\|\nabla v\|_{L^\infty}$ par $\|\nabla v\|_{L^\infty} + \|\nabla a\|_{L^\infty}$.

La démonstration de ce résultat s'appuie sur l'approche lagrangienne largement discutée dans le chapitre 1 portant sur les poches de tourbillon. Néanmoins de nouveaux obstacles se dressent et qui sont fortement liés au caractère non locale du laplacian fractionnaire. Le passage en coordonnées lagrangiennes qui a pour but de faire valoir le terme dissipatif sur le terme advectif fait apparaître un commutateur de forme particulière qu'il faut le traiter judicieusement. Le problème en question est résumé dans le lemme suivant qui est démontré dans [**4, 66**].

LEMME 3.8. *Soient $\alpha \in]0,1]$, $v(t,x)$ un champ de vecteurs de divergence nulle appartenant à l'espace $L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}_+; W^{1,\infty})$. Pour tout $q \in \mathbb{Z}$, on note par ψ_q le flot associé au champ régularisé $S_{q-1}v$. Alors pour tout $f \in \dot{\mathscr{B}}^\alpha_{\infty,\infty}$,*

$$\big\| |\mathrm{D}|^\alpha((\Delta_q f) \circ \psi_q) - (|\mathrm{D}|^\alpha \Delta_q f) \circ \psi_q| \big\|_{L^\infty} \leq C e^{CV(t)} V^{\frac{1}{2}}(t) 2^{q\alpha} \|\Delta_q f\|_{L^\infty},$$

avec $V(t) = \|\nabla v\|_{L^1_t L^\infty}$.

Remarquons d'abord que lorsque $\alpha = 2$, on a $|\mathrm{D}|^2 = -\Delta$ et le calcul devient explicite à l'aide de la règle de dérivation de Leibniz. Par contre le problème change radicalement lorsque l'exposant α est en dessous de cet indice vu que l'opérateur en question devient non local. Pour établir le résultat du lemme on se sert de la représentation (22), moyennant la propriété de conservation de la mesure de Lebesgue par le flot régularisé, donnant lieu à une forme explicite du commutateur. Ceci est ensuite combiné avec la caractérisation suivante de l'espace de Besov homogène $\dot{\mathscr{B}}^{s}_{\infty,1}$, avec $s \in]0,1[$

$$\|u\|_{\dot{\mathscr{B}}^{s}_{\infty,1}} \approx \int_{\mathbb{R}^2} \frac{\|u(\cdot - x) - u(\cdot)\|_{L^\infty}}{|x|^{2+s}} dx\cdot$$

En pratique on prend $s = \alpha$, ce qui va limiter le résultat à $\alpha < 1$. Pour recouvrir les autres cas on utilise la décomposition suivante (on pose $f_q := \Delta_q f$),

$$\begin{aligned} |\mathrm{D}|^{\alpha}(f_q \circ \psi_q) - (|\mathrm{D}|^{\alpha} f_q) \circ \psi_q &= |\mathrm{D}|^{\frac{\alpha}{2}} \{ (|\mathrm{D}|^{\frac{\alpha}{2}} f_q) \circ \psi_q \} - \{ (|\mathrm{D}|^{\frac{\alpha}{2}} (|\mathrm{D}|^{\frac{\alpha}{2}} f_q) \} \circ \psi_q \\ &+ |\mathrm{D}|^{\frac{\alpha}{2}} \{ |\mathrm{D}|^{\frac{\alpha}{2}} (f_q \circ \psi_q) - (|\mathrm{D}|^{\frac{\alpha}{2}} f_q) \} \circ \psi_q \} \\ &= \mathrm{I}+\mathrm{II}. \end{aligned}$$

Pour le premier terme on se ramène à $\alpha < 1$. Par contre le traitement du deuxième terme est un peu laborieux et on fait appel à des outils d'analyse harmonique.
Une fois établi le théorème 3.6, l'existence et l'unicité locale se font de manière standard par exemple à travers un schéma itératif. En outre, nous obtenons un effet régularisant ponctuel en temps de type : si T^* désigne le temps maximal d'existence alors pour tout $T < T^*$

$$t^{\beta} \theta(t) \in \mathscr{C}([0,T]; \dot{\mathscr{B}}^{\beta}_{\infty,1}).$$

Ainsi la solution devient régulière du moment qu'on décolle de zéro et ainsi la question de la régularité ne se pose quasiment pas pour l'existence globale. Pour avoir $T^* = \infty$, on suit la méthode proposée par Kiselev et *al.* et la périodicité est remplacée par la décroissance à l'infini.

2.3. Cas sur-critique $\alpha < 1$**.** L'existence globale des solutions fortes pour des données arbitraires est un problème très complexe et d'un niveau de difficulté comparable au cas non visqueux. Néanmoins l'existence globale est assurée pour des données petites dans certains espaces critiques. Dans **[19]**, D. Chae et J. Lee ont démontré l'existence globale pour des données initiales petites dans l'espace de Besov critique $\dot{\mathscr{B}}^{2-\alpha}_{2,1}$. Ce résultat a été étendu par N. Ju **[69]** à l'espace $\dot{H}^{2-\alpha}$. Le point commun entre ces espaces c'est qu'ils sont construits sur l'espace de Lebesgue L^2. C'est un cadre où l'effet régularisant est facile à décrire par la formule de Parseval. Par rapport aux espaces de Besov construits sur L^p, il y a peu de résultats dans la littérature. On peut citer les travaux de J. Wu **[119, 120]** dans lesquels il démontre l'existence globale pour des données petites dans les espaces $\mathscr{C}^r \cap L^p$, avec $p, r > 1$, mais ils ne sont pas de régularité optimale.
Dans **[66]**, nous nous sommes intéressés au problème de Cauchy dans les espaces de Besov critiques $\mathscr{B}^{1+\frac{2}{p}-\alpha}_{p,1}$, avec $p \in [1,\infty]$. Nous avons validé la théorie locale pour des données arbitraires avec un résultat d'existence globale pour des données petites. Notre résultat est le suivant :

THÉORÈME 3.9 (**[66]**). *Pour $\alpha \in]0,1[$ et $p \in [1,\infty]$ on définit les espaces*

$$\mathcal{X}_p = \begin{cases} \mathscr{B}^{1+\frac{2}{p}-\alpha}_{p,1}, & si \quad p < \infty, \\ \mathscr{B}^{1-\alpha}_{\infty,1} \cap \dot{\mathscr{B}}^{0}_{\infty,1}, & sinon. \end{cases}$$

Alors, pour tout $\theta^0 \in \mathcal{X}_p$ il existe un temps $T > 0$, tel que l'équation (QG_α) admet une unique solution

$$\theta \in \mathscr{C}([0,T]; \mathcal{X}_p) \cap L^1_T \dot{\mathscr{B}}^{1+\frac{2}{p}}_{p,1}.$$

En outre, il existe une constante absolue $\epsilon > 0$, telle que si

$$\|\theta^0\|_{\dot{B}^{1-\alpha}_{\infty,1}} \leq \epsilon,$$

alors on peut prendre $T = +\infty$.

Comme c'était remarqué avant dans la cas critique $\alpha = 1$, la théorie locale ne peut pas se faire par une méthode de contraction via le semi-groupe de la chaleur car la convection consomme plus de régularité que celle offerte par la dissipation. Pour contourner cette difficulté nous avons établi un effet régularisant qui est donné par le théorème 3.7 et qui permet d'avoir un contrôle de la norme $\|\nabla\theta\|_{L^1_t L^\infty}$ globalement en temps lorsque la donnée est petite. Encore une fois le passage en coordonnées lagrangiennes permet de recouvrir des cas par rapport auxquels les méthodes d'énergie usuelles semblent impuissantes, surtout pour le cas limite $p = +\infty$. On souligne que la condition de petitesse porte sur la donnée initiale dans l'espace critique $\dot{\mathscr{B}}^{1-\alpha}_{\infty,1}$ qui contient tous les espaces de Besov critiques $\{\dot{\mathscr{B}}^{1+\frac{2}{p}-\alpha}_{p,1}\}_{p\in[1,\infty]}$.

REMARQUES. **1.** *Le temps d'existence locale qu'on a établi n'est pas lié à la norme de la donnée initiale mais plutôt à sa forme. Il est minoré par*

$$\sup\Big\{t \geq 0;\ \sum_{q\in\mathbb{Z}}(1 - e^{-ct2^{q\alpha}})^{\frac{1}{2}}2^{q(1-\alpha)}\|\Delta_q\theta^0\|_{L^\infty} \leq \eta\Big\},$$

où η et c sont des constantes absolues.

é. *Dans le cas limite $p = \infty$, on rajoute une condition supplémentaire de type $\theta^0 \in \dot{\mathscr{B}}^0_{\infty,1}$ afin de pouvoir contrôler les basses fréquences de la vitesse v. En effet l'opérateur de Riesz n'est pas continu sur l'espace inhomogène $\mathscr{B}^0_{\infty,1}$ mais sur sa version homogène.*

3. *Un résultat analogue au théorème* 3.9 *est indépendamment obtenu par Q. Chen, C. Miao et Z. Zhang* **[24]** *dans les espaces de Besov $\dot{B}^{1+\frac{2}{p}-\alpha}_{p,r}$, avec $p, r < \infty$. Leur résultat est plus performant lorsque $p < \infty$: on peut choisir $r \in [1, \infty[$. Par contre notre résultat est meilleur sur les deux points suivants : le premier concerne leur condition de petitesse qui est reliée à l'espace des données initiales et non pas à l'espace limite $\dot{\mathscr{B}}^{1-\alpha}_{\infty,1}$. Le deuxième point porte sur le cas limite $p = \infty$ qui reste hors d'atteinte par leur approche. Elle est différente de la notre et basée sur une inégalité de Bernstein à la Danchin (voir aussi* **[36, 93]***) qui donne lieu à des estimations explosives en p.*

3. Fluide axisymétrique sans swirl

Dans cette section je vais discuter les résultats obtenus dans **[5, 67]**, portant sur l'existence et l'unicité globale pour le système d'Euler et de Navier-Stokes incompressibles en dimension 3. Bien-entendu le problème dans toute sa généralité est loin d'être résolu et c'est même l'un des problèmes importants des EDPs. Cependant on peut donner une réponse positive dans un cadre retstreint où les données initiales ont une symétrie cylindrique et sans compostante angulaire. Dans **[5]**, nous démontrons l'existence globale pour le système (E) avec des données initiales de régularité critiques. Tandis que dans **[67]**, nous démontrons la persistance de la régularité uniformément en viscosité.

3.1. Cas (E). Nous allons d'abord rappeler la notion de champs axisymétriques ainsi que certaines de leurs particularités. Un champ de vecteurs v est dit axisymétrique sans *swirl* s'il prend la forme suivante :

$$v(x,t) = v^r(r,z,t)e_r + v^z(r,z,t)e_z, \quad x = (x_1, x_2, z), \quad r = (x_1^2 + x_2^2)^{\frac{1}{2}},$$

où (e_r, e_θ, e_z) désigne la base cylindrique de $\mathbb{R}^3$. Il n'est pas difficile de voir que cette structure géométrique persiste au cours du temps. Par contre ce qui caractérise les champs de vecteurs axisymétriques à divergence nulle est la structure de la vorticité qui admet uniquement une composante angulaire :

$$\omega = (\partial_z v^r - \partial_r v^z)e_\theta.$$

Ainsi le terme de *stretching*, qui est l'obstacle réel dans la compréhension de la dynamique de la vorticité, est réduit à un vecteur qui est colinéaire à la vorticité :

$$\omega \cdot \nabla v = \frac{v^r}{r}\omega.$$

Il en découle que,

$$\partial_t \omega + (v^r \partial_r + v^z \partial_z)\omega = \frac{v^r}{r}\omega. \tag{23}$$

On a deux constations à faire : la première est que les composantes de la vorticité sont dissociées l'une de l'autre. Par contre la deuxième, et c'est ce qui fait l'importante particularité du cas axisymétrique, la quantité ω/r est simplement transporté par le flot, *i.e.*,

$$(\partial_t + v \cdot \nabla)\frac{\omega}{r} = 0. \tag{24}$$

Comme conséquence de l'incompressibilité du flot, nous avons

$$\forall p \in [1, \infty], \qquad \|\omega/r\|_{L^p} = \|\omega^0/r\|_{L^p}.$$

Ces lois de conservations se situent sur une bonne échelle et ont permis M. R. Ukhovskii et V. I. Iudovich **[68]** d'établir l'existence et l'unicité globale lorsque la donnée initiale est dans l'espace de Sobolev $H^s, s > \frac{7}{2}$. En effet, il suffit d'après le critère de B-K-M de contrôler $\|\omega(t)\|_{L^\infty}$, mais de l'équation (23) on tire

$$\|\omega(t)\|_{L^\infty} \leq \|\omega^0\|_{L^\infty} + \int_0^t \|v(\tau)\|_{L^\infty} \|\omega/r(\tau)\|_{L^\infty} d\tau.$$

Il s'agit ensuite de combiner cette inégalité avec la loi de conservation L^∞ et le fait que $\|v\|_{L^\infty} \lesssim \|v\|_{L^2} + \|\omega\|_{L^\infty}$. Il ne reste enfin qu'à conclure avec le lemme de Gronwall. On signale que la limitation sur l'indice de régularité est dû à la contrainte $\frac{\omega_0}{r} \in L^\infty$ et ce résultat n'est pas optimal sur l'échelle de régularité des solutions de Kato : il y a une dérivée qui manque. Por s'affranchir de cette limitation T. Hirota et T. Yanagisawa **[53]**se sont basés sur le contrôle de $\|\frac{v^r}{r}\|_{L^\infty}$ au lieu de $\|\frac{\omega}{r}\|_{L^\infty}$. Pour se faire ils ont découvert une sorte de loi de Biot-Savart qui lie $\frac{v^r}{r}$ à $\frac{\omega}{r}$:

$$|v^r/r| \lesssim \frac{1}{|\cdot|^2} \star \frac{|\omega|}{r}. \tag{25}$$

Ceci donne en vertu des inégalités de convolution,

$$\|v^r/r\|_{L^\infty} \leq C\|\omega/r\|_{L^p \cap L^q},$$

pour tout $p < 3 < q$. l'existence d'un tel couple (p, q) est une conséquence des injections de Sobolev :

$$\omega/r \in H^{s-2} \hookrightarrow L^2 \cap L^{\frac{6}{7-2s}}.$$

Dans **[5]**, nous avons étudié l'existence globale lorsque les données initiales sont dans des espaces de Besov $\mathscr{B}_{p,1}^{\frac{3}{p}+1}$ pour lesquels on a une bonne théorie locale **[17]**. Nous convenons d'appeler ces espaces critiques dans la mesure où ils s'injectent dans $W^{1,\infty}$ et admettant les mêmes échelles. Avec ces espaces le critère de BKM n'est pas applicable donc il va falloir contrôler la norme Lipschitz de la vitesse ou mieux encore $\|\omega\|_{\mathscr{B}^0_{\infty,1}}$. Remarquons que le même problème en dimension 2, et qui est discuté dans le chapitre 2, est loin d'être trivial. Le résultat principal de **[5]** est le suivant :

THÉORÈME 3.10 ([5]). *Soient $p \in [1,\infty]$ et v^0 un champ de vecteurs axisymétrique de divergence nulle et appartenant à $\mathscr{B}_{p,1}^{1+\frac{3}{p}}$ tel que son tourbillon $\omega^0 \in L^{3,1}$. Alors le système d'Euler (E) admet une unique solution globale*

$$v \in \mathscr{C}(\mathbb{R}_+; \mathscr{B}_{p,1}^{1+\frac{3}{p}}).$$

REMARQUE. *Pour $p \in [1,3[$ l'hypothèse $\omega^0 \in L^{3,1}$ découle de la condition $v^0 \in \mathscr{B}_{p,1}^{1+\frac{3}{p}}$, car $\mathscr{B}_{p,1}^{\frac{3}{p}-1} \hookrightarrow L^{3,1}$. Cette dernière inclusion peut s'obtenir par une interpolation entre les injections de Besov.*

La démonstration repose sur deux types d'estimations *a priori*. D'un côté, il y a des estimations facile à obtenir comme $\|\omega(t)\|_{L^\infty}$ et $\|v(t)\|_{L^\infty}$. De l'autre côté il y a des estimations difficiles comme pour la quantité $\|\omega(t)\|_{\mathscr{B}^0_{\infty,1}}$. Par rapport au premier type d'estimations, on part de la simple constatation que $\frac{1}{|x|^2} \in L^{\frac{3}{2},\infty}$. Ceci donne par dualité et grâce à (25)

$$\begin{aligned} \|v^r(t)/r\|_{L^\infty} &\leq C\|\omega(t)/r\|_{L^{3,1}} \\ &\leq C\|\omega^0/r\|_{L^{3,1}}. \end{aligned}$$

Ceci permet de récupérer un contrôle de $\|\omega(t)\|_{L^\infty}$. Pour estimer $\|v(t)\|_{L^\infty}$, on applique l'estimation suivante démontrée par P. Serfati :

$$\|v(t)\|_{L^\infty} \leq Ce^{Ct\|\omega\|_{L^\infty_{t,x}}}.$$

Le point le plus délicat est de contrôler la quantité $\|\omega(t)\|_{\mathscr{B}^0_{\infty,1}}$. Je vais essayer d'analyser un peu la difficulté qui subsiste avec les méthodes usuelles. Si l'on veut par exemple appliquer l'estimation de Vishik à l'équation de la vorticité, on trouve

$$\|\omega(t)\|_{\mathscr{B}^0_{\infty,1}} \leq \Big(\|\omega^0\|_{\mathscr{B}^0_{\infty,1}} + \int_0^t \|\omega \cdot \nabla v(\tau)\|_{\mathscr{B}^0_{\infty,1}} d\tau\Big)\Big(1 + \int_0^t \|\nabla v(\tau)\|_{L^\infty} d\tau\Big).$$

Dans les meilleurs cas nous allons obtenir une estimation quadratique, ce qui ne permet pas d'avoir une estimation globale en temps. Donc il faut s'y prendre autrement et c'es là que la structure géométrique de la vitesse et de son tourbillon intervient. Le point clé est la décomposition suivante qui est une forme d'interpolation :

PROPOSITION 3.11. *Soit ω le tourbillon associé à la solution axisymétrique de (E). Alors il existe une famille de champs de vecteurs $(\tilde{\omega}_q)_{q\geq -1}$, telle que*

$$\omega(t,x) = \sum_q \tilde{\omega}_q(t,x), \quad \operatorname{div} \tilde{\omega}_q = 0,$$

$$\|\tilde{\omega}_q(t)\|_{L^\infty} \lesssim \|\Delta_q\omega^0\|_{L^\infty} e^{Ct\|\omega^0/r\|_{L^{3,1}}},$$

$$\|\Delta_j\tilde{\omega}_q(t)\|_{L^\infty} \lesssim 2^{-|j-q|}\|\Delta_q\omega^0\|_{L^\infty} e^{CU(t)}, \quad U(t) = \int_0^t \|v(\tau)\|_{\mathscr{B}^1_{\infty,1}} d\tau.$$

Avant de discuter les idées de la démonstration laissons-nous voir comment obtenir une estimation de la norme lipschitzienne de la vitesse, qui est suffisante pour avoir l'existence globale. On écrit,

$$\|v(t)\|_{\mathscr{B}^1_{\infty,1}} \leq \|v(t)\|_{L^\infty} + \|\omega(t)\|_{\mathscr{B}^0_{\infty,1}}.$$

Maintenant pour estimer la vorticité on introduit un paramètre d'optimisation N et l'on écrit

$$\begin{aligned} \|\omega(t)\|_{\mathscr{B}^0_{\infty,1}} &\leq \sum_{|j-q|\leq N} \|\Delta_j\tilde{\omega}_q(t)\|_{L^\infty} + \sum_{|j-q|>N} \|\Delta_j\tilde{\omega}_q(t)\|_{L^\infty} \\ &\lesssim \|\omega^0\|_{\mathscr{B}^0_{\infty,1}} \Big(Ne^{Ct} + 2^{-N}e^{U(t)}\Big). \end{aligned}$$

En choisissant $N \approx U(t)$, on obtient une estimation à la Gronwall.
Concernant la démonstration de la proposition on décompose le tourbillon sur la famille $(\tilde{\omega}_q)_{q\geq -1}$ donnée par

$$(\partial_t + v \cdot \nabla)\tilde{\omega}_q = \tilde{\omega}_q \cdot \nabla v, \quad \tilde{\omega}_q(t=0) = \Delta_q \omega^0.$$

Grâce à la structure de cette équation combinée avec le fait que u est un champ axisymétrique, on démontre les propriétés géométriques suivantes :

$$\operatorname{div} \tilde{\omega}_q(t) = 0, \quad \tilde{\omega}_q \wedge e_\theta = 0, \quad \tilde{\omega}_q \cdot \nabla v = \tilde{\omega}_q v^r / r. \tag{26}$$

Ces propriétés vont jouer un rôle important pour démontrer les propriétés de la proposition. On fait également usage de manière intensive du calcul paradifférentiel.

3.2. Cas de (NS_ν). Il est bien connu que la structure de champs axisymétriques est préservée pour les solutions fortes de Fujita-Kato. L'opérateur de Laplace ne détruit pas la géométrie initiale grâce à sa commutation avec les isométries. Il est même démontré dans **[109]** que pour ce type de solutions l'existence est globale même avec une régularité critique $\dot{H}^{\frac{1}{2}}$. Nous venons de voir dans le pragraphe précédent que le système d'Euler admet une unique solution globale lorsque les données initiales sont axisymétriques et de régularité critique $\mathscr{B}_{p,1}^{\frac{3}{p}+1}$. Alors il est tout-à-fait naturel d'étudier dans ces espaces le problème de la limite non visqueuse : persistance uniforme en viscosité de la régularité initiale et vitesse de convergence. Rappelons qu'un travail semblable a était mené dans le cas de la dimension deux, voir **[64, 65]**. Le résultat que nus avons obtenu est le suivant.

THÉORÈME 3.12. *Soient $p \in [1, +\infty]$ et v_0 un champ de vecteurs axisymétriques de divergence nulle tels que,*

1) $v_0 \in \mathscr{B}_{p,1}^{1+\frac{3}{p}}$,
2) $\frac{\omega_0}{r} \in L^{3,1}$.

Alors il existe une unique solution globale axisymétrique $v_\nu \in \mathscr{C}\left(\mathbb{R}_+; \mathscr{B}_{p,1}^{1+\frac{3}{p}}\right)$ pour le système de Navier-Stokes, avec

$$\|v_\nu(t)\|_{\mathscr{B}_{p,1}^{1+\frac{3}{p}}} \leq C_0 e^{\exp C_0 t}$$

où C_0 est une constante ne dépendant que de la donnée initiale et non pas de la viscosité.
De plus, on a le résultat de limite non visqueuse :

$$\|v_\nu - v\|_{\mathscr{B}^0_{\max(p,3),1}} \leq C_0 e^{\exp C_0 t} (\nu t)^{\frac{1}{2} + \frac{3}{2\max(p,3)}}, \quad p \in [1, \infty].$$

La démonstration repose sur une estimation de la norme Lipschitz de v_ν, uniformément en viscosité. Pour se faire, on s'est inspiré de la méthode développée dans le cadre d'Euler **[5]** afin de valider une décomposition de ω_ν semblable à celle de la proposition 3.11. La décomposition que nous avons obtenue est $\omega_\nu(t) = \sum_{q\geq -1} \tilde{\omega}_{q,\nu}$, avec

$$\partial_t \omega_{q,\nu} + v_\nu \cdot \nabla \omega_{q,\nu} - \nu \Delta \omega_{q,\nu} = \omega_{q,\nu} \cdot \nabla v, \quad \omega_{q,\nu}(t=0) = \Delta_q \omega^0.$$

L'une des étapes clé de la démonstration est d'obtenir la persistance de certaines propriétés géométriques similaires à (26. Ce que nous craignons est que la structure du laplacian détruit ces propriétés géométriques et brouille les informations mais heureusement ceci n'a pas lieu et l'on a une compatibilité entre eux

4. Système de la MHD

Dans [**2**], nous avons considéré le problème de Cauchy pour le modèle magnéto-hydrodynamique visqueux et non homogène en dimension 3 d'espace. C'est un système parabolique décrit par un couplage entre les équations de Navier-Stokes avec les équations de Maxwell.

$$
\text{(MHD)} \qquad \begin{cases} \partial_t\rho + \operatorname{div}(\rho v) = 0 \\ \partial_t(\rho v) + \operatorname{div}(\rho v \otimes v) - 2\operatorname{div}\big(\mu(\rho)\mathcal{M}\big) + \nabla\big(\Pi + \frac{B^2}{2}\big) = \rho f + \operatorname{div}(B \otimes B) \\ \partial_t B + \operatorname{rot}\big(\frac{\operatorname{rot} B}{\sigma(\rho)}\big) = \operatorname{rot}\big(v \wedge B\big) \\ \operatorname{div} v = \operatorname{div} B = 0 \\ (\rho, v, B)_{|t=0} = (\rho^0, v^0, B^0), \end{cases}
$$

où μ et est une fonction positive désignant la viscosité du fluide et σ la conductivité qui dépend aussi de la densité. La vitesse est notée par v et le champ magnétique par B. La pression est un scalaire noté par Π et f représente la densité volumique de forces extérieures. La quantité $\mathcal{M}$ est définie comme la partie symétrique du tenseur gradient de la vitesse : $\mathcal{M} = \frac{1}{2}\big(\nabla v +^t \nabla v\big)$.
Ce système est largement étudié dans le cas homogène, c'est-à-dire, lorsque la densité est constante. On peut citer à titre d'exemple le travail de G. Duvaut et J.-L. Lions [**43**] dans lequel ils démontrent l'existence et l'unicité locale pour des données initiales dans l'espace de Sobolev H^s, avec $s \geq 3$. L'existence globale de ces solutions est établie pour des données petites. En fait on peut valider une théorie locale semblable au système de Navier-Stokes incompressible : on peut par exemple démontrer un résultat similaire dans les espaces critiques $\dot{H}^{\frac{1}{2}}$ ou plus généralement $\dot{B}_{p,\infty}^{-1+\frac{3}{p}}$.
Dans le cas inhomogène on fait quelques hypothèses sur la viscosité et la conductivité : on suppose que σ et μ sont de classe C^∞ et vérifient

$$
(27) \qquad 0 < \underline{\sigma} \leq \frac{1}{\sigma} \leq \bar{\sigma} < \infty \quad \text{et} \quad 0 < \underline{\mu} \leq \mu.
$$

L'existence globale de solutions faibles a été démontré dans le cas d'un champ magnétique nul par P.-L. Lions [**83**] en utilisant des propriétés de compacité pour l'équation de transport basées sur la notion de solutions renormalisées. Dans le cas du système (MHD) l'existence de solutions faibles globales dans l'espace d'énergie a été obtenue par J.-F. Gerbeau et C. Le Bris [**47**] dans le cas d'un domaine borné simplement connexe. Un résultat semblable a été démontré par B. Desjardins et C. Le Bris [**40**] dans le cas du tore. L'objet de cet article est de traiter le cas de solutions fortes à la Fujita-Kato [**44**], c'est-à-dire, dans les espaces de type Sobolev-Besov critiques. Pour cela, on rajoute une hypothèse supplémentaire sur la densité initiale ρ_0 de type $\inf_x \rho_0(x) > 0$. Remarquons que cette information reste toujours vérifiée pour $\rho(t,x)$ grâce au principe du maximum. Nous supposons également que la densité du fluide est uniforme et non nulle au voisinage de l'infini, ce qui veut dire qu'elle tend vers une valeur finie à l'infini que l'on peut prendre égale à 1.

Pour étudier le système (MHD) nous effectuons le changement d'inconnue $a = \frac{1}{\rho} - 1$ qui nous permet d'avoir le système suivant :

$$
(\mathrm{MHD_m}) \quad \begin{cases}
\partial_t a + v \cdot \nabla a = 0 \\
\partial_t v + v \cdot \nabla v + (1+a)\Big\{\nabla\big(\Pi + \frac{B^2}{2}\big) - 2\,\mathrm{div}\big(\widetilde{\mu}(a)\mathcal{M}\big)\Big\} = f + (1+a)B \cdot \nabla B \\
\partial_t B + \mathrm{rot}\big(\widetilde{\sigma}(a)\mathrm{rot}\, B\big) = B \cdot \nabla v - v \cdot \nabla B \\
\mathrm{div}\, v = \mathrm{div}\, B = 0 \\
(a, v, B)_{|t=0} = (a^0, v^0, B^0),
\end{cases}
$$

avec $\widetilde{\mu}(a) = \mu(\frac{1}{1+a})$ et $\widetilde{\sigma}(a) = \frac{1}{\sigma(\frac{1}{1+a})}$. Nous mentionnons que la fonction $\widetilde{\sigma}$ est $\mathscr{C}^\infty$ d'après les hypothèses faites sur σ. Avant d'énoncer les résultats, on rappelle que l'opérateur de Leray $\mathcal{P}$ est le projecteur orthogonal sur les champs à divergence nulle. On note $\mathcal{Q} = I - \mathcal{P}$ le projecteur sur les champs de type gradient.
Le premier résultat que nous avons établi traite de l'existence et l'unicité pour des données régulières. De manière plus précise, nous avons le théorème suivant bien-entendu sous les hypothèses (27) :

THÉORÈME 3.13. *Soient $\alpha \in]0,1[$, $f \in \widetilde{L}^1_T(H^{\frac{1}{2}+\alpha})$ et (v^0, B^0) un couple de champs de vecteurs à divergence nulle et appartenant à $H^{\frac{1}{2}+\alpha}$. On suppose que $a^0 \in H^{\frac{3}{2}+\alpha}$ et vérifie $\underline{a} \overset{\text{déf}}{=} \inf_x(1+a^0) > 0$. Alors il existe un réel $T > 0$ tel que le système $(\mathrm{MHD_m})$ admette une unique solution locale,*

$$
a \in \mathscr{C}([0,T]; H^{\frac{3}{2}+\alpha});\ v,\ B \in \mathscr{C}([0,T]; H^{\frac{3}{2}+\alpha}) \cap \widetilde{L}^1_T(H^{\frac{5}{2}+\alpha}).
$$

La démonstration repose sur des estimations *a priori* pour le système linéarisé suivant,

$$
(\mathrm{M}) \quad \begin{cases}
\partial_t v + u \cdot \nabla v + (1+a)\Big(\nabla\big(\frac{B^2}{2} + \Pi\big) - 2\,\mathrm{div}\big\{\widetilde{\mu}(a)\mathcal{M}\big\}\Big) = g + (1+a)B \cdot \nabla B \\
\partial_t B + \mathrm{rot}\Big(\widetilde{\sigma}(a)\mathrm{rot}\, B\Big) = B \cdot \nabla u - u \cdot \nabla B \\
\mathrm{div}\, v = \mathrm{div}\, B = 0 \\
(v, B)_{|t=0} = (v^0, B^0).
\end{cases}
$$

On combine ceci ensuite avec un schéma itératif classique pour démontrer l'existence de solutions. Le théorème 3.13 sert de point de départ pour démontrer un résultat d'existence dans les espaces de Besov critiques.

THÉORÈME 3.14. *Soit $1 < p < 6$, alors il existe une constante $\eta > 0$ telle qu'on ait la propriété suivante : soient v^0, $B^0 \in \dot{\mathscr{B}}^{\frac{3}{p}-1}_{p,1}$ de divergence nulle et $f \in L^1(\mathbb{R}_+; \dot{\mathscr{B}}^{\frac{3}{p}-1}_{p,1})$ avec $\mathcal{Q}f \in L^2_{loc}(\mathbb{R}_+; \dot{\mathscr{B}}^{\frac{3}{p}-2}_{p,1})$ et $a^0 \in \dot{\mathscr{B}}^{\frac{3}{p}}_{p,1}$ avec*

$$
\|a^0\|_{\dot{\mathscr{B}}^{\frac{3}{p}}_{p,1}} \leq \eta.
$$

Alors il existe $T > 0$ tel que le système $(\mathrm{MHD_m})$ admette une solution (a, v, B) vérifiant

$$
a \in \mathscr{C}\big([0,T]; \dot{\mathscr{B}}^{\frac{3}{p}}_{p,1}\big); \quad v \quad \text{et} \quad B \in \mathscr{C}\big([0,T]; \dot{\mathscr{B}}^{\frac{3}{p}-1}_{p,1}\big) \cap L^1_T \dot{\mathscr{B}}^{\frac{3}{p}+1}_{p,1}.
$$

De plus si $\|v^0\|_{\dot{\mathscr{B}}^{\frac{3}{p}-1}_{p,1}} + \|B^0\|_{\dot{\mathscr{B}}^{\frac{3}{p}-1}_{p,1}} + \|f\|_{L^1(\mathbb{R}_+; \dot{\mathscr{B}}^{\frac{3}{p}-1}_{p,1})} \leq \eta$, alors $T = +\infty$.

Si $1 < p \leq 3$, alors on a l'unicité de telles solutions.

5. Perspectives de recherche

Il reste de nombreuses questions à explorer dans le problème de Cauchy pour les systèmes que nous avons vus mais je vais me limiter à quelques unes. Comme il n'y a pas jusqu'ici une réponse satisfaisante sur l'existence globale pour le système de Boussinesq non visqueux on peut tenter de relaxer un peu la dissipation dans le système de Boussinesq partiellement visqueux $(B_{0,\kappa})$: on peut travailler avec un laplacien fractionnaire de type $(-\Delta)^{\alpha}$, au lieu de $-\Delta$. Dans un travail en cours [], nous parvenons à établir l'existence globale pour $\alpha > \frac{1}{2}$. Savoir ce qui se passe pour $\alpha = \frac{1}{2}$ semble une question difficile et je pense qu'elle requiert une nouvelle approche semblable à celle introduite par Kiselev et *al* pour le cas de l'équation quasi-geostrophique critique. Nous pouvons également mener une étude similaire pour le modèle $(B_{\nu,0})$.

Pour l'équation quasi-geostrophique sur-critique on n'a pas encore établi l'existence globale en dehors des données petites alors il est tout-à-fait envisageable de construire une famille de données initiales non petites et générant un temps d'existence infini. Pour se faire on peut s'inspirer éventuellement de ce qui a était fait par J.-Y. Chemin et I. Gallagher dans le cadre du système de Navier-stokes [**23**]. Mentionnons que leur condition de petitesse ne porte pas sur la donnée initiale mais sur la deuxième itération. Bien évidemment la situation ici change considérablement vu que la construction de solutions pour le modèle (QG_{α}) ne se fait pas par une méthode de contraction via le semi-groupe de la chaleur.

Il y a également une question importante qui subsiste encore dans le cas de l'équation quasi-géostrophique critique et qui se rapporte à la stabilité des solutions globales que nous avons construites dans [**4**]. Il s'agit en particulier de savoir si le flot $\theta^0 \mapsto \theta(t)$ est continu de l'espace critique $\dot{\mathscr{B}}^0_{\infty,1}$ dans $L^{\infty}_{\text{loc}}(\mathbb{R}_+, \dot{\mathscr{B}}^0_{\infty,1})$.

CHAPITRE 4

Théorie d'explosion pour NLS

Ce chapitre est réservé au résultats obtenus dans **[61, 58]** portant sur la théorie d'explosion pour l'équation de Schrödinger L^2-critique. Dans **[61]** nous avons redémontré de manière assez simple les résultats classiques sur l'explosion comme le résultat de concentration en masse des solutions explosives obtenu par Weinstein ou aussi le théorème de classification de Merle. Par contre dans **[58]** nous nous sommes intéressées à l'explosion en dessous du seuil d'énergie. Nous avons partiellement caractérisé la boule minimale d'explosion et donné un résultat analogue à celui de Weinstein.

1. Introduction

L'équation de de Schrödinger L^2-critique est donnée par

$$\text{(NLS)} \begin{cases} i\partial_t u + \frac{1}{2}\Delta u + \mu |u|^{4/d} u = 0 \\ u_{|t=0} = u^0, \end{cases}$$

où $\mu \in \{-1, 1\}$ et $u^0 \in H^s(\mathbb{R}^d)$ et $u : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$. L'équation est dite focalisante si $\mu = +1$ et défocalisante si $\mu = -1$. Remarquons qu'on a l'invariance d'échelle suivante : si u est une solution du (NLS) avec donnée initiale u^0, alors pour tout $\lambda > 0$, la fonction $u_\lambda(x,t) = \lambda^{d/2} u(\lambda^2 t, \lambda x)$ l'est aussi avec donnée initiale $u^0_\lambda(x) = \lambda^{d/2} u^0(\lambda x)$. Il est aisé de voir que $\|u^0_\lambda\|_{L^2} = \|u^0\|_{L^2}$, et c'est dans ce sens là que l'équation(NLS) est dite L^2-critique. On peut également démontrer par le biais des estimations de Strichartz que l'équation (NLS) admet une unique solution locale pour toute donnée initiale $u^0 \in H^s$, avec $s \geq 0$ (pour plus de détails on renvoie au livre de Cazenave **[15]**). Dans le cas sous-critique ($s > 0$) le temps d'existence locale est relié à la norme $\|u^0\|_{H^s}$. Par contre dans le cas critique ($s = 0$) il dépend de la forme de la donnée initiale et non pas de sa norme. Les solutions vérifient en outre la loi de conservation suivante, dite conservation de la masse,

$$\int_{\mathbb{R}^d} |u(t,x)|^2 dx = \int_{\mathbb{R}^d} |u^0(x)|^2 dx\,.$$

De plus, lorsque $s \geq 1$, l'hamiltonien appelé aussi l'énergie est bien défini et il est conservé au cours du temps,

$$E(t) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^d} |\nabla u(t,x)|^2 dx - \frac{d\mu}{2+d}\int_{\mathbb{R}^d} |u(t,x)|^{\frac{4}{d}+2} dx = E(0)\,.$$

Lorsque $\mu = -1$ et $s = 1$ les solutions sont globales vu que la norme $\|u(t)\|_{H^1}$ est contrôlée indépendamment du temps. En dessous du seuil d'énergie le problème d'existence globale devient de plus en plus complexe, on peut consulter les travaux de T. Tao et ses collaborateurs comme dans **[27]** pour des développements récents.

Dans le cas focalisant, qui m'intéresse le plus ici, la situation change radicalement et l'on peut assister à l'explosion en temps finie pour des données trop régulières. La construction de telles solutions peut se faire au moins via deux approches. La première s'appuie sur la transformation pseudo-conforme qui agit sur l'espace de viriel $\Sigma := \{\phi \in H^1, x\phi \in L^2\}$: si $u(t,x)$ est une solution globale de (NLS) alors

$$v(t,x) = \frac{1}{(T^*-t)^{\frac{d}{2}}}\overline{u}(\frac{1}{T^*-t}, \frac{x}{T^*-t})e^{i|x|^2/T^*-t}$$

est aussi une solution mais qui explose à l'instant T^*. Remarquons que l'existence d'une solution globale u peut être assurée soit pour des petites données initiales ou aussi explicitement via l'exemple de l'onde solitaire $e^{it}Q(x)$, où Q est l'état fondamental donné par l'unique solution radiale positive de l'équation elliptique,

$$\frac{1}{2}\Delta Q - Q + |Q|^{\frac{4}{d}}Q = 0\,.$$

La deuxième approche pour démontrer l'explosion est basée sur l'identité de viriel établie par Glassey [**52**] : si $u^0 \in \Sigma$, alors

$$\frac{d^2}{dt^2}\int |x|^2|u(t,x)|^2 dx = 16E(0). \tag{28}$$

Comme conséquence on a l'explosion en temps fini pour les solutions d'énergie négative : la fonction $t \mapsto \int |x|^2|u(t,x)|^2 dx$ est strictement concave et positive donc nécessairement elle cesse d'exister en dehors d'un intervalle compact. Remarquons au passage que l'on peut toujours exhiber des données d'énergie négative. En effet si $E(u^0) \neq 0$ alors $\lim_{\lambda \to +\infty} E(\lambda u^0) = -\infty$.

Il est hors de portée de recenser ici tous les résultats sur la dynamique explosive dans le cadre H^1 qui est un domaine vaste et riche. Les questions que l'on pose se rapportent essentiellement à la caractérisation des solutions explosives, concentration de leurs masses, vitesse d'explosion,... Je vais ici me contenter d'un bref aperçu sur le sujet. Le lecteur intéressé trouvera plus de précisions à titre d'exemple dans les travaux suivants [**15, 102, 106, 115, 116, 117, 86, 87**]. Pour commencer, on rappelle que le point de départ de la théorie d'explosion H^1 est le résultat de M. I. Weinstein [**115**] sur la meilleure constante dans l'inégalité de Gagliardo-Nirenberg. Cette constante est reliée à l'état fondamental Q :

$$\|\phi\|_{L^{\frac{4}{d}+2}}^{\frac{4}{d}+2} \leq \frac{d+2}{d}\|Q\|_{L^2}^{-\frac{4}{d}}\|\phi\|_{L^2}^{\frac{4}{d}}\|\nabla\phi\|_{L^2}^2, \qquad \forall\, \phi \in H^1\,. \tag{29}$$

A partir de cette inégalité et moyennant la conservation d'énergie on peut aisément démontrer que la boule $\{u^0 \in H^1, \|u^0\|_{L^2} < \|Q\|_{L^2}\}$ est maximale pour l'existence globale. Remarquons que sur le bord on a effectivement des données à solutions explosives. L'exemple type provient de la symétrie pseudo-conforme appliquée à l'onde solitaire et prenant la forme suivante,

$$u(t,x) = \frac{1}{(T^*-t)^{\frac{d}{2}}}e^{i/(T^*-t)}e^{i|x|^2/T^*-t}Q(\frac{x}{T^*-t}).$$

La caractérisation de toutes les solutions explosives avec masse minimale revient à F. Merle dans ses travaux [**86, 87**]. Elles sont données par l'état fondamental Q modulo le groupe d'invariance de l'équation. En s'éloignant de la masse critique la description de la dynamique explosive avec toutes ses ramifications (solutions explosives, vitesse d'explosion, formation spatiale des singularités) devient un sujet assez délicat. Pour plus de précisions on peut consulter les travaux de F. Merle et P. Raphael [**88, 89**].
Notre objectif dans l'article [**61**] est de présenter des démonstrations simples et concises de certains résultats fondamentaux sur la théorie d'explosion H^1, comme la concentration de la norme L^2 et la classification des solutions singulières avec masse critique. En somme la caractérisation de l'explosion avec masse minimale dans le cadre H^1 semble bien maîtrisée dans ses grands axes mais elle ne l'est pas pourtant pour des régularités H^s, avec $0 \leq s < 1$. Les mêmes questions

(concentration de la masse, universalité du profil d'explosion...) peuvent être reprises dans ce cadre et la conviction générale qui règne est que l'on va probablement avoir les mêmes réponses que dans le cadre H^1. Dans **[58]** nous nous sommes intéressés à ce sujet mais tout en restant à un niveau de régularité proche de H^1. Notre résultat est une amélioration du résultat de Colliander *et al.* **[26]** dans la mesure où on s'est débarrassé de la condition radiale sur les données initiales.

2. Lemme de compacité

Je vais dans cette section présenter un lemme de compacité jouant un rôle fondamental dans l'étude de l'explosion pour l'équation (NLS), comme nous allons le voir. Il nous donne des informations optimales sur la masse des profils d'explosion sans aucune hypothèse de symétrie radiale.

THÉORÈME 4.1 (**[61]**). *Soit $\{v_n\}_{n=1}^{\infty}$ une suite bornée de $H^1(\mathbb{R}^d)$, telle que*

$$\limsup_{n\to\infty} \|\nabla v_n\|_{L^2} \leq M \qquad et \qquad \limsup_{n\to\infty} \|v_n\|_{L^{\frac{4}{d}+2}} \geq m\,.$$

Alors, il existe une suite $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}^d$ telle que, à une sous-suite près,

$$v_n(\cdot + x_n) \rightharpoonup \mathtt{V}, \qquad faiblement,$$

où $\mathtt{V} \in H^1$ et $\|\mathtt{V}\|_{L^2} \geq (\frac{d}{d+2})^{d/4}\frac{m^{\frac{d}{2}+1}}{M^{d/2}}\|Q\|_{L^2}$.

REMARQUES. **1**) *La borne inférieure de la norme L^2 du profil V est optimale. En effet, si on prend la suite stationnaire $v_n = Q$ et $x_n = 0$, on obtient une égalité.*

2) *L'existence d'un profil non nul V peut se faire via le lemme de concentration-compacité de P.-L. Lions* **[82]**. *L'importance de notre résultat porte sur la quantification de la borne inférieure du profil qui est reliée à l'état fondamental Q.*

La démonstration que nous avons proposée est basée sur la méthode de décomposition en profils. Elle fut introduite par P. Gérard **[45]** pour décrire le défaut de compacité des injections de Sobolev $\dot{H}^s \hookrightarrow L^{\frac{2d}{d-2s}}$. On démontre qu'il y a seulement deux mécanismes responsables de ce défaut : les translations et les dilatations. Pour ce qui nous concerne il s'agit d'étudier le défaut de compacité des injections sous-critiques $H^1 \hookrightarrow L^p$ pour tout $p \in]2, 2^*[$.[1] Nous obtenons en fait une décomposition en profils très simple qui ne fait appel qu'au groupe de translations.

PROPOSITION 4.2 (**[61]**). *Soit $\{v_n\}_{n=1}^{\infty}$ une suite bornée dans $H^1(\mathbb{R}^d)$. Alors, il existe une sous-suite $\{v'_n\}_{n=1}^{\infty}$ de $\{v_n\}_{n=1}^{\infty}$, une famille $\mathbf{x}^j = \{x_n^j\}_{j=1}^{\infty}$ de suites de $\mathbb{R}^d$ et une famille de fonctions $\{\mathtt{V}^j\}_{j=1}^{\infty}$ dans H^1, telles que*

1. *pour tout $k \neq j$,* $\quad |x_n^k - x_n^j| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} +\infty\,;$
2. *pour tout $\ell \geq 1$ et $x \in \mathbb{R}^d$,*

$$v'_n(x) = \sum_{j=1}^{\ell} \mathtt{V}^j(x - x_n^j) + r_n^\ell(x),$$

avec

$$\limsup_{n\to\infty} \|r_n^\ell\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} \underset{\ell\to\infty}{\longrightarrow} 0,$$

pour tout $p \in]2, 2^*[$.

1. Où on note $2^* = \infty$ si $d = 1, 2$, et $2^* = \frac{2d}{d-2}$ si $d \geq 3$.

De plus, on a pour $\beta = 0, 1$

$$\|\nabla^\beta v_n'\|_{L^2}^2 = \sum_{j=1}^{\ell} \|\nabla^\beta \mathrm{V}^j\|_{L^2}^2 + \|\nabla^\beta r_n^\ell\|_{L^2}^2 + o(1), \qquad n \to +\infty\,.$$

Laissons voir rapidement comment démontrer le théorème 4.1 à partir de cette proposition. On écrit

$$m^{\frac{4}{d}+2} \leq \limsup_n \|v_n\|_{L^{\frac{4}{d}+2}}^{\frac{4}{d}+2} \leq \limsup_n \|\sum_j V^j(\cdot - x_n^j)\|_{L^{\frac{4}{d}+2}}^{\frac{4}{d}+2}.$$

En utilisant la propriété d'orthogonalité de la famille $\{\mathbf{x}^j, j \in \mathbb{N}\}$ on trouve

$$m^{\frac{4}{d}+2} \leq \sum_j \|V^j\|_{L^{\frac{4}{d}+2}}^{\frac{4}{d}+2}.$$

En appliquant l'inégalité de Gagliardo-Nirenberg on obtient

$$\sum_j \|V^j\|_{L^{\frac{4}{d}+2}}^{\frac{4}{d}+2} \leq \frac{d+2}{d} \|Q\|_{L^2}^{-\frac{4}{d}} \sup_j \|V^j\|_{L^2}^{\frac{4}{d}} \sum_j \|\nabla V^j\|_{L^2}^2.$$

D'un autre côté on a

$$\sum_j \|\nabla V^j\|_{L^2}^2 \leq \limsup_n \|\nabla v_n\|_{L^2}^2 \leq M^2.$$

En conjuguant ces deux estimations on trouve

$$\sup_j \|V^j\|_{L^2}^{\frac{4}{d}} \geq \left(\frac{d}{d+2}\right)^{\frac{d}{4}} \frac{m^{\frac{d}{2}+1}}{M^{\frac{d}{2}}} \|Q\|_{L^2}.$$

En fait on a même un indice j_0 pour lequel la quantité du terme à gauche est atteinte en une valeur $\|V^{j_0}\|_{L^2}$. Ceci découle immédiatement de la convergence de la série $\sum_j \|\nabla V^j\|_{L^2}^2$. On peut ensuite vérifier par de simples arguments que le profil trouvé V^{j_0} répond aux exigences du théorème.

3. Applications dans la théorie d'explosion H^1

Nous allons voir dans la suite comment retrouver de manière aisée, par le biais du théorème de compacité, la plupart des résultats classiques sur l'explosion avec masse critique comme la concentration de la masse, l'universalité du profil d'explosion ou encore le résultat de classification des solutions explosives avec masse minimale.

3.1. Concentration de la masse.

Le premier résultat concerne la concentration de la masse.

THÉORÈME 4.3. *Soit u une solution de l'équation de (NLS) qui explose en temps $T^* > 0$ et $\lambda(t) > 0$ une fonction telle que $\lim_{t\to T^*} \lambda(t)\|\nabla u(t)\|_{L^2} = +\infty$. Alors il existe une fonction $x(t)$ telle que*

$$\liminf_{t\to T^*} \int_{|x-x(t)|<\lambda(t)} |u(t,x)|^2 dx \geq \int_{\mathbb{R}^d} Q^2(x) dx.$$

REMARQUE. *En utilisant un argument d'échelle on peut démontrer une borne inférieure de la vitesse d'explosion $\dot{H}^1$:*

$$\|\nabla u(t)\|_{L^2} \geq C(T^* - t)^{-\frac{1}{2}}.$$

Ceci permet en conséquence d'expliciter un exemple de $\lambda(t)$.

La démonstration s'appuie sur le changement d'échelle suivant :

$$v_n(x) = \rho^{\frac{d}{2}} u(t_n, \rho_n x), \quad \rho_n = \frac{\|\nabla Q\|_{L^2}}{\|\nabla u(t_n)\|_{L^2}},$$

avec (t_n) une suite quelconque qui tend vers T^*. Cette nouvelle fonction v_n admet la même masse que u^0 et vérifie $\|\nabla v_n\|_{L^2} = \|\nabla Q\|_{L^2}$ et $E(v_n) = \rho_n^2 E(u^0)$. Cette dernière identité montre que l'énergie de v_n tend vers zéro. Ceci permet d'avoir la convergence en norme $L^{\frac{4}{d}+2}$ de la suite de fonction (v_n). D'un autre côté, le lemme de compacité entraîne l'existence d'une suite (x_n) telle que $v_n(\cdot + x_n) \rightharpoonup V$. Il suffit ensuite de conclure par le biais de la borne inférieure sur V.

3.2. Universalité du profil d'explosion. Le second résultat que nous allons discuter est le résultat de Weinstein [**116**].

THÉORÈME 4.4. *Soit u une solution de (NLS) qui explose en temps fini $T^* > 0$ avec $\|u^0\|_{L^2} = \|Q\|_{L^2}$. Alors il existe deux fonctions $x(t)$ et $\theta(t)$ telles que*

$$\lim_{t \to T^*} \left\| \rho(t)^{\frac{d}{2}} e^{i\theta(t)} u(t, \rho(t)x + x(t)) - Q \right\|_{H^1} = 0.$$

Ceci découle du fait que l'on a suffisamment d'informations sur le profil V qui permettent d'avoir

$$\|V\|_{L^2} = \|Q\|_{L^2}, \|\nabla V\|_{L^2} = \|\nabla Q\|_{L^2} \quad \text{et} \quad E(V) = 0.$$

La caractérisation variationnelle de l'état fondamental montre que $V(x) = e^{i\theta} Q(x + x_0)$, pour certain $(\theta_0, x_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$.

3.3. Classification des solutions explosives. Comme une dernière application du lemme de compacité nous allons voir le théorème de classification de F. Merle [**86**]. Avant d'énoncer le résultat on introduit la notation suivante :

$$\mathcal{A} = \left\{ \rho^{d/2} e^{i\theta} Q(\rho \cdot + y), \quad y \in \mathbb{R}^d, \rho > 0, \theta \in \mathbb{R} \right\}.$$

Le résultat en question est le suivant.

THÉORÈME 4.5 ([**86**]). *Soit u une solution de (NLS) avec donnée initiale $u^0 \in H^1$ et $\|u^0\|_{L^2} = \|Q\|_{L^2}$, qui explose en temps fini $T^* > 0$. Alors il existe $x_0 \in \mathbb{R}^d$, tel que $e^{i\frac{|x-x_0|^2}{4T^*}} u^0 \in \mathcal{A}$.*

Démonstration ([**61**]). Soient $t_n \uparrow T^*$ une suite de temps arbitraire alors d'après le théorème 4.4

$$(\rho_n)^{d/2} e^{i\theta_n} u(t_n, \rho_n x + x_n) \longrightarrow Q, \quad \text{fortement dans} \quad H^1.$$

Ceci implique

$$|u(t_n, x)|^2 dx - \|Q\|_{L^2}^2 \delta_{x=x_n} \rightharpoonup 0, \quad \text{faiblement}. \tag{30}$$

Modulo l'extraction d'une sous-suite et translation on peut supposer que $x_n \to 0$ ou $|x_n| \to +\infty$. Soit $\phi \in \mathscr{C}_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ une fonction radiale positive qui vérifie

$$\phi(x) = |x|^2, \quad \text{si} \quad |x| < 1 \quad \text{et} \quad |\nabla \phi(x)|^2 \leq C\phi(x).$$

Remarquons de passage que la deuxième contrainte sur ϕ est vérifiée automatiquement pour toute fonction radiale positive et $\mathscr{C}_0^\infty(\mathbb{R}^d)$. Pour tout $p \in \mathbb{N}^*$ on définit

$$\phi_p(x) = p^2 \phi(\frac{x}{p}) \quad \text{et} \quad g_p(t) = \int \phi_p(x) |u(t,x)|^2 dx.$$

En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwartz démontrée par V. Banica **[9]**, on trouve

$$\begin{aligned} |\dot{g}_p(t)| = |2\Im \int \bar{u}(x)\nabla u(x)\nabla\phi_p(x)dx| &\leq \left(8E(u^0)\int |u|^2|\nabla\phi_p|^2dx\right)^{1/2} \\ &\leq CE^{\frac{1}{2}}(u^0)g_p^{\frac{1}{2}}(t), \qquad \forall t\in[0,T^*[. \end{aligned}$$

En intégrant en temps on obtient

(31) $$|g_p(t)-g_p(t_n)| \leq CE(u^0)|t_n-t|^2 \qquad \forall t\in[0,T^*[.$$

D'un autre côté, il découle de (30)

$$g_p(t_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0, \qquad \forall p\in\mathbb{N}^*.$$

On fait tendre n vers l'infini dans (31)

$$g_p(t) \leq CE(u^0)(T^*-t)^2, \qquad \forall t\in[0,T^*[\,.$$

En fixant $t\in[0;T^*[$ et en faisant tendre p vers l'infini

(32) $$\int |x|^2|u(t,x)|^2dx \leq CE(u^0)(T^*-t)^2\,.$$

Rappelons que l'identité de Viriel (28) prend une autre forme,

$$\int |x|^2|u(t,x)|^2dx = 8t^2E(e^{i\frac{|x|^2}{4t}}u^0).$$

Quitte à faire tendre t vers T^*, on trouve

$$E(e^{i\frac{|x|^2}{4T^*}}u^0) = 0\,.$$

Comme $\|e^{i\frac{|x|^2}{4T^*}}u^0\|_{L^2} = \|Q\|_{L^2}$, alors la caractérisation variationnelle de l'état fondamental Q implique que $e^{i\frac{|x|^2}{4T^*}}u^0 \in \mathcal{A}$. Rappelons que l'état fondamental est caractérisé comme suit **[115]** : si $\psi\in H^1$, telle que $\|\psi\|_{L^2} = \|Q\|_{L^2}$ et $E(\psi)=0$, alors $\psi\in\mathcal{A}$. □

4. Explosion en dessous du seuil d'énergie

Nous venons de voir que la compréhension de la dynamique explosive avec masse minimale dans le cadre H^1 est intiment liée à la conservation de l'énergie. Cependant lorsque on se place en dessous de cette régularité (H^s, avec $s\in[0,1[$), nos outils d'étude se réduisent et on a pratiquement que la conservation de la masse. L'une des importantes questions que l'on peut soulever est d'identifier la boule minimale pour l'explosion. D'après la théorie d'existence on sait construire des solutions globales pour des données petites. Or la transformation pseudo-conforme donne des exemples explicites de solutions explosives avec une masse $\|Q\|_{L^2}$. Ce qui entraîne non seulement que cette boule admet un rayon fini $\delta_s >$ mais aussi que $\delta_s \leq \|Q\|_{L^2}$. Dans **[75]**, S. Keraani montre qu'on a effectivement des solutions explosives L^2 avec masse minimale et emet une conjecture selon laquelle $\delta_0 = \|Q\|_{L^2}$. Cette conjecture est résolue récemment par T. Tao et ses collaborateurs dans le cas radial. Un résultat positif est également obtenu lorsque l'indice de régularité s est prôche de 1. En effet J. Colliander et al. **[26]** ont démontré dans le cas radial et en dimension 2 d'espace que les solutions explosives $H^s, s > s_Q$ [2] concentrent une partie de leur masse L^2, avec une borne inférieure supérieure à $\|Q\|_{L^2}$. Leur méthode, dite methode-I, consiste à contrôler l'évolution de l'énergie d'une régularisation de la solution $I_N u$. L'opérateur I_N ressemble à une troncature en fréquence de taille N et fut introduit dans **[28]**. Dans **[61]**, nous avons rayé la

2. Un certain indice non optimal $s_Q \leq \frac{1+\sqrt{11}}{5}$.

condition de symétrie du résultat de Colliander *al.* en se servant du lemme de compacité. Notre premier résultat est le suivant :

THÉORÈME 4.6 ([**61**]). *Supposons $d = 2$ et $s > s_Q$. Soit $u^0 \in H^s(\mathbb{R}^2)$ telle que la solution u de l'équation (NLS) explose en un temps fini $T^* > 0$. Alors, il existe une suite $t_n \longrightarrow T^*$, une fonction $V \in H^1$ avec $\|V\|_{L^2} \geq \|Q\|_{L^2}$ et une suite $(\rho_n, x_n)_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}^2$ satisfaisant*

$$\rho_n \leq A(T^* - t_n)^{s/2}$$

pour une certaine constante $A > 0$, telles que

$$\rho_n u(t_n, \rho_n x + x_n) \rightharpoonup V \quad faiblement.$$

REMARQUES. **1**) *Il n'est pas du tout évident si V ou $\|V\|_{L^2}$ dépend où non de la suite de temps $\{t_n\}_{n=1}^{\infty}$.*
2) *Le profil V est plus régulier que la suite : il est dans H^1 alors que $u(t_n) \in H^s$,(avec $s < 1$) le profil V est dans H^1.*

Le théorème ci-dessus nous permet d'avoir le résultat de concentration suivant.

COROLLAIRE 4.7. *Soit u une solution de l'équation de (NLS) qui explose en temps $T^* > 0$ et $\lambda(t) > 0$ une fonction telle que* $\limsup_{t \to T^*} \frac{\lambda(t)}{(T^*-t)^{\frac{s}{2}}} = \infty$. *Alors il existe une fonction $x(t)$ telle que*

$$\limsup_{t \to T^*} \int_{|x - x(t)| < \lambda(t)} |u(t,x)|^2 dx \geq \int_{\mathbb{R}^d} Q^2(x) dx.$$

Ce corollaire permet d'obtenir l'existence globale pour des données initiales de masses sous-critiques $\|u^0\|_{L^2} < \|Q\|_{L^2}$, vu que la masse est conservée. Il en découle que le rayon de la boule minimale assurant l'explosion pour une régularité voisine de H^1 est $\delta_s = \|Q\|_{L^2}$.

REMARQUE. *Le résultat du théorème 4.6 est valable pour une suite $\{t_n\}_{n=1}^{\infty}$, c'est pourquoi on a seulement dans le corollaire ci-dessus* lim sup *à la place de* lim inf, *comparé au théorème 4.3. Ceci est dû à une manque d'information sur la monotonie de $\|u(t)\|_{H^s}$ proche du temps d'explosion.*

En combinant le théorème 4.6 et la caractérisation variationnelle de l'état fondamental Q on montre ce dernier est un profil d'explosion pour les solutions explosives de masse minimale.

THÉORÈME 4.8 ([**61**]). *Supposons $d = 2$ et $s > s_Q$. Soit $u^0 \in H^s(\mathbb{R}^2)$ avec $\|u^0\|_{L^2} = \|Q\|_{L^2}$, telle que la solution u de (NLS) explose en temps fini $T^* > 0$. Alors, il existe une suite de temps $t_n \longrightarrow T^*$ et une suite $\{\rho_n, \theta_n, x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}_+^* \times [0, 2\pi[\times \mathbb{R}^2$ satisfaisant*

$$\rho_n \leq A(T^* - t_n)^{s/2}$$

pour une certaine constante $A > 0$, telles que

$$\rho_n e^{i\theta_n} u(t_n, \rho_n x + x_n) \longrightarrow Q, \qquad fortement\ dans \quad H^{\alpha},$$

pour tout $\alpha < \frac{s+1}{4-2s}$.

5. Perspectives de recherche

Il y a de nombreux problèmes ouverts dans le cadre de la théorie d'explosion pour (NLS) L^2-critique. Par exemple, savoir si l'état fondamental est l'unique profil d'explosion pour les solutions explosives $H^s, s > s_Q$ avec masse minimale est un problème ouvert. Il est aussi très important de connaître si le théorème de classification de merle reste aussi valable en dessous de H^1.

Appendice

Nous allons regrouper dans ce chapitre les outils dont on fait usage le long de ce manuscrit. Nous introduisons les espaces fonctionnels que l'on va souvent rencontrer comme par exemlpe les espaces de Hölder et de Besov. Nous rappelons également les notions de base pour le calcul paradifférentiel.

6. Théorie de Littlewood-Paley

Le point de départ de cette théorie est la partition dyadique de l'unité. Il existe deux fonctions radiales positives $\chi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^d)$ et $\phi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^d \backslash \{0\})$, telles que

$$\forall \xi \in \mathbb{R}^d, \, \chi(\xi) + \sum_{q \geq 0} \varphi(2^{-q}\xi) = 1; \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^d \backslash \{0\} \quad \chi(\xi) + \sum_{q \geq 0} \varphi(2^{-q}\xi) = 1,$$

$$\frac{1}{3} \leq \chi^2(\xi) + \sum_{q \geq 0} \varphi^2(2^{-q}\xi) \leq 1,$$

$$|p - q| \geq 2 \Rightarrow \text{supp } \varphi(2^{-p} \cdot) \cap \text{supp } \varphi(2^{-q} \cdot) = \varnothing,$$

$$q \geq 1 \Rightarrow \text{supp } \chi \cap \text{supp } \varphi(2^{-q}) = \varnothing.$$

On note

$$\Delta_{-1} v = \mathcal{F}^{-1}(\chi(\xi)\widehat{v}(\xi)), \quad \Delta_q v = \mathcal{F}^{-1}(\varphi(2^{-q}\xi)\widehat{v}(\xi)) \text{ si } q \in \mathbb{N}.$$

$$\forall q \leq -2, \quad \Delta_q v = 0 \quad \forall q \in \mathbb{Z}, \, S_q v = \sum_{p \leq q-1} \Delta_p v.$$

On définit aussi les opérateurs de troncature en fréquence associés à la décomposition homogène,

$$\forall q \in \mathbb{Z}, \quad \dot{\Delta}_q v = \mathcal{F}^{-1}(\varphi(2^{-q}\xi)\widehat{v}(\xi)).$$

Le calcul paradifférentiel introduit par J.-M. Bony dans [**12**] est fondé sur la décomposition, dite de Bony, qui reconnaît dans un produit uv trois parties : deux termes de paraproduits correspondant à une domination fréquencielle de l'une par rapport à l'autre et un terme de reste où les fréquences sont de même taille. Plus précisément, nous avons la définition suivante.
On appelle paraproduit de v par u et on note $T_u v$ l'opérateur

$$T_u v = \sum_q S_{q-1} u \Delta_q v.$$

On appelle reste du produit uv et on note $R(u, v)$ l'opérateur bilinéaire symétrique suivant :

$$R(u, v) = \sum_{|q' - q| \leq 1} \Delta_q u \Delta_{q'} v.$$

Ainsi le produit uv s'écrit formellement

$$uv = T_u v + T_v u + R(u, v).$$

Nous définissons les espaces de Besov $B^s_{p,r}$, avec $p, r \in [1, +\infty]$ et $s \in \mathbb{R}$ comme étant l'ensemble des distributions tempérées u vérifiant

$$\|u\|_{\mathscr{B}^s_{p,r}} \overset{déf}{=} \left(2^{qs}\|\Delta_q u\|_{L^p}\right)_{\ell^r} < +\infty.$$

Si $s \in \mathbb{R}_+ \backslash \mathbb{N}$ alors $\mathscr{B}^s_{\infty,\infty} = \mathscr{C}^s$. Par contre $\mathscr{B}^s_{2,2} = H^s$.
Le lemme suivant dit de Bernstein nous quantifie l'échange entre dérivation et fréquence.

LEMME 4.9. (BERNSTEIN) *Il existe une constante C telle que pour tout couple (a, b) tel que $1 \leq a \leq b$ et pour toute fonction $u \in L^a(\mathbb{R}^d)$, on ait pour tout $q \in \mathbb{N}, \alpha \in \mathbb{N}^d$*

$$\begin{aligned} sup_{|\alpha|=k}\|\partial^\alpha S_q u\|_{L^b} &\leq C^k 2^{q(k+d(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}))}\|\Delta_q u\|_{L^a}, \\ C^{-k}2^{qk}\|\Delta_q u\|_{L^a} &\leq \sup_{|\alpha|=k}\|\partial^\alpha \Delta_q u\|_{L^a} \leq C^k 2^{qk}\|\Delta_q u\|_{L^a}. \end{aligned}$$

L'espace que nous allons introduire maintenant est un espace tout-à-fait naturel que l'on rencontre dans la mécanique des fluides bidimensionnelle, essentiellement lorsque on parle des solutions faibles à la Yudovich.

DÉFINITION 4.10. *Soit d un entier supérieur où égal à* 2. *Nous désignons par $\mathscr{C}_{LL}$ l'espace des fonctions log-lipschitziennes, c'est-à-dire, l'ensemble des fonctions bornées v de $\mathbb{R}^d$ satisfaisant*

$$\|v\|_{LL} \overset{déf}{=} \|v\|_{L^\infty} + \sup_{0<|x-x'|\leq e^{-1}} \frac{|v(x) - v(x')|}{|x - x'| \log(\frac{1}{|x-x'|})} < +\infty.$$

La proposition qui va suivre est une caractérisation dyadique des éléments de l'espace $\mathscr{C}_{LL}$. Pour la preuve, voir par exemple **[7]**.

PROPOSITION 4.11. *Il existe une constante $C > 0$ telle que pour toute fonction $v \in \mathscr{C}_{LL}$ on ait :*

$$C^{-1}\|v\|_{LL} \leq \|\Delta_{-1}v\|_{L^\infty} + \sup_q \frac{\|\nabla S_q v\|_{L^\infty}}{2+q} \leq C\|v\|_{LL},$$
$$\|\Delta_q v\|_{L^\infty} \leq C\|v\|_{LL}(2+q)2^{-q}.$$

On peut aisément déduire à partir de cette proposition l'inclusion continue $\mathscr{C}^1_* \hookrightarrow \mathscr{C}_{LL}$.
Le résultat suivant est dû à M. Vishik **[113]**.

LEMME 4.12. *Soit $d \geq 2$, il existe une constante $C > 0$ telle que pour toute fonction a de la classe de Schwartz et pour tout difféomorphisme ψ de $\mathbb{R}^d$ préservant la mesure de Lebesgue, on aura pour tout $p \in [1, +\infty]$ et pour tous les $j, q \geq -1$,*

$$\|\Delta_j(\Delta_q a \circ \psi)\|_{L^p} \leq C 2^{-|j-q|}\|\nabla \psi^{\eta(j,q)}\|_{L^\infty}\|\Delta_q a\|_{L^p},$$

où l'on a posé

$$\eta(j, q) = sign(j - q).$$

Il s'agit maintenant de décrire l'effet régularisant du semi groupe de la chaleur dont l'opérateur elliptique associé est de type laplacian fractionnaire : $|\mathrm{D}|^\alpha$.

LEMME 4.13. *Soit $d \geq 2$ et $\alpha \in]0, 2]$, il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout $p \in [1, \infty], q \in \mathbb{N}$ et $t \in \mathbb{R}_+$ on ait*

$$\|e^{t|\mathrm{D}|^\alpha}\Delta_q u\|_{L^p} \leq Ce^{-C^{-1}t2^{q\alpha}}\|\Delta_q u\|_{L^p}.$$

Ce résultat a était démontré par J.-Y. Chemin **[22]** dans le cas $\alpha = 2$ et complété dans **[66]** pour les autres cas $\alpha < 2$.

CHAPITRE 5

Publications

Articles parus ou à paraître

[1] A. Dutrifoy, T. Hmidi : *Incompressible Limit of solutions of the two-dimensional compressible Euler system with degenerating intial data* Comm. Pure Appl. Math. **57** (2004) no 9, 1159-1177

[2] T. Hmidi, S. Keraani : *Blowup theory for the critical nonlinear Schrödinger equations revisited*. Int. Math. Res. Not. 2005, no. 46, 2815–2828.

[3] T. Hmidi : *Régularité höldérienne des poches de tourbillon visqueuses*, J. Math. Pures Appl. (9) **84** (2005), no. 11, 1455-1495.

[4] H. Abidi, T. Hmidi : *Un résultat de décroissance des poches de tourbillon axisymétriques*, Annales de la faculté des Sciences de Toulouse (6) 14 (2005), no. 4, 563-592.

[5] T. Hmidi : *Poches de tourbillon singulières dans un fluide faiblement visqueux*. Rev. Mat. Iberoamericana, **22**, 2 (2006), 489-543.

[6] T. Hmidi, S. Keraani : *Remarks on the blowup for the L^2-critical nonlinear Schrödinger equations*. SIAM J. Math. Anal. **38** (2006), no. 4, 1035–1047.

[7] H. Abidi, T. Hmidi : *Résultats d'existence dans des espaces critiques pour le système de la MHD inhomogène*. Ann. Math. Blaise Pascal 14 (2007), 103-148.

[8] H. Abidi, T. Hmidi : *On the global well-posedness for Boussinesq system*, J. Differential. Equa., **233** 1 (2007) 199-220.

[9] T. Hmidi, S. Keraani : *On the global well-posedness of the two-dimensional Boussinesq system with a zero diffusivity*. Adv. Differential Equations **12** (2007), no. 4, 461–480.

[10] ——— : *Inviscid limit for the two-dimensional Navier-Stokes equation in a critical Besov space*, Asymptot. Anal. **53** (2007), no. 3, 125–138.

[11] ——— : *Incompressible viscous flows in borderline Besov spaces* , Arch. for Rational Mech. and Analysis **189** (2008), no 2, 283-300.

[12] ——— : *On the global solutions of the super-critical 2D quasi-geostrophic equation in Besov spaces*, Adavances in Mathematics, **214** (2007), no. 2, 618–638.

[13] H. Abidi, T. Hmidi : *On the global well-posedness of the critical quasi-geostrophic equation*, SIAM J. Math. Anal. 40 (2008), no. 1, 167-185.

[14] T. Hmidi, S. Keraani : *On the global well-posedness of the two-dimensional Boussinesq system with a zero viscosity*, accepté à Indiana Univ. Math. Journal .

Comptes- rendus

[1] T. Hmidi, *Transport-Diffusion et viscosité évanescente*, C.R. Acad. Sci. Paris, Ser. I **337**, 309-312, 2003.

[2] A. Dutrifoy, T. Hmidi. it The incompressible limit of solutions of the two-dimensional compressible Euler system with degenerating initial data, *C. R. Math. Acad. Sci. Paris*, 336(6) :471–474, 2003.

[3] T. Hmidi, *Régularité höldérienne des poches de tourbillon régulière,* C.R.Math.Acad.Sci.Paris, 339 (2004), no 10, 705-708.
[4] T. Hmidi, S. Keraani : *Limite non visqueuse pour le système de Navier-Stokes dans un espace critique*, C. R. Math. Acad. Sci. Paris 338 (2004), no. 9, 689–692.
[5] S. Keraani : Limite semi-classique pour l'équation de Schrödinger non-linéaire avec potentiel harmonique. , C. R. Math. Acad. Sci. Paris **340** (2005), no. 11, 809–814.
[6] T. Hmidi, S. Keraani : *Existence globale pour le système d'Euler incompressible 2-D dans* $B^1_{\infty,1}$, C. R. Math. Acad. Sci. Paris 341 (2005), no. 11, 655–658.

Actes de colloques

[1] Taoufik Hmidi, *Estimations uniformes en viscosité évanescente.* Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique) (2003-2004), Exp. No. 12, 16 p.
[2] Taoufik Hmidi, *On the global well-posedness of the Boussinesq system with zero viscosity.* Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique) (2007-2008), Exp. No. 24, 15 p.

Articles soumis

[1] A. Abidi, T. Hmidi, S. Keraani : *On the global existence for the axisymetric Euler equations.*
[2] T. Hmidi, M. Zerguine :*Inviscid limit for axisymmetric Navier-Stokes system.*

Bibliographie

[1] H. Abidi, T. Hmidi : *Un résultat de décroissance des poches de tourbillon axisymétriques*, Annales de la faculté des Sciences de Toulouse (6) 14 (2005), no. 4, 563-592.

[2] H. Abidi, T. Hmidi : *Résultats d'existence dans des espaces critiques pour le système de la MHD inhomogène*. Ann. Math. Blaise Pascal 14 (2007), 103-148.

[3] H. Abidi, T. Hmidi : *On the global well-posedness for Boussinesq system*, J. Differential. Equa., **233** 1 (2007) 199-220.

[4] H. Abidi, T. Hmidi : *On the global well-posedness of the critical quasi-geostrophic equation*, SIAM J. Math. Anal. 40 (2008), no. 1, 167-185.

[5] A. Abidi, T. Hmidi, S. Keraani : *On the global existence for the axisymetric Euler equations*, soumis.

[6] K. Asano : *On the incompressible limit of the compressible Euler equation, Japan J. Appl. Math.*, **4** (1987) no. 3, 455-488.

[7] H. Bahouri, J.-Y. Chemin : *Equations de transport relatives á des champs de vecteurs non-lipschitziens et mécanique des fluides*, Arch. Rational Mech. Anal. **127** (1994), no. 2, 159-181.

[8] H. Bahouri, P. Gérard : *High frequency approximation of solutions to critical nonlinear wave equations*, Amer. J. Math. **121** (1999), no. 1, 131-175.

[9] V. Banica : *Remarks on the blow-up for the Schrödinger equation with critical mass on a plane domain*, Ann. Sc. Norm. Super. Pisa Cl. Sci. (5) **3** (2004), no. 1, 139-170.

[10] J. T. Beale, T. Kato, A. Majda : *Remarks on the breakdown of smooth solutions for 3-D Euler equations*, Comm. Math. Phys **94** (1984) 61-66.

[11] J. Ben Ameur, R. Danchin :*Limite non visqueuse pour les fluides incompressibles axisymétriques,* Nonlinear partial differential equations and their applications. Collège de France seminar, vol. **XIV**, 29 - 55,(Paris, 1997/1998), Stud. Math. Appl, **31** North. Holland, Amsterdam, 2002 .

[12] J. -M. Bony : *Calcul symbolique et propagation des singularités pour les équations aux dérivées partielles non linéaires*, Annales de l'école supérieure, **14** (1981) 209-246.

[13] J. R. Cannon, E. Dibenedetto : *The initial value problem for the Boussinesq equations with data in L^p*, in Approximation Methods for Navier-Stokes Problems, Lecture Notes in Math. **771**, Springer, Berlin 1980, 129-144.

[14] M. Cannone, Y. Meyer, F. Planchon, *Solutions autosimilaires des équations de Navier-Stokes,* Séminaire " Equations aux Dérivées Partielles" de l' Ecole polytechnique, Exposé VIII, 1993–1994.

[15] T. Cazenave : *An introduction to Nonlinear Schrödinger Equations*, Courant Lecture Notes in Mathematics, **10**.

[16] T. Cazenave, F. Weissler : *The Cauchy problem for the critical nonlinear Schrödinger equation in* $\mathbf{H}^s$, Nonlinear Anal., TMA **14** (1990), 807-863.

[17] D. Chae : *Local existence and blow-up criterion for the Euler equations in the Besov spaces*, Asymptot. Anal. 38 (2004), no. 3-4, 339-358.

[18] D. Chae : *Global regularity for the* 2*-D Boussinesq equations with partial viscous terms,* Advances in Math. **203** (2006), no. 2, 497-513.

[19] D. Chae, J. Lee : *Global well-posedness in the supercritical dissipative quasi-geostrophic equations*, Asymptot. Anal. **38** (2004), no. 3-4, 339–358.

[20] J.-Y. Chemin : *Perfect incompressible fluids*, volume 14 of Oxford Lecture Series in Mathematics and its Applications. The Clarendon Press Oxford University Press, New York, 1998. Translated from the 1995 French original by Isabelle Gallagher and Dragos Iftimie.

[21] J. -Y. Chemin, N. Lerner : *Flot de champs de vecteurs non lipschitziens et équations de Navier-Stokes*, J. Differential Equations **121** (1995), no. 2, 314–328.

[22] J.-Y. Chemin : *Théorèmes d'unicité pour le système de Navier-Stokes tridimensionnel*, J. Anal. Math. **77** (1999), 27-50.

[23] J. -Y. Chemin, I. Gallagher : *On the global wellposedness of the 3-D incompressible Navier-Stokes equations*, Annales Scientifiques de l'Ecole Normale Supérieure de Paris, **39** (2006), 679-698.

[24] Q. Chen, C. Miao, Z. Zhang : *A new Bernstein's inequality and the* 2*D dissipative quasi-geostrophic equation*, arXiv, math. AP/0607020.

[25] A. Cohen, R. Danchin,*Multiscale approximation of vortex patches*, SIAM J. Appl. Math. **60** (2000), no. 2, 477–502.

[26] J. Colliander, S. Raynor, C. Sulem, J. D Wright : *Ground state mass concentration in the L^2-critical nonlinear Schrodinger equation below H^1*, Math. Res. Lett. **12** (2005), no. 2-3, 357–375.

[27] J. Colliander, M. Keel, G. Staffilani, H. Takaoka, T. Tao : *T. Global existence and scattering for rough solutions of a nonlinear Schrödinger equation on $\mathbb{R}^3$*. Comm. Pure Appl. Math. **57** (2004), no. 8, 987–1014.

[28] J. Colliander, M. Keel, G. Staffilani, H. Takaoka, T. Tao : *Almost conservation laws and global rough solutions to a nonlinear Schrödinger equation*, Math. Res. Lett., **9** (2002), 659–682.

[29] P. Constantin, D. Córdoba, J. Wu : *On the critical dissipative quasi-geostrophic equation*, Indiana Univ. Math. J., **50** (2001), 97-107.

[30] P. Constantin, J. Wu : *Behavior of solutions of* 2*D quasi-geostrophic equations*, SIAM J. Math. Anal, **30** (1999), 937-948.

[31] A. Córdoba, D. Córdoba : *A maximum principle applied to quasi-geostrophic equations*, Comm. Math. Phys., **249** (2004), 511-528.

[32] D. Córdoba, C. Fefferman, R. De La LLave : *On squirt singularities in hydrodynamics,* SIAM, J. Math. Anal. **36** (2004) 204-213.

[33] R. Danchin,*Évolution temporelle d'une poche de tourbillon singulière,* Comm. in Partial Differential Equations, **22** (1997) 685-721.

[34] R. Danchin : *Évolution d'une singularité de type cusp dans une poche de tourbillon,* Revista Marematica Iberoamerica,**16** (2000) 281-329.

[35] R. Danchin : *Density-dependent incompressible viscous fluids in critical spaces,* Proc. RoY. Soc. Edinburgh Sect. A **133**, no. 6, 1311-1334, 2003.

[36] R. Danchin : *Poches de tourbillon visqueuses*, J. Math. Pures Appl. **76** (1997), 609–647.

[37] R. Danchin, M. Paicu : *Le théorème de Leary et le théorème de Fujita-Kato pour le système de Boussinesq partiellement visqueux,* Bulletin de la S. M. F. 2 **136** (2008), 261-309.

[38] R. Danchin : *Zero Mach number limit in critical spaces for compressible Navier-Stokes equations.* Ann. Sci. École Norm. Sup. (4), **35** (2002) 1, 27-75.

[39] B. Desjardins and E. Grenier : *Low Mach number limit of viscous compressible flows in the whole space. R. Soc. Lond. Proc. Ser. A Math. Phys. Eng. Sci.*, 455 (1999), 2271-2279.

[40] B. Desjardins, C. Le Bris : *Remarks on a nonhomogeneous model of magnetohydrodynamics.* Differential and integral equations, **11** (1998), 3, 377-394.

[41] A. Dutrifoy and T. Hmidi : The incompressible limit of solutions of the two-dimensional compressible Euler system with degenerating initial data. C. R. Math. Acad. Sci. Paris, **336** (2003) (6), 471–474.

[42] A. Dutrifoy, T. Hmidi : *Incompressible Limit of solutions of the two-dimensional compressible Euler system with degenerating intial data* Comm. Pure Appl. Math. **57** (2004) no 9, 1159-1177.

[43] G. Duvaut, J.-L. Lions : *Inéquations en thermoélasticité et magnétohydrodynamique.* Arch. Rat. Mech. Anal, **46** (1972) 241-279.

[44] H. Fujita, T. Kato : *On the nonstationnary Navier-Stokes system,* rend. Sem. Mat. Univ. Padova, **32** (1962) $243-260$.

[45] P. Gérard : *Description du défaut de compacité de l'injection de Sobolev*,
ESAIM. COCV, Vol **3**, (1998) 213-233.

[46] P. Gérard : *Oscillations and concentration effects in semilinear dispersive wave equations.* J. Funct. Anal. **141** (1996), no. 1, 60-98.

[47] J.-F. Gerbeau, C. Le Bris : *Existence of solution for a density-dependant magnetohydrodynamic equation.* Adv. Differential equations, **2** (1997) 3, 427-452.

[48] J. Ginibre and G. Velo. : it Generalized Strichartz inequalities for the wave equation, *J. Funct. Anal.*, **133** (1995) 1,50-68.

[49] J. Ginibre, G. Velo : *On a class of nonlinear Schrödinger equations. I. The Cauchy problem, general case*, J. Funct. Anal. **32** (1979), no. 1, 1-32.

[50] J. Ginibre : *Le problème de Cauchy pour des EDP semi-linéaires périodiques en variables d'espace (d'après Bourgain).* (French. French summary) [The Cauchy problem for periodic semilinear PDE in space variables (after Bourgain)] Seminaire Bourbaki, Vol. 1994/95.

[51] B. Guo : *Spectral method for solving two-dimensional Newoton-Boussinesq equation*, Acta Math. Appl. Sinica, **5**(1989) 201-218.

[52] R. T. Glassey : *On the blowing up of solutions to the Cauchy problem for nonlinear Schrödinger equations*, J. Math. Phys. **18** (1977), no. 9, 1794–1797.

[53] T. Hirota, T. Yanagisawa : *Note on global existence for axially symetric solutions of the Euler system*, Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci. **70** (1994), no. 10, 299-304.

[54] T. Y. Hou, C. Li : *Global well-posedness of the viscous Boussinesq equations*, Discrete and Continuous Dynalical Systems, **12** (2205) 1, 1-12.

[55] T. Hmidi : *Transport-Diffusion et viscosité évanescente*, C.R. Acad. Sci. Paris, Ser. I **337** (2003) 309-312.

[56] T. Hmidi : *Régularité höldérienne des poches de tourbillon visqueuses,* J. Math. Pures Appl. (9) **84** (2005), no. 11, 1455-1495.

[57] T. Hmidi : *Poches de tourbillon singulières dans un fluide faiblement visqueux*. Rev. Mat. Iberoamericana, **22**, 2 (2006), 489-543.

[58] T. Hmidi, S. Keraani : *Remarks on the blowup for the L^2-critical nonlinear Schrödinger equations*. SIAM J. Math. Anal. **38** (2006), no. 4, 1035–1047

[59] ______ : *On the global well-posedness of the two-dimensional Boussinesq system with a zero diffusivity*. Adv. Differential Equations **12** (2007), no. 4, 461–480.

[60] ______ :*On the global well-posedness of the Boussinesq system with zero viscosity*, accepté à Indiana Univ. Math. Journal.

[61] ______ : *Blowup theory for the critical nonlinear Schrödinger equations revisited*. Int. Math. Res. Not. 2005, no. 46, 2815-2828.

[62] ______ : *Existence globale pour le système d'Euler incompressible 2-D dans $B^1_{\infty,1}$*. (French) [Global existence for the two-dimensional incompressible Euler system in $B^1_{\infty,1}$] C. R. Math. Acad. Sci. Paris 341 (2005), no. 11, 655-658.

[63] ______ : *Limite non visqueuse pour le système de Navier-Stokes dans un espace critique*. (French) [Inviscid limit for the Navier-Stokes system in a critical space] C. R. Math. Acad. Sci. Paris 338 (2004), no. 9, 689-692.

[64] ______ : *Inviscid limit for the two-dimensional Navier-Stokes equation in a critical Besov space*, Asymptot. Anal. **53** (2007), no. 3, 125-138.

[65] ______ : *Incompressible viscous flows in borderline Besov spaces*, Arch. for Rational Mech. and Analysis **189** (2008), no 2, 283-300.

[66] ______ : *On the global solutions of the super-critical 2D quasi-geostrophic equation in Besov spaces* à paraître dans Advances in Mathematics.

[67] T. Hmidi, M. Zerguine : *Inviscid limit for axisymmetric Navier-Stokes system, soumis.*

[68] V. I. Iudovich, M. R. Ukhovskii : *Axially symetric flows of ideal and viscous fluids filling the whole space*, Prikl. Mat. Meh. 32 (1968), no. 1, 59-69.

[69] N. Ju : *Existence and uniqueness of the solution to the dissipative 2D quasi-geostrophic equations in the Sobolev space.* Comm. Math. Phus. **251** (2004), 365-376.

[70] ______ : *On the two dimensional quasi-geostrophic equations,* Indiana Univ. Math. J. **54** (2005), no. 3, 897-926.

[71] ______ : *Global solutions to the two dimensional quasi-geostrophic equation with critical or super-critical dissipation* Math. Ann. **334** (2006), no. 3, 627-642.

[72] T. Kato : *Nonstationary flows of viscous and ideal fluids in R^3*. J. Functional Analysis **9** (1972), 296-305.

[73] C. Kenig, F. Merle : *Global well-posedness, scattering and blow-up for the energy-critical, focusing, non linear Schrödinger equation in the radial case*, Invent. Math. **166** (2006), 645-675.

[74] S. Keraani : *On the defect of compactness for the Strichartz estimates of the Schrödinger equations*, J. Differential Equations **175** (2001), no. 2, 353–392.

[75] ______ : *On the blow up phenomenon of the critical nonlinear Schrödinger equation*, J. Funct. Anal. **235** (2006), no. 1, 171–192.

[76] A. Kiselev, F. Nazarov, A. Volberg : *Global well-posedness for the critical 2D dissipative quasi-geostrophic equation*, Invent. Math. **167** (2007) 3, 445-453.

[77] S. Klainerman and A. Majda : *Singular limits of quasilinear hyperbolic systems with large parameters and the incompressible limit of compressible fluids*. Comm. Pure Appl. Math., **34** (1981) 4, 481-524.

[78] S. Klainerman and A. Majda : *Compressible and incompressible fluids.* Comm. Pure Appl. Math., **35** (1982) 5, 629-651.

[79] H. Koch,D. Tataru : *Well–posedness for the Navier–Stokes equations*, Advances in Mathematics, 157, 2001, pages 22–35.

[80] P. G. Lemarié-Rieusset : *Recent progress in the Navier-Stokes problem*.

[81] J. Leray : *Sur le mouvement d'un liquide visqueux remplissant l'espace*, Acta mathematica, **63** (1934) 193-248.

[82] P-L. Lions : *The concentration-compactness principle in the calculus of variations. The compact case. Part 1*, Ann. Inst. Henri Poincaré, Analyse non linéaire **1** (1984), 109-145.

[83] P.-L. Lions : *Mathematical topics in fluid dynamics*, Vol1 incompressible models, Oxford university press 1996.

[84] H. K. Moffatt : *Some remarks on topological fluid mechanics*, in An Introduction to the geometry and Topology of Fluid Flows, R. L. Ricca, ed., Kuwer Academic Publishers, Dordrecht, The Netherlands, 3-10, 2001.

[85] A. Majda : *Vorticity and the mathematical theory of an incompressible fluid flow,* Comm. on Pure and Applied Math. **38** (1986), 187-220.

[86] F. Merle : *Determination of blowup solutions with minimal mass for nonlinear Schrödinger equations with critical power*, Duke Math. J. **69**, (1993), no. 2, 203-254.

[87] ______ : *Blow-up phenomena for critical nonlinear Schrödinger and Zakharov equations*. Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Vol. IIi (Berlin, 1998). Doc. Math. 1998, Extra Vol. III, 57–66.

[88] F. Merle, P. Raphael : *On a sharp lower bound on the blow-up rate for the L^2 critical nonlinear Schrödinger equation*. J. Amer. Math. Soc. 19 (2006), no. 1, 37-90.

[89] F. Merle, P. Raphael : *On universality of blow-up profile for L^2 critical nonlinear Schrödinger equation*. Invent. Math. 156 (2004), no. 3, 565–672.

[90] F. Merle, Y. Tsutsumi : *L^2 concentration of blowup solutions for the nonlinear Schrödinger equation with critical power nonlinearity*, J. Differential Equations **84** (1990), no. 2, 205–214.

[91] F. Merle, L. Vega : *Compactness at blowup time for L^2 solutions of the critical nonlinear Schrödinger equations in 2D*, IMRN, No. 8, (1998), 399-425.

[92] G. Métivier and S. Schochet : *The incompressible limit of the non-isentropic Euler equations*. Arch. Ration. Mech. Anal. **158** (2001) 1, 61-90.

[93] F. Planchon : *Sur une inégalité de type Poincaré*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. 330 (2000), no. 1, 21-23.

[94] F. Planchon, P. Raphael :*Existence and stability of the log-log blow-up dynamics for the L^2-critical nonlinear Schrödinger equation in a domain*, Ann. Henri Poincaré **8** (2007), no. 6, 1177-1219.

[95] G. Perelman : *On the blow up phenomenon for the critical nonlinear Schrödinger equation in 1D*, Ann. Henri. Poincaré, **2** (2001), 605-673.

[96] M. A. Rammaha : *Formation of singularities in compressible fluids in two-space dimensions*, Proc. Amer. Math. Soc. 107 (1989), no. 3, 705-714.

[97] S. Resnick : *Dynamical problem in nonlinear advective partial differential equations*, Ph. D. thesis, University of Chicago, 1995.

[98] P. Serfati : *Solutions C^∞ en temps, n-log Lipschitz bornées en espace et ?equation d'Euler*, C. R. Acad. Sci. Paris Sr. I Math. **320** (1995),

[99] W. E Shu, C-W. Shu : *Small scale structures in Boussinesq convection*, Phys. Fluids, **6**(1994) 1, 49-58.

[100] T. Sideris : *Formation of singularities in three-dimensional compressible fluids*, Comm. Math. Phys. 101 (1985), no. 4, 475-485.

[101] R. Strichartz : *Restrictions of Fourier transforms to quadratic surfaces and decay of solutions of wave equation*, Duke Math. J. **44** (1977), 705-714.

[102] C. Sulem, P-L. Sulem : *The nonlinear Schrödinger equation. Self-focusing and wave collapse*, Applied Mathematical Sciences, 139. Springer-Verlag, New York, 1999.

[103] T. Terence, M. Visan, X. Zhang : *Global well-posedness and scattering for the mass-critical nonlinear Schrödinger equation for radial data in high dimensions,* arXiv :math/0609692.

[104] T. Terence, M. Visan, X. Zhang : *Minimal-mass blowup solutions of the mass-critical NLS*, arXiv :math/0609690.

[105] H. Triebel. *Theory of function spaces*, volume 78 of Monographs in Mathematics. Birkhäuser Verlag, Basel, 1983.

[106] Y. Tsutsumi : *Rate of L^2 concentration of blowup solutions for the nonlinear Schrödinger equation with critical power*, Nonlinear Anal. **15** (1990), no. 8, 719–724.

[107] N. Tzirakis : *Mass concentration phenomenon for the quintic nonlinear Schrödinger equation in one dimension* , SIAM J. Math. Anal. 37 (2006), no. 6, 1923-1946,.

[108] S. Ukai : *The incompressible limit and the initial layer of the compressible Euler equation.* J. Math. Kyoto Univ. **26** (1986) 2, 323-331.

[109] M. Ukhoviskii, V. Yudovich : *Axially symmetric flows of ideal and viscous fluid filling the whole space,* J. of Applied Math. and Mecha. **32** (1968) 52-69.

[110] L. Vega : *Schrödinger equation : Pointwise convergence to the initial data*, Proc. Am. Math. Soc. **102**, N. 4 (1988) 874-878.

[111] M. Visan : *The defocusing energy-critical nonlinear Schrödinger equation in higher dimensions,* Duke Math. J. **138** (2007), no. 2, 281–374.

[112] M. Visan, X. Zhang : *On the blowup for the L^2-critical focusing nonlinear Schrödinger equation in higher dimensions below the energy class*, SIAM J. Math. Anal. **39** (2007), no. 1, 34–56.

[113] M. Vishik : *Hydrodynamics in Besov Spaces*, Arch. Rational Mech. Anal **145** (1998) 197-214.

[114] M. Vishik : *Incompressible flows of an ideal fluid with vorticity in borderline spaces of Besov type*, Annales scientifiques de l'École Normale Supérieure Sér. 4, **32** no. 6 (1999), 769-812.

[115] M. I. Weinstein : *Nonlinear Schrödinger equations and sharp interpolation estimates*, Comm. Math. Physi. **87** (1983), 567-567.

[116] ______ : *On the structure of singularities in solutions to the nonlinear dispersive evolution equations*, Comm. Partial Differential Equations, **11** (1984), 545-565.

[117] ______ : *The nonlinear Schrödinger equation—singularity formation, stability and dispersion. The connection between infinite-dimensional and finite-dimensional dynamical systems*, Contemp. Math., 99, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1989, 213-232.

[118] ______ : : *Lyapunov stability of ground states of nonlinear Schrödinger equations*, SIAM J. Math. Anal. **16** (1985), 472-491.

[119] J. Wu : *Solutions to the 2D quasi-geostrophic equations in Hölder spaces*, Nonlinear Analysis, **62** (2005), 579-594.

[120] ______ : *Global solutions of the 2D dissipative quasi-geostrophic equations in Besov spaces*, SIAM J. Math. Anal., **36** (2004/05), no 3, 1014-1030.