Fractions rationelles

Exercice 0.1. Déterminer les polynômes P dans les cas suivants

1) $P(X^3) = P^2(X)$ 2) $P(X+1) = P(X)$

——————— **Solution** ———————

1) On remarque d'abord que tout polynôme constant est solution de cette équation fonctionnelle. Nous allons en fait démontrer qu'il n'y en a pas d'autres. Pour ce faire on raisonne par l'absurde, en supposant qu'il existe un polynôme non constant P satidfaisant cette équation. Soit $n = d^\circ P$, alors on a forcèment $n \geq 1$. D'un aute côté, on a $d^\circ(P(X^3)) = 3n$ et $d^\circ(P^2(X)) = 2n$. Ce qui donne $3n = 2n$ et en conséquence $n = 0$, ce qui est absurde.

2) On pose $Q(X) = P(X) - P(0)$. Alors il est facile de vérifier que $Q(0) = 0$ et $Q(X+1) = Q(X)$. Il en découle par récurrence que $Q(n) = 0$, $\forall n \in \mathbf{N}$. Or on sait qu'un polynôme qui s'annule une infinité de fois est forcément le polynôme nul. Ainsi $P(X) = P(0)$ et en conséquence P est un polynôme constant.

Exercice 0.2. 1) Soit $z_0 \in \mathbf{C}$. En dévéloppant $(z - z_0)(z - \overline{z_0})$ montrer que $(z - z_0)(z - \overline{z_0})$ est un trinôme à coefficients réels.

On note par $p(z)$ le polynôme complexe définie par $p(z) = z^5 - z^4 + z^3 + z^2 + 2$.

2) Montrer que si z_0 est une racine de $p(z)$ alors $\overline{z}_0$ l'est aussi.

3) Vérifier que $1 + i$ est une racine de $p(z)$. En déduire un trinôme à coefficients réels, noté $h(z)$, qui divise le polynôme $p(z)$. Quel est le quotient $q(x)$ qu'on obtient par division euclidienne de $p(z)$ par $h(z)$.

4) Trouver une racine évidénte de $q(z)$.

5) Trouver toutes les racines (complexes) de $p(z)$.

6) Quelle est la décomposition de $p(x)$ en facteurs irréductibles sur $\mathbf{R}$.

——————— **Solution** ———————

(*Solution complète.* 1) $(z - z_0)(z - \overline{z_0}) = z^2 - 2\mathrm{Re(z)}\ \mathrm{z} + |\mathrm{z}|^2$.

2) $p(z) = z^5 - z^4 + z^3 + z^2 + 2$. Soit z_0 t.q. $p(z_0) = 0$. Alors $p(\overline{z_0}) = \overline{z}^5 - \overline{z}^4 + \overline{z}^3 + \overline{z}^2 + 2 = \overline{z^5} - \overline{z^4} + \overline{z^3} + \overline{z^2} + 2 = \overline{p(z_0)} = \overline{0} = 0$.

3) $z_0 = 1 + i$ est racine, donc $p(z)$ est divisible par $h(z) = (z - z_0)(z - \overline{z_0}) = z^2 - 2z + 2$. Une division euclidienne donne $q(z) = z^3 + z^2 + z + 1$.

4) $z = 1$ est racine évidente de $q(z) = z^3 + z^2 + z + 1$. Une division euclidienne de $q(z)$ par $z - 1$ donne le quotient $z^2 + 1$. On en déduit que $p(z) = (z - (1+i))(z - (1-i))(z - 1)(z - i)(z + i)$ et les racines de $p(z)$ sont $1 + i, 1 - i, 1, i, -i$.

Exercice 0.3. Décomposer en éléments simples dans $\mathbf{R}(X)$:

1) $\dfrac{X+3}{(X+1)(X+2)}$ 2) $\dfrac{4X^3}{X^4 - 1}$ 3) $\dfrac{X+1}{X^2 - 2X + 1}$

4) $\dfrac{X^2 - 4X + 3}{(X_2)^3}$. 5) $\dfrac{3X^2 - X + 11}{(4 + X^2)^2}$ 6) $\dfrac{1}{X^3 - 1}$

Solution

1) $\dfrac{x+3}{(x+1)(x+2)} = \dfrac{2}{x+1} - \dfrac{1}{x+2}$.

2) (*solution complète*)

• $R(x) = \dfrac{4x^3}{x^4-1}$. $x^4-1 = (x^2-1)(x^2+1) = (x-1)(x+1)(x^2+1)$.

$R(x) = \dfrac{a}{x-1} + \dfrac{b}{x+1} + \dfrac{cx+d}{x^2+1}$. En multipliant par $x-1$ et en posant $x=1$ on trouve $a=1$; En multipliant par $x+1$ et en posant $x=-1$ on trouve $b=1$;

En multipliant par x^2+1 et en posant $x=i$ on trouve $c=2$ et $d=0$;

(*Variantes pour trouver c et d :*

(i) Si on pose $x=0$ on trouve $d=0$. En multipliant par x et en faisant tendre x vers $+\infty$ on obtient $c=2$.

(ii) $\dfrac{cx+d}{x^2+1} = \dfrac{4x^3}{(x^2+1)(x-1)(x+1)} - \dfrac{1}{x-1} - \dfrac{1}{x+1} = \dfrac{2x^3-2x}{(x^2+1)(x-1)(x+1)} = \dfrac{2x}{x^2+1}$.)

(*Méthode pas déstinée aux étudiants (?) :* $R(-x) = -R(x)$ et l'unicité de la décomposition en éléments simples donne $a=b$ et $d=0$. On trouve a et c comme avant.)

Donc $R(x) = \dfrac{1}{x-1} + \dfrac{1}{x+1} + \dfrac{2x}{x^2+1}$.

• $\dfrac{P(x)}{Q(x)} = \dfrac{4x^7+2x^4-2}{x^4-1}$.

$\deg(P(x)) \geq \deg(Q(x))$, donc on effectue une division euclidienne :

$$\begin{array}{r|l} 4x^7+2x^4 \qquad\quad -2 & x^4-1 \\ \cline{2-2} 4x^7 \qquad -4x^3 \qquad & 4x^3+2 \\ \hline 2x^4+4x^3-2 & \\ 2x^4 \qquad -2 & \\ \hline 4x^3 \qquad & \end{array}$$

Donc $\dfrac{4x^7+2x^4-2}{x^4-1} = 4x^3+2+R(x) = 4x^3+2+\dfrac{1}{x-1} + \dfrac{1}{x+1} + \dfrac{2x}{x^2+1}$.

3) (*solution complète*) $\dfrac{x+1}{x^2-2x+1} = \dfrac{x+1}{(x-1)^2} = \dfrac{a}{x-1} + \dfrac{b}{(x-1)^2}$.

En multipliant par $(x-1)^2$ et en posant $x=1$ on trouve $b=2$;

En posant $x=0$ on trouver $a=1$.

(*Variantes pour trouver a :*

(i) En multipliant par x et en faisant tendre x vers $+\infty$ on obtient $a=1$.

(ii) $\dfrac{a}{x-1} = \dfrac{x+1}{(x-1)^2} - \dfrac{2}{(x-1)^2} = \dfrac{1}{x-1}$.)

Donc $\dfrac{x+1}{x^2-2x+1} = \dfrac{1}{x-1} + \dfrac{2}{(x-1)^2}$.

(*Méthode pas déstinée aux étudiants (?) :* $\dfrac{x+1}{x^2-2x+1} = \dfrac{x+1}{(x-1)^2} = \dfrac{x-1+2}{(x-1)^2} = \dfrac{1}{x-1} + \dfrac{2}{(x-1)^2}$. Faut-il parler de ce type d'argument aux etudiants ?)

4) (*solution complète*) $\dfrac{x^2-4x+3}{(x-2)^3} = \dfrac{a}{x-2} + \dfrac{b}{(x-2)^2} + \dfrac{c}{(x-2)^3}$.

En multipliant par $(x-2)^3$ et en posant $x=2$ on trouve $c=-1$; En multipliant par x et en faisant tendre x vers $+\infty$ on obtient $a=1$. En posant $x=1$ on trouve $b=0$.

(*Variante pour trouver a et b :* $\frac{a}{x-2}+\frac{b}{(x-2)^2}=\frac{x^2-4x+3}{(x-2)^3}-\frac{-1}{(x-2)^3}=\frac{1}{x-2}$, donc (unicité ...) $a=1$ et $b=0$.)

$\frac{x^2-4x+3}{(x-2)^3}=\frac{1}{x-2}-\frac{1}{(x-2)^3}$.

(*Méthode pas déstinée aux étudiants (?) :* $\frac{x^2-4x+3}{(x-2)^3}=\frac{x^2-4x+4-1}{(x-2)^3}=\frac{1}{x-2}-\frac{1}{(x-2)^3}$. Faut-il parler de ce type d'argument aux etudiants ?)

5) (*solution complète*) $\frac{3x^2-x+11}{(4+x^2)^2}=\frac{ax+b}{4+x^2}+\frac{cx+d}{(4+x^2)^2}$.

En multipliant par x^2+4 et en posant $x=2i$ on trouve $c=-1$ et $d=-1$;
$x=0$ donne $b=3$; en multipliant par x et en faisant tendre x vers $+\infty$ on obtient $a=0$.

(*Variante pour trouver a et b :* $\frac{ax+b}{4+x^2}=\frac{3x^2-x+11}{(4+x^2)^2}-\frac{-x-1}{(4+x^2)^2}=\frac{3}{x^2+4}$.)

Donc $\frac{3x^2-x+11}{(4+x^2)^2}=\frac{3}{4+x^2}-\frac{x+1}{(4+x^2)^2}$.

(*Méthode pas déstinée aux étudiants (?) :* $\frac{3x^2-x+11}{(4+x^2)^2}=\frac{3x^2+12-x-1}{(4+x^2)^2}=\frac{3}{4+x^2}-\frac{x+1}{(4+x^2)^2}$. Faut-il parler de ce type d'argument aux etudiants ?)

6) $\frac{1}{x^3-1}$ Racine évidente de $x^3-1=0$: $x=1$. Une division euclidienne donne $x^3-1=(x-1)(x^2+x+1)$. (Aussi : $x^3-1=(x-1)(x-j)(x-\bar{j})$.)

$\frac{1}{x^3-1}=\frac{a}{x-1}+\frac{bx+c}{x^2+x+1}$.

En multipliant par $x-1$ et en posant $x=1$ on trouve $a=\frac{1}{3}$;
$x=0$ donne $c=-\frac{2}{3}$; en multipliant par x et en faisant tendre x vers $+\infty$ on obtient $b=-\frac{1}{3}$.

(*Variante pour trouver b et c :* (Calcul plus longue)

$\frac{bx+c}{x^2+x+1}=\frac{1}{(x-1)(x^2+x+1)}-\frac{\frac{1}{3}}{x-1}=-\frac{1}{3}\frac{x^2+x-2}{(x-1)(x^2+x+1)}=-\frac{1}{3}\frac{x+2}{x^2+x+1}$.)

Donc $\frac{1}{x^3-1}=\frac{1}{3}\frac{1}{x-1}-\frac{1}{3}\frac{x+2}{x^2+x+1}$.

Exercice 0.4.

1) Déterminer la partie entière de $R=\frac{x^6-2x^5+x^4-x^3+5x^2-4x+1}{x^5-3x^4+3x^3-x^2}$.
2) Trouver les racines de $x^5-3x^4+3x^3-x^2$ et déterminer leur multiplicité.
3) Décomposez $\frac{x^4-3x^3+6x^2-4x+1}{x^5-3x^4+3x^3-x^2}$ en éléments simples.
4) En déduire la décomposition de R en éléments simples

Solution

1) $R=x+1+\frac{x^4-3x^3+6x^2-4x+1}{x^5-3x^4+3x^3-x^2}=x+1+\frac{P(x)}{Q(x)}$

2) $Q(x) = x^2 f(x)$. 1 est racine évidente de f et $f'(1) = f''(1) = 0$ ($f'''(1) \neq 0$), donc $Q(x) = x^2(x-1)^3$.

$$3)\ \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x^2} + \frac{c}{x-1} + \frac{d}{(x-1)^2} + \frac{e}{(x-1)^3}.$$

On trouve $b = -1$ et $e = 1$. En mettant les termes connus du côté gauche de l'équation et en simplifiant on trouve

$$\frac{x^2 - x + 1}{x(x-1)} = \frac{a}{x} + \frac{c}{x-1} + \frac{d}{(x-1)^2}.$$

On trouve $a = 1$, $d = 1$ et $c = 0$.

$$4)\ R = x + 1 + \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{1}{(x-1)^2} + \frac{1}{(x-1)^3}.$$