

# Existence globale pour le système d'Euler incompressible 2-D dans $B_{\infty,1}^1$

Taoufik HMIDI <sup>a</sup> Sahbi KERAANI <sup>b</sup>

<sup>a</sup> IRMAR, Campus de Beaulieu 35042 Rennes e-mail :thmidi@univ-rennes1.fr

<sup>b</sup> IRMAR, Campus de Beaulieu 35042 Rennes e-mail :keraani@univ-rennes1.fr

(Reçu le jour mois année, accepté après révision le jour mois année)

**Résumé.** *Nous montrons que le système d'Euler incompressible 2-D est globalement bien posé dans l'espace de Besov critique  $B_{\infty,1}^1$ . Nous établissons aussi une estimation uniforme en la viscosité pour le système de Navier-Stokes incompressible dans un tel espace. Un résultat de limite visqueuse est également donné. © 2003 Académie des sciences/Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS*

---

*Global existence for the two-dimensional incompressible Euler system in  $B_{\infty,1}^1$*

---

**Abstract.** We prove a global well-posedness result for the two-dimensional Euler system in the critical Besov space  $B_{\infty,1}^1$ . We also establish a uniform estimate on the viscosity for the incompressible Navier-Stokes system in that space. An inviscid limit result is also given.

© 2003 Académie des sciences/Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS

## 1. Introduction

Les systèmes de Navier-Stokes et Euler incompressibles sont respectivement donnés par :

$$(NS_{\nu}) \begin{cases} \partial_t v_{\nu} + v_{\nu} \cdot \nabla v_{\nu} - \nu \Delta v_{\nu} = -\nabla p_{\nu} \\ \operatorname{div} v_{\nu} = 0 \\ v_{\nu}|_{t=0} = v^0 \end{cases} \quad \text{et} \quad (E) = (NS_0) \begin{cases} \partial_t v_0 + v_0 \cdot \nabla v_0 = -\nabla p \\ \operatorname{div} v_0 = 0 \\ v_0|_{t=0} = v^0, \end{cases}$$

où  $\nu > 0$  est la viscosité du fluide,  $v_{\nu}$  (ou  $v$ ) la vitesse du fluide. Les scalaires  $p_{\nu}$  et  $p$  représentent la pression. En dimension deux d'espace, le tourbillon, défini par  $\omega = \partial_1 v^2 - \partial_2 v^1$ , vérifie pour tout  $\nu \geq 0$  l'équation

$$\partial_t \omega_{\nu} + v_{\nu} \cdot \nabla \omega_{\nu} - \nu \Delta \omega_{\nu} = 0.$$

La théorie d'existence et d'unicité que ce soit pour le système  $(NS_{\nu})$  ou pour  $(E)$  a été bien développée dans de nombreux espaces fonctionnels. Par exemple, J. Leray [7] montre que  $(NS_{\nu})$  possède une solution faible globale dans l'espace d'énergie sans toutefois avoir l'unicité sauf en dimension deux. Il va falloir attendre les années soixante pour voir H. Fujita et T. Kato [2] établir l'existence et l'unicité de solutions

---

Note présentée par Jean-Michel BONY

S0764-4442(00)0????-?/FLA

© 2003 Académie des sciences/Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS. Tous droits réservés.

fortes dans l'espace de Sobolev homogène  $\dot{H}^{\frac{d}{2}-1}$ . Nous signalons que le résultat persiste encore dans les espaces de Sobolev inhomogènes  $H^s$ , avec  $s \geq d/2 - 1$ . Leur méthode a été ensuite reprise par de nombreux mathématiciens qui ont pu valider les mêmes résultats dans différents espaces stables par les invariances du système  $(NS_\nu)$ . En ce qui concerne le système d'Euler  $(E)$ , T. Kato et G. Ponce [6] montrent localement en temps l'existence d'une unique solution forte dans les espaces de Sobolev  $H^s$ , avec  $s > d/2 + 1$ . En dimension deux, la solution est globale, essentiellement pour deux raisons : d'une part on a la conservation de la norme  $L^\infty$  du tourbillon et d'autre part on a une estimation logarithmique liant la norme Lipschitz de la vitesse à sa norme de Sobolev  $H^s$ . Notons que des résultats similaires ont été obtenus par D. Chae [1] dans des espaces de Besov surcritiques. Dans le cas critique la situation est plus complexe car l'estimation logarithmique n'est plus valable. Cependant M. Vishik montre dans [9] une estimation logarithmique qui tient fortement à la structure particulière du tourbillon, qui est explicité avec le flot. Ceci lui a permis de valider un résultat d'existence et d'unicité global dans les espaces de Besov  $B_{p,1}^{2/p+1}$ , avec  $1 < p < \infty$ . Récemment C. P. Hee et J. P. Young [3] montrent un résultat local d'existence et d'unicité dans  $B_{\infty,1}^1$  qui est valable en toute dimension. Nous montrons ici qu'en dimension deux les systèmes  $(E)$  et  $(NS_\nu)$  sont globalement bien posés dans cet espace critique et que la solution visqueuse est uniformément contrôlée en viscosité évanescence et converge vers la solution eulérienne. Signalons que ce travail prolonge des résultats obtenus récemment par les auteurs [5] dans les espaces de Besov critiques, avec  $p$  fini. Avant d'énoncer notre principal résultat nous allons définir les espaces de Besov via les opérateurs de Littlewood-Paley construits de la manière suivante : il existe deux fonctions positives et régulières  $\chi$  et  $\varphi$  qui sont supportées respectivement dans une boule et une couronne telles que,  $\chi(\xi) + \sum_{q \geq 0} \varphi(2^{-q}\xi) = 1$ ,  $\forall \xi \in \mathbb{R}^d$ . On pose alors pour toute distribution tempérée  $u$

$$\Delta_{-1}u = \chi(\mathbf{D})u \quad \text{et} \quad \forall q \in \mathbb{N}, \Delta_q u = \varphi(2^{-q}\mathbf{D})u.$$

On définit les espaces de Besov inhomogènes par

$$B_{p_1, p_2}^s = \left\{ u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d), \|u\|_{B_{p_1, p_2}^s} \stackrel{\text{déf}}{=} (2^{qs} \|\Delta_q u\|_{L^{p_1}})_{\ell^{p_2}} < +\infty \right\}; p_1, p_2 \in [1; \infty]; s \in \mathbb{R}.$$

Voici notre principal résultat.

**THÉORÈME 1.1.** – *Soit  $v^0 \in B_{\infty,1}^1(\mathbb{R}^2)$  de divergence nulle. Alors pour tout  $\nu \geq 0$ , le système  $(NS_\nu)$  possède une unique solution globale dans  $\mathcal{C}([0, +\infty); B_{\infty,1}^1)$ . De plus, il existe une constante  $C_0$  dépendant seulement de  $v^0$ , et non de la viscosité, telle que,*

$$\|v_\nu(t)\|_{B_{\infty,1}^1} \leq C_0 e^{\exp C_0 t}.$$

*On aussi le résultat de limite non visqueuse suivant :*

$$\|v_\nu(t) - v_0(t)\|_{B_{\infty,1}^0} \leq C_0 e^{C_0 t} (\nu t)^{\frac{1}{2}}.$$

### Démonstration.

Pour démontrer un résultat global de persistance de la régularité pour  $(E)$  et  $(NS_\nu)$ , il suffit d'avoir un contrôle de la norme Lipschitz de la vitesse. Pour ce faire, on écrit par le lemme de Bernstein et par définition des espaces de Besov

$$\|\nabla v_\nu(t)\|_{L^\infty} \leq C \|\Delta_{-1} v_\nu(t)\|_{L^\infty} + C \sum_{q \geq 0} \|\Delta_q \omega_\nu(t)\|_{L^\infty} \leq C \|v_\nu(t)\|_{L^\infty} + C \|\omega_\nu(t)\|_{B_{\infty,1}^0}.$$

Le point clef de la preuve est une estimation logarithmique que nous avons établie dans les équations de transport-diffusion, généralisant un résultat de M. Vishik [9] dans le cadre eulérien.

PROPOSITION 1.2. – Soit  $v$  un champs de vecteurs de divergence nulle et appartenant à  $L^1_{loc}(\mathbb{R}_+; \text{Lip}(\mathbb{R}^d))$  et  $f^0 \in B^0_{\infty,1}$ . Soit  $f$  une solution de l'équation de transport-diffusion

$$(TD_\nu) \begin{cases} \partial_t f + v \cdot \nabla f - \nu \Delta f = 0 \\ f|_{t=0} = f^0, \end{cases}$$

appartenant à  $L^\infty_{loc}(\mathbb{R}_+; B^0_{\infty,1})$ . Alors, il existe une constante dépendant seulement de  $d$ , telle que,

$$\|f(t)\|_{B^0_{\infty,1}} \leq C \|f^0\|_{B^0_{\infty,1}} \left(1 + \int_0^t \|\nabla v(\tau)\|_{L^\infty} d\tau\right).$$

En appliquant cette estimation au tourbillon visqueux et en se servant du lemme de Gronwall, on trouve

$$\|\nabla v_\nu(t)\|_{L^\infty} \leq C \|v_\nu\|_{L^\infty([0,t] \times \mathbb{R}^2)} e^{Ct \|\omega^0\|_{B^0_{\infty,1}}}.$$

Pour conclure nous établissons l'estimation suivante qui généralise celle de P. Serfati [8] obtenue dans le cadre eulérien.

LEMME 1.3. – Il existe une constante absolue  $C$ , telle que si  $v_\nu$  est la solution de  $(NS_\nu)$  2–D, avec  $v^0, \omega^0 \in L^\infty$ , alors on a

$$\|v_\nu(t)\|_{L^\infty} \leq C \|v^0\|_{L^\infty} e^{Ct \|\omega^0\|_{L^\infty}}.$$

**Idées de la démonstration de la limite non visqueuse.** On pose  $\bar{v} = v_\nu - v$  et  $\bar{\pi}_\nu = \pi_\nu - \pi$ , alors on aura

$$(\widetilde{NS_\nu}) \begin{cases} \partial_t \bar{v} + v_\nu \cdot \nabla \bar{v} = \nu \Delta v_\nu - \bar{v} \cdot \nabla v - \nabla \bar{\pi}_\nu \\ \bar{v}(0) = 0. \end{cases}$$

Un résultat classique de propagation de la régularité Besov dans les équations de transport donne

$$\|\bar{v}(t)\|_{B^0_{\infty,1}} \leq C e^{CV_\nu(t)} \int_0^t e^{-CV_\nu(\tau)} \left( \nu \|\Delta v_\nu\|_{B^0_{\infty,1}} + \|\bar{v} \cdot \nabla v\|_{B^0_{\infty,1}} + \|\nabla \bar{\pi}_\nu\|_{B^0_{\infty,1}} \right) d\tau. \quad (1)$$

avec  $V_\nu(t) = \int_0^t \|\nabla v_\nu(\tau)\|_{L^\infty} d\tau$ . Les deux derniers termes du membre de droite ne sont pas difficiles à traiter, toute la difficulté réside dans le premier terme. Pour l'estimer on utilise un résultat d'interpolation réelle qui donne

$$\|\Delta v_\nu\|_{L^1_t B^0_{\infty,1}} \leq \|\omega_\nu\|_{\widetilde{L^1_t B^1_{\infty,1}}} \leq \|\omega_\nu\|_{L^{\frac{1}{2}}_t B^0_{\infty,\infty}} \|\omega_\nu\|_{L^{\frac{1}{2}}_t B^{2,\infty}_{\infty,\infty}},$$

avec  $\|f\|_{\widetilde{L^r_t B^s_{p_1,p_2}}} = (2^{qs} \|\Delta_q f\|_{L^r_t L^{p_1}})_{\ell^{p_2}(\mathbb{N} \cup \{-1\})}$ . Par l'inégalité de Hölder et la première partie du Théorème 1.1, on a

$$\|\omega_\nu\|_{L^{\frac{1}{2}}_t B^0_{\infty,1}} \leq t^{\frac{1}{2}} \|\omega_\nu\|_{\widetilde{L^{\infty}_t B^0_{\infty,1}}} \leq C_0 t^{\frac{1}{2}} e^{\exp C_0 t}.$$

Pour le second terme du membre de droite de (2), on utilise l'effet régularisant suivant, voir [4].

PROPOSITION 1.4. – Soient  $s \in ]-1, 1[$ ,  $(p_1, p_2) \in [1, \infty]^2$ ,  $r \in [1, \infty]$  et  $v$  un champ de vecteurs de divergence nulle et appartenant à  $L^1_{loc}(\mathbb{R}_+; \text{Lip}(\mathbb{R}^d))$ . Soit  $f$  une solution de

$$\partial_t f + v \cdot \nabla f - \nu \Delta f = 0.$$

Alors on a

$$\nu^{\frac{1}{r}} \|f\|_{\widetilde{L^r_t B^{s+\frac{2}{r}}_{p_1,p_2}}} \leq C e^{CV(t)} (1 + (\nu t)^{\frac{1}{r}}) \|f(0)\|_{B^s_{p_1,p_2}},$$

avec  $V(t) = \int_0^t \|\nabla v(\tau)\|_{L^\infty} d\tau$ . La constante  $C$  dépend seulement de  $s$  et  $d$ .

Comme application de cette proposition, on a

$$\|\omega_\nu\|_{\widetilde{L}_t^1 B_{\infty,\infty}^2} \leq \nu^{-1} e^{C\nu(t)} (1 + \nu t) \|\omega^0\|_{B_{\infty,1}^0} \leq C_0 e^{\exp C_0 t} \nu^{-1} (1 + \nu t).$$

Donc, on obtient

$$\nu \|\Delta v_\nu\|_{L_t^1 B_{\infty,1}^0} \leq C_0 e^{\exp C_0 t} (\nu t)^{\frac{1}{2}} (1 + \nu t)^{\frac{1}{2}}. \quad (2)$$

### Idées de la démonstration de la Proposition 1.2

Soit  $\tilde{f}_q$  l'unique solution du problème :

$$\begin{cases} \partial_t \tilde{f}_q + v \cdot \nabla \tilde{f}_q - \nu \Delta \tilde{f}_q = 0 \\ \tilde{f}_q(0) = \Delta_q f^0. \end{cases}$$

La persistance de la régularité höldérienne implique pour tout  $0 \leq \epsilon < 1$  et pour tout  $j \geq -1$

$$\|\Delta_j \tilde{f}_q(t)\|_{L^\infty} \leq C 2^{-\epsilon|j-q|} \|\tilde{f}_q(0)\|_{L^\infty} \exp\left(C_\epsilon \int_0^t \|\nabla v(\tau)\|_{L^\infty} d\tau\right). \quad (3)$$

Par linéarité, on a  $f(t, x) = \sum_{q \geq -1} \tilde{f}_q(t, x)$ . Soit  $N$  un entier, qui sera fixé à la fin. Alors

$$\|f(t)\|_{B_{\infty,1}^0} \leq \sum_{j,q \geq -1} \|\Delta_j \tilde{f}_q(t)\|_{L^\infty} \leq \sum_{|j-q| \geq N} \|\Delta_j \tilde{f}_q(t)\|_{L^\infty} + \sum_{|j-q| < N} \|\Delta_j \tilde{f}_q(t)\|_{L^\infty}.$$

Par l'estimation (3) et le principe du maximum, on a

$$\|f(t)\|_{B_{\infty,1}^0} \leq C 2^{-\epsilon N} \|f^0\|_{B_{\infty,1}^0} \exp\left(C_\epsilon \int_0^t \|\nabla v(\tau)\|_{L^\infty} d\tau\right) + CN \|f^0\|_{B_{\infty,1}^0}.$$

On choisit  $N = \left\lceil \frac{C_\epsilon V(t)}{\epsilon \log 2} + 1 \right\rceil$ . Cela achève la démonstration.

#### Corrections à faire

- Page 1, dernière ligne "space" au lieu "espace"
- Page 2, ligne 9 "énergie".
- Page 2, ligne 11 "Sobolev".
- Page 3, l'avant dernière ligne "persistance"
- Page 4, ligne 6 " Soit f une".
- Page 5, le numro (2) doit être dans la seconde formule et non dans la dernière.
- Page 6 ligne 4 "persistance"
- Page 6, ligne 10 ". Cela achève".

#### References

- [1] D. Chae : *Local existence and blow-up criterion for the Euler equations in the Besov spaces*, Asymptot. Anal. **38** (2004), no. 3-4, 339–358.
- [2] H. Fujita, T. Kato : *On the nonstationary Navier-Stokes system*, rend. Sem. Mat. Univ. Padova, **32**, 243 – 260, (1962).
- [3] C. P. Hee, J. P. Young, *Existence of solution for the Euler equations in a critical Besov space  $B_{\infty,1}^1(\mathbb{R}^n)$* , Comm. In Partial Differential Equ. **29**, 1149-1166, 2004.
- [4] T. Hmidi : *Viscosité évanescence dans les équations de la mécanique des fluides bidimensionnels*, Thèse de L'Ecole Polytechnique, 2003.

- [5] T. Hmidi, S. Keraani, *Incompressible viscous flows in borderline Besov spaces*, Preprint de l'IRMAR, Université Rennes1.
- [6] T. Kato, G. Ponce : *Commutator estimates and the Euler and Navier-Stokes equations*, Communications on Pure and Applied Mathematics, **41**, 891 – 907 (1988).
- [7] J. Leray : *Sur le mouvement d'un liquide visqueux remplissant l'espace*, Acta mathematica, **63**, 193-248, 1934.
- [8] P. Serfati *Solutions  $C^\infty$  en temps,  $n$ -log Lipschitz bornées en espace et équation d'Euler*, C. R. Acad. Sci. Paris Sr. I Math. **320** (1995), no. 5, 555-558.
- [9] M. Vishik : *Hydrodynamics in Besov Spaces*, Arch. Rational Mech. Anal **145**, 197-214, 1998.

-Dernier ligne page 1 "space" au lieu "espace" - page 2, ligne 9 "nergie". - Page 2, ligne 11 "Sobolev".  
 - Page 3, l'avant dernière ligne "persistance" - Page 4, ligne 6 " Soit f une". - Page 5, le numro (2) doit tre dans la seconde formule et non dans la dernire. -Page 6 ligne 4 "persistance" - Page 6, dernire ligne ". Cela achve".