Université Rennes I Année 2008-2009
L1- PCSTM **OM1**

Examen de rattrapage

Le 11/06/2009

Exercice 1.
Le but ici est de déterminer les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $z^3 - 6z - 7i = 0 \quad (\star)$.
1) Vérifier que $z_1 = -i$ est une solution de l'équation $(\star)$.
2) En déduire que $z^3 - 6z - 7i = (z+i)P(z)$, où $P(z)$ est un polynôme à déterminer.
3) Donner toutes les solutions complexes de $(\star)$

Exercice 2. Soit f la fonction définie par

$$f(x) = x + 3\,\mathrm{Arctan}\,x - \ln\big(\frac{x-1}{x+1}\big).$$

1) Déterminer le signe de $\frac{x-1}{x+1}$ selon les valeurs de x et en déduire le domaine de définition $\mathcal{D}_f$ de f.
2) Vérifier que f est impaire.
3) Montrer que pour tout $x \in \mathcal{D}_f$ on a

$$f'(x) = \frac{x^4 + x^2 - 6}{x^4 - 1}\cdot$$

4) En déduire que le signe de $f'(x)$ est celui de $x^4 + x^2 - 6$.
5) Etudier les variations de f.
6) Calculer les limites de f aux bornes de $\mathcal{D}_f \cap [0, +\infty[$.
7) Calculer $\lim_{x\to+\infty}(f(x) - x)$. En déduire que f admet une asymptote oblique en $+\infty$ et en déterminer une équation cartésienne.

Exercice 3.
1) Calculer $\displaystyle\int \frac{x^2}{x+1}dx$, on pourrait remarquer que $\displaystyle\frac{x^2}{x+1} = ax + b + \frac{c}{x+1}$, avec a, b et c des nombres à préciser.
2) Calculer $\displaystyle\int (1-x)e^{-\frac{1}{2}x^2+x}dx$, on pourrait utiliser le changement de variable $t = -\frac{1}{2}x^2 + x$.
3) Résoudre sur $]-1, +\infty[$ l'équation différentielle $y' - \dfrac{x^2}{x+1}y = 0$.
4) A l'aide de la méthode de la variation de la constante, déterminer une solution particulière de l'équation

$$y' - \frac{x^2}{x+1}y = x^2 - 1 \quad (\star\star)$$

5) Donner la forme de toutes les solutions de $(\star\star)$.

Exercice 4.
On se propose de résoudre l'équation différentielle

$$y'' + y' + y = e^x \quad (*)$$

1) Résoudre l'équation homogène associée.
2) Chercher une solution particulière de $(*)$. On pourrait la chercher sous forme de $P(x)e^x$, avec $P(x)$ un polynôme.
3) Donner toutes les solutions de $(*)$.