THÈSE de DOCTORAT de l'ÉCOLE POLYTECHNIQUE

Spécialité : MATHÉMATIQUES

présentée par

Taoufik HMIDI

pour obtenir le titre de

DOCTEUR DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE

Sujet de la thèse :

Viscosité évanescente dans les équations de la mécanique des fluides bidimensionnels

soutenue le 10 décembre 2003 devant le jury composé de :

M. Serge ALINHAC	Rapporteur
Mme Hajer BAHOURI	Examinatrice
M. Jean-Yves CHEMIN	Directeur de thèse
M. Thierry COLIN	Rapporteur
M. Raphaël DANCHIN	Examinateur
M. Benoît PERTHAME	Examinateur

Remerciements

Tout d'abord, je voudrais adresser des remerciements chaleureux à Jean-Yves Chemin pour son soutien si attentif et ses conseils si précieux qui m'ont aidé à la réalisation de cette thèse. J'ai été fortement marqué non seulement par ses compétences scientifiques mais encore par ses qualités humaines et pédagogiques.

Je tiens également à remercier vivement Serge Alinhac d'avoir accepté de faire un rapport sur cette thèse. Mes sincères sentiments de reconnaissance vont à Thierry Colin pour avoir rapporté sur ma thèse dans un temps record.

Hajer Bahouri, Raphaël Danchin et Benoît Perthame m'ont beaucoup honoré d'avoir accepté avec gentillesse de faire partie du jury.

J'ai bénéficié durant ces années de conditions très avantageuses que le Centre de Mathématiques de l'École polytechnique m'a offertes. Je voudrais à cette occasion remercier tous les membres du Centre et particulièrement Jean-Michel Bony, Jean Lannes et Claude Viterbo.

J'ai une attention très particulière pour Claudine Harmide, Carole Juppin, Michèle Lavallette, Alain Royer et Linda Vary-Guevel pour leur compétence et leur gentillesse inestimables.

Je voudrais à présent me tourner vers mes amis et remercier du fond du cœur Barbara, Bouthaina, Frédéric, Jérôme, Hamdi, Hammadi, Issam, Maher, Marius, Mildred, Mourad, Pierre... pour leur fructueuse collaboration, leur soutien et leur confiance.

Un remerciement particulier s'adresse aussi à Alexandru, Alexandre, Isabelle et Sahbi pour les riches discussions que nous avons eues.

Enfin, j'exprime toute ma gratitude à ma famille, surtout à ma mère, et à ceux qui me sont très chers et m'ont un jour aidé.

Table des matières

Chapitre 1

Introduction

Cette thèse est consacrée à l'étude de quelques problèmes soulevés par la mécanique des fluides bidimensionnels incompressibles. Elle traite deux thèmes : le premier concerne les poches de tourbillon régulières, tandis que le deuxième est réservé aux poches de tourbillon singulières.

1.1 Généralités

La première modélisation mathématique de l'écoulement d'un fluide parfait incompressible remonte à L. Euler au 18 siècle, voir [20]. Son modèle décrit l'évolution de la quantité de mouvement d'une particule macroscopique obéissant aux lois newtoniennes de la mécanique classique et sans interactions avec le reste du fluide. Donc en supposant que ce dernier est isolé et évolue dans l'espace tout entier $\mathbb{R}^d, d \geq 2$ (les équations que nous allons fournir sont aussi valables dans un domaine, mais il faut rajouter des conditions aux limites convenables) on trouve que la vitesse vérifie les équations suivantes

$$(E) = (NS_0) \begin{cases} \partial_t v + v \cdot \nabla v = -\nabla p \quad \text{dans} \quad \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d \\ \operatorname{div} v = 0 \\ v_{|t=0} = v^0, \end{cases}$$

où le scalaire p désigne la pression du fluide. La condition de divergence nulle exprime l'incompressibilté du fluide.

Notons que les conditions dans lesquelles un fluide peut être considéré comme incompressible peuvent se ramener dans la plupart des cas à l'inégalité :

$$M \stackrel{déf}{=} \frac{U}{c} << 1,$$

où M est le nombre de Mach, U l'échelle de vitesse caractéristique de l'écoulement et c la célérité des ondes de pression dans le fluide. Le modèle d'Euler ne s'applique pas uniquement aux écoulements de fluides parfaits comme l'hélium, dont l'isotope 4 voit sa viscosité s'annuler complètement à basses températures, mais aussi à des écoulements de fluides réels, dans lesquels les perturbations de vitesse dues à la viscosité n'ont pas le temps de diffuser par viscosité. Par ailleurs, ce modèle n'est pas toujours satisfaisant et nous devons dans certains cas tenir compte des interactions entre les particules formant le fluide. Les premières approches sont en fait dues à C. Navier dans [31] et G. Stokes dans [34] menant aux fameuses équations de Navier-Stokes. Ils ont introduit dans leur modèle une quantité appelée viscosité cinématique, notée ν, et traduisant les forces de frottement visqueux. Avec une bonne approximation, couvrant une multitude de cas, on peut supposer que le fluide est newtonien, c'est-à-dire, de viscosité constante. En conséquence, les équations de Navier-Stokes peuvent s'écrire sous la forme

$$(NS_\nu) \begin{cases} \partial_t v + v \cdot \nabla v - \nu \Delta v = -\nabla p \quad \text{dans} \quad \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d \\ \operatorname{div} v = 0 \\ v_{|t=0} = v^0, \end{cases}$$

Ces équations ont été, et sont encore, l'objet d'innombrables activités mathématiques visant en partie l'étude de l'existence et de l'unicité de solutions dans divers espaces. C'est en fait à J. Leray qu'on doit les premiers résultats concrets. Il démontre dans son article [26], datant des années trente du siècle dernier, l'existence globale d'une solution faible L^2 pour le système (NS_ν). Soulignons que l'unicité de la solution faible n'est à ce jour connue qu'en dimension deux d'espace. Pour plus de détails, on peut consulter à ce propos l'article de Lions et Prodi [28]. Par contre en dimension supérieure ou égale à 3, on connait l'existence et l'unicité de solutions régulières pour (NS_ν) que sur un petit intervalle de temps [22]. L'existence globale n'est connue que pour des données petites devant la viscosité ν. L'existence du terme diffusif est un point clé dans toutes ces théories car il entraîne un effet régularisant de la solution ; un fait absent dans le système d'Euler et qui en fait généralement un problème plus complexe. Il peut être classé parmi les EDP hyperboliques et en conséquence de la théorie générale de ces EDP on montre qu'il est localement bien posé dans les espaces de Sobolev H^s, avec $s > d/2 + 1$. Lorsque $d = 2$, alors la solution est globale.

Il y a aussi une théorie locale élaborée dans les espaces de Hölder. On peut à ce propos consulter le livre de J.-Y. Chemin [6]. Pour plus de précisions sur les avancées réalisées surtout pour les équations de Navier-Stokes, on peut se référer par exemple aux livres de M. Cannone [5], de P. G. Lemarié-Rieusset [25] et de P.-L. Lions [29].

Dans la mécanique des fluides et lorsque l'écoulement n'est pas potentiel, c-à-d, quand la vitesse dérive d'un potentiel, alors on fait intervenir la vorticité Ω qui semble un outil privilégié pour décrire les mouvements de rotation locale à l'intérieur d'un fluide. Elle est définie comme étant la partie antisymétrique du tenseur des gradients de vitesse. De façcon plus précise, c'est une matrice antisymétrique Ω de cœfficients $\Omega^i_j(v)$; $1 \leq i,j \leq d$, tels que

$$\Omega^i_j = \partial_j v^i - \partial_i v^j.$$

En tenant compte de la condition d'incompressiblité du fluide, on montre que l'équation satisfaite par Ω est

$$\partial_t \Omega + v \cdot \nabla \Omega + \Omega \cdot \nabla v - \nu \Delta \Omega = 0.$$

Elle ressemble à une équation de transport-diffusion sauf qu'il y a le terme additionnel $\Omega \cdot \nabla v$, appelé terme de *stretching* ou étirement. Lorsqu'on est en dimension deux de l'espace, alors on peut identifier la vorticité à un scalaire $\omega = \partial_1 v^2 - \partial_2 v^1$. Dans ce cas le terme de *stretching* est nul et l'équation satisfaite par le tourbillon ω se réduit à une équation de transport-diffusion:

$$\partial_t \omega + v \cdot \nabla \omega - \nu \Delta \omega = 0. \tag{1.1}$$

Notons que la description d'un écoulement à partir de la vorticité est toujours une alternative possible à la description par le champ de vitesse : la déduction de la vitesse à partir de la vorticité est en fait assurée par la célèbre loi de Biot-Savart.

Nous pouvons tirer à partir de l'équation (1.1) et grâce à l'incompressibilté du fluide une conséquence assez importante et qui n'est valable en général qu'en dimension deux. Elle dit qu'à chaque instant positif t la norme $L^p, p \in [1, +\infty]$, du tourbillon est dominée par sa valeur à l'origine. C'est une observation fortement utile surtout pour l'établissement d'un bon nombre de résultats globaux à l'instar de celui de V. Yudovich. Ce dernier montre dans [40] que pour toute donnée initiale à tourbillon dans $L^1 \cap L^\infty$ les systèmes $(NS_\nu)_{\nu \geq 0}$ possèdent une unique solution globale. Un peu plus tard, Giga, Miyakawa et Osada [19] ont montré que le système de Navier-Stokes est globalement bien posé sous réserve que le tourbillon soit seulement dans L^1. Cependant, le cas eulérien manifeste plus de restrictions: l'existence de solutions globales est connue pour un tourbillon initial dans $L^1 \cap L^p$, pour un certain $p \in]1, +\infty]$. Un tel résultat est dû à DiPerna et Majda [18]. L'unicité n'est à ce jour connue que pour $p = +\infty$.

Nous soulignons aussi l'important résultat de J.-M. Delort [17] qui a montré l'existence de solutions faibles pour le système d'Euler bidimensionnel incompressible lorsque la partie singulière du tourbillon est une mesure de Radon positive. Pour d'autres développements récents autour de l'existence et l'unicité de l'équation d'Euler, on cite les articles de M. Vishik [36], [37] et [38].

1.2 Présentation des résultats

Lorsque le tourbillon est seulement pris dans l'espace $L^1 \cap L^\infty$, alors on sait que la vitesse correspondante n'est pas en général lipschitzienne mais seulement dans la classe de Zygmund C^1_*. D'ailleurs, on sait que la vitesse associée à un tourbillon valant l'indicatrice d'un carré est d'un gradient explosif près des coins (voir [6]). Même avec cette faible régularité on parvient à montrer qu'un tel champ de vitesse possède un unique flot continu dans les deux variables d'espace et du temps. Nous rappelons que le flot est défini par l'équation intégrale :

$$\psi(t,x) = x + \int_0^t v(\tau,\psi(\tau,x))d\tau.$$

Ceci a permis à V. Yudovich de montrer l'existence et l'unicité de solutions globales pour les systèmes $(NS_\nu)_{\nu \geq 0}$ bidimensionnels quand la donnée initiale est à tourbillon dans $L^1 \cap L^\infty$. En outre, l'auteur prouve que le flot est d'une régularité höldérienne qui se dégrade exponentiellement avec le temps. C'est un résultat qu'on sait être optimal d'après [1].

Certes, le théorème de V. Yudovich permet de répondre à la question de stabilité des poches de tourbillon dans le cas du système d'Euler bidimensionnel : cela veut dire que si l'on part initialement d'un tourbillon valant l'indicatrice d'un domaine borné alors le tourbillon reste pour tout temps l'indicatrice du transporté de ce domaine par le flot. Mais, une autre question aussi importante que la première surgit: est-ce que la régularité du bord de la poche initiale se préserve au fil du temps ou bien des phénomènes d'explosion en temps fini de la géométrie peuvent avoir lieu? Cette question a été en fait soulevée par V. Yudovich à la fin de son article [40]. Il a fallu attendre quelques décennies pour qu'une réponse finale soit donnée. On la doit à J.-Y. Chemin qui montre dans [6] que si le bord initial est mieux que C^1, alors il préserve pour tout temps cette régularité. C'est un résultat qui va à l'encontre des simulations numériques réalisées auparavant par A. Majda et qui laissent suggérer l'apparition de singularités en temps fini.

Notons que le résultat de J.-Y. Chemin n'est pas seulement limité aux poches de tourbillon mais contient aussi des structures dites des poches de tourbillon généralisées (voir [6]). La méthode que l'auteur utilise est fondée sur une estimation logarithmique reliant le gradient de la vitesse à la régularité tangentielle du tourbillon. Ainsi, il montre que la vitesse est lipschitzienne, ce qui permet de garantir la conservation de la régularité du bord. La preuve a été ensuite simplifiée par plusieurs auteurs : A. Bertozzi et P. Constantin [3] ont fourni une démonstration qui est fortement liée à la structure particulière des poches de tourbillon. Par contre la preuve de P. Serfati est du même ordre de généralité, utilisant le point de vue lagrangien et manipulant des intégrales singulières provenant de la loi de Biot-Savart.

Reste alors à étudier les mêmes problèmes dans le cas visqueux mais, tels qu'ils sont formulés pour le système d'Euler, ils n'ont pas véritablement de sens : car en décollant de zéro, le support du tourbillon s'étale sur tout l'espace à cause du terme diffusif. Néanmoins, ce qui peut être intéressant est de décrire la régularité du transporté du support initial par le flot visqueux. C'est en fait R. Danchin [13] qui fut le premier à apporter quelques réponses dans cette direction. Il montre une perte artificielle de la régularité de la poche : si la poche de tourbillon initiale est de classe $C^{1+s}, s \in]0,1[$, alors son transporté par le flot est de classe $C^{1+s'}, \forall s' < s$. Sa preuve est basée sur une estimation uniforme par rapport à la viscosité du gradient de la vitesse. Alors le deuxième chapitre de la thèse s'inscrit dans la suite de ce travail et semble apporter une réponse optimale : nous montrons que dans le cas visqueux la régularité du bord initial est préservée pour tout temps et la perte remarquée par R. Danchin n'est qu'accidentelle et fortement liée à la technique utilisée.

Nous nous bornons dans le troisième chapitre à l'étude qualitative de la répartition en fonction de la viscosité de la norme L^p du tourbillon visqueux dans le cas des solutions de Yudovich. Cette description nous a permis de montrer la convergence non visqueuse du tourbillon dans le cas des poches de tourbillon à bord de mesure nulle. Notons que dans ce cadre, la vitesse n'est pas en général lipschitzienne mais quasi-lipschitzienne.

Finalement dans le dernier chapitre, nous étudions les poches de tourbillon singulières dans les équations de Navier-Stokes incompressibles. Ces structures on été étudiées par J.-Y. chemin [6] dans le cas des équations d'Euler bidimensionnelles. Il prouve que la régularité C^{1+s} du bord se propage et la partie singulière reste "vaguement" singulière . Ce qui veut dire que la "mauvaise" partie du bord n'affecte pas la régularité du reste du bord. Il montre de plus que la vitesse est lipschitzienne en dehors du transporté de l'ensemble singulier par le flot. Dans ses manœuvres l'ensemble singulier est masqué par une famille de champs de vecteurs qui s'annulent dans ses environs. C'est en raffinant l'étude autour de cet ensemble que R. Danchin parvient à démontrer que la singularité de type *cusp* est préservée (voir [15]). Comme conséquence, la vitesse est lipschitzienne partout dans l'espace.

La transposition de l'étude des poches de tourbillon singulières aux équations de Navier-Stokes fera l'objet du dernier chapitre dans lequel nous établissons des résultats semblables au cas eulérien avec des estimations uniformes par rapport à la viscosité.

1.2.1 Régularité höldérienne des poches de tourbillon visqueuses

Comme nous l'avons mentionné, nous établissons dans ce chapitre que le bord du transporté visqueux du support initial d'un tourbillon de classe C^{1+s} conserve pour tout temps cette régularité. La perte qu'on retrouve dans [13] est d'ordre technique. Elle est due à l'utilisation des espaces de Besov au lieu de Hölder dans l'étude de la propagation de la régularité dans les équations de transport-diffusion. Ces espaces paraissent les plus adaptés aux techniques mises en place. En revanche, en adoptant un point de vue lagrangien exploitant la condition d'incompressibilité du fluide, nous démontrons que la propagation de la régularité a lieu aussi dans les espaces de Hölder. Pour assurer la préservation de la régularité du bord nous devons contrôler, uniformément en ν, le gradient de la vitesse. La preuve que nous allons fournir semble plus simple que celle de [13], dans la mesure ou on n'utilise pas les techniques de parachamps introduites par l'auteur pour remédier aux difficultés posées par la faible régularité du tourbillon. L'observation qui nous a simplifié le problème est que l'effet de dissipation du laplacien rend le tourbillon plus régulier que prévu. On montre, en particulier,

Proposition 1.2.1. *Soit ω le tourbillon visqueux du système (NS_ν) correspondant à un tourbillon initial $L^1 \cap L^\infty$. Alors il existe une constante absolue C telle que, pour tout $t > 0$, pour ν positif et pour tout $q \geq 0$*

$$\nu 2^{2q} \int_0^t \|\Delta_q \omega(\tau)\|_{L^\infty} d\tau \leq C \|\omega^0\|_{L^\infty} \Big(1 + \int_0^t \|\nabla v(\tau)\|_{L^\infty} d\tau\Big).$$

Cela montre que l'intégration en temps permet de gagner deux dérivées et c'est ce dont on a besoin dans l'étude de la propagation höldérienne de la régularité tangentielle du tourbillon.

1.2.2 Viscosité évanescente et transport-diffusion

La motivation principale de ce chapitre est l'étude de la convergence du toubillon visqueux vers le tourbilon eulérien pour des données initiales de type poches de tourbillon. Dans le papier de J.-Y. Chemin [7], il était démontré que dans le cas des données de Yudovich, la solution de (NS_ν) converge vers la solution d'Euler dans l'espace $L^\infty_{loc}(\mathbb{R}_+; L^p)$, pour tout p appartenant à $[2, +\infty]$. Commme conséquence, on établit la limite non visqueuse du tourbillon visqueux dans l'espace $W^{-1,p}$, et par interpolation on aussi la convergence dans $W^{r,p}, \forall r < 0$. Reste à étudier la convergence dans L^p, qui n'est pas du tout triviale à cause de la faible régularité du tourbillon. Lorsque le tourbillon initial est de type poche de tourbillon à bord régulier, typiquement de classe C^{1+s}, $s \in]0,1[$, alors l'uniformité en ν du contrôle Lipschitz de la vitesse a permis à R. Danchin d'assurer la convergence dans l'espace $L^\infty_{loc}(\mathbb{R}_+; L^p)$, pour tout réel $1 < p < +\infty$ (voir [13]). Pour un bord non régulier le problème s'avère un peu délicat, car le champ n'est pas en général lipschitzien. Les premières réponses dans cette direction sont élaborées par P. Constantin et J. Wu [11]. Ils montrent que pour un tourbilon initial appartenant à l'espace $L^1 \cap L^\infty \cap B^s_{2,\infty}$, $s \in]0,1[$, alors la convergence a lieu mais localement en temps.

Dans ce chapitre, nous allons montrer que dans le cas des poches de tourbillon, la convergence globale est garantie uniquement sous l'hypothèse d'un bord de mesure de Lebesgue nulle. Ce résultat repose sur une étude qualitative de la répartition de la masse du tourbillon. Nous montrons qu'elle est quasiment concentrée autour du transporté du support initial par le flot eulérien. En désignant successivement par ω_ν et ω les tourbillons visqueux et eulérien et en notant ψ_ν le flot visqueux associé à la vitesse v_ν et par ℓ l'unité de longueur, alors on aura le résultat suivant :

Théorème 1.2.1. *Soit $T > 0$. Si* supp $\omega^0 = \bar{\Omega}$, *avec Ω un domaine borné et si*

$$\frac{\nu T}{\ell^2} \leq \Big(\frac{h}{\ell}\Big)^{e^{Ct\|\omega^0\|_{L^1 \cap L^\infty}}},$$

alors en posant $(\Omega_{t,\nu})^c_h = \{x \in \mathbb{R}^2 \; ; \operatorname{dist}(x, \psi_\nu(t,\Omega)) \geq h\}$, on aura pour tout $t \in [0,T]$

$$\|\omega_\nu(t)\|_{L^2((\Omega_{t,\nu})^c_h)} \leq C\Big(\frac{\nu t}{\ell^2}\Big)^{\frac{1}{2}} \Big(\frac{\ell}{h}\Big)^{e^{Ct\|\omega^0\|_{L^1 \cap L^\infty}}} \|\omega^0\|_{L^2}.$$

De plus, si $\omega^0 = \mathbf{1}_\Omega$, avec $|\partial\Omega| = 0$, alors

$$\lim_{\nu\to 0} \|\omega_\nu - \omega\|_{L^\infty_{loc}(\mathbb{R}_+;\, L^2)} = 0.$$

La preuve de la décroissance est basée sur une régularisation de la vitesse et l'utilisation de fonctions de troncature bien adaptées qui permettent via des estimations d'énergie d'avoir localement en temps le résultat désiré. Pour parvenir à un résultat global nous avons utilisé une procédure récursive faisant appel à une description fine de la dynamique d'un ensemble donné via les flots en jeu.

1.2.3 Poches de tourbillon singulières dans un fluide faiblement visqueux

Il s'agit dans ce chapitre d'étudier le comportement d'une poche singulière dans les équations de Navier-Stokes incompressibles bidimensionnelles. En s'inspirant de la méthode développée dans le premier chapitre pour prouver la proposition 1.2.1, nous parvenons à montrer un effet régularisant même avec un champ de vitesse seulement quasi-lipschitzien. En fait, l'intégration en temps permet d'obtenir quasiment un gain de deux dérivées. En d'autres termes, nous montrons ce qui suit :

Proposition 1.2.2. *Soit ω le tourbillon visqueux du système (NS_ν) correspondant à un tourbillon initial $L^1 \cap L^\infty$. Alors il existe une constante absolue C telle que, pour tout $t > 0$, pour ν positif et pour tout $q \geq 0$*

$$\nu 2^{2q} \int_0^t \|\Delta_q \omega(\tau)\|_{L^\infty} d\tau \leq C(q+1)\|\omega^0\|_{L^\infty}\Big(1 + t\|\omega^0\|_{L^1\cap L^\infty}\Big).$$

À l'aide de ce résultat et en se servant des outils élaborés par J.-Y. Chemin pour étudier les poches singulières dans le système (E), nous parvenons à démontrer le résultat suivant :

Théorème 1.2.2. *Soit Ω un domaine borné de $\mathbb{R}^2$ et s un réel appartenant à $]0,1[$. On suppose que le bord $\partial\Omega$ est de classe C^{1+s} en dehors d'un ensemble fermé Σ. Posons $\omega^0 = \mathbf{1}_\Omega$ et désignons par v_ν la solution de Yudovich du système (NS_ν) correspondant à un champ de vecteurs v^0, de divergence nulle et dont le rotationnel vaut ω^0. Soit $\psi_\nu(t)$ le flot associé au champ de vecteurs $v_\nu(t)$. Notons pour tout $h > 0$*

$$\Omega_\nu(t) = \psi_\nu(t,\Omega),\ \Sigma_\nu(t) = \psi_\nu(t,\Sigma) \quad \text{et} \quad \big(\Sigma_\nu(t)\big)_h^c = \big\{x \in \mathbb{R}^2\ ;\mathrm{dist}\big(x,\psi_\nu(t,\Sigma)\big) \geq h\big\}.$$

Alors il existe une constante C dépendant seulement de s et de ω^0 telle que, pour tout $t \in \mathbb{R}_+$,

$$\sup_{h\in]0,e^{-1}]} \frac{\|\nabla v_\nu(t)\|_{L^\infty((\Sigma_\nu(t))_h^c)}}{-\log h} \leq C(1+\nu t)^{\frac{16}{s}} e^{e^{Ct}}.$$

Nous avons encore établi des résultats de convergence non visqueuse des structures géométriques de la poche. Nous signalons enfin que ce théorème est encore valable pour des structures géométriques plus générales que celles des poches de tourbillon.

Chapitre 2

Régularité höldérienne des poches de tourbillon visqueuses

Résumé. Nous étudions ici la propagation de la régularité höldérienne dans une équation de type transport-diffusion relative à un champ lipschitzien. Nous généralisons ainsi un résultat établi par R. Danchin dans [13] dans les espaces de Besov B^s_p, avec p fini. Comme application, nous étudions les poches de tourbillon visqueuses à bord höldérien en montrant des résultats similaires à [13].

2.1 Introduction

Dans ce chapitre nous discutons la stabilité höldérienne des poches de tourbillon relatives à un fluide visqueux incompressible et en mouvement plan. La vitesse de la particule, qui à l'instant t se trouve à la position $x \in \mathbb{R}^2$ et qu'on note $v_\nu(t,x)$, obéit au système de Navier-Stokes :

$$(NS_\nu)\begin{cases} \partial_t v_\nu + v_\nu \cdot \nabla v_\nu - \nu\Delta v_\nu = -\nabla p_\nu \\ \operatorname{div} v_\nu = 0 \\ v_{\nu|t=0} = v^0, \end{cases}$$

où ν est un paramètre positif désignant la viscosité cinématique du fluide. Le scalaire p_ν représente la pression. Notons que le système d'Euler incompressible (E) correspond à une viscosité nulle, et qu'on le note parfois (NS_0). Il est régi par

$$(E)\begin{cases} \partial_t v + v \cdot \nabla v = -\nabla p \\ \operatorname{div} v = 0 \\ v_{|t=0} = v^0. \end{cases}$$

Nous dirons que le tourbillon ω, défini par $\omega = \partial_1 v^2 - \partial_2 v^1$, possède la structure d'une poche de tourbillon s'il est l'indicatrice d'un ouvert borné. L'étude de ces structures revêt une grande importance que ce soit bien évidemment du point de vue mathématique ou du point de vue physique et même numérique. Les premières observations de stabilité des poches de tourbillon dans les équations d'Euler bidimensionnelles remontent à G. Kirchhoff qui a remarqué qu'une poche de tourbillon elliptique préserve pour tout temps cette structure et qu'elle tourne à vitesse constante autour de son centre de symétrie. Nous soulignons que la réponse définitive à la stabilité des poches peut être dérivée d'un résultat général dû à V. I. Yudovich. Il montre dans [40] que si l'on part d'une donnée initiale ayant un tourbillon dans $L^1 \cap L^\infty$, alors pour tout $\nu \geq 0$ le système (NS_ν) possède une unique solution. De plus, le flot lagrangien, défini par :

$$\psi_\nu(t,x) = x + \int_0^t v_\nu(\tau,\psi_\nu(\tau,x))d\tau,$$

existe globalement et il est unique dans la classe des fontions continues dans les deux variables d'espace et de temps. Ceci est suffisant pour dire, dans le cadre du système (E), que la structure des poches est conservée. Suite à ces résultats, il y a une question qui s'impose : il s'agit de décrire la régularité du bord. Hélas, le résultat de Yudovich ne permet pas d'avoir une réponse complètement satisfaisante. Dans les meilleurs cas, on ne peut dégager qu'un résultat faible du genre : étant donnée une poche initiale dont le bord est de classe C^1, alors la régularité de la poche à l'instant t est au moins de classe $C^{\exp -\alpha t}$. Il a fallu attendre quelques décennies pour qu'un tel problème soit définitivement résolu. Alors, on démontre que si le bord de la poche initiale est mieux que C^1, typiquement de classe $C^{1+\epsilon}, 0 < \epsilon < 1$, alors la frontière du tourbillon l'est aussi en tout temps. En fait, c'est à J.-Y. Chemin qu'on doit ce résultat, voir [6].

Notons que ceci va à l'encontre des simulations numériques réalisées par A. Majda [30] qui laissent prévoir l'apparition de singularités en temps fini. La preuve de J.-Y. Chemin est fondée sur un contrôle Lipschitz de la vitesse et elle est applicable dans un cadre plus général, dit des poches de tourbillon généralisées. Nous signalons que P. Serfati a montré dans [33] le même résultat avec une autre méthode. Par ailleurs, l'étude des poches singulières a vu le jour suite au travail de J.-Y. Chemin qui a prouvé dans [6] que la partie régulière du bord voyage tranquillement à travers le flot sans qu'elle soit affectée par la partie singulière du bord. Toutefois, le comportement exact de la partie singulière est loin d'être élucidé. Dans ce contexte, le champ est lipschitzien en dehors du propagé des singularités par le flot. Son gradient ne peut exploser, au maximum, à l'approche de cet ensemble, qu'avec un taux de l'ordre de $-\log h$, où h est un paramètre mesurant la proximité par rapport à cet ensemble. Toutefois, R. Danchin montre dans [15] que pour une poche initiale admettant une singularité particulière de type *cusp*, alors la vitesse est en tout temps lipschitzienne. Ce qui permet de propager la structure initiale de la poche, qui reste en tout temps de type *cusp*.

Dans le but de généraliser le théorème de J.-Y. Chemin à des poches de tourbillon visqueuses, R. Danchin montre dans [13] que lorsque la poche initiale est l'indicatrice d'un domaine borné Ω de classe $C^{1+\epsilon}$, alors le champ v_ν est lipschitzien. En outre, son contrôle de Lipschitz est uniforme en ν. En conséquence, il en déduit que le transporté $\psi_\nu(t,\Omega)$ du domaine initial par le flot visqueux est de classe $C^{1+\epsilon'}$, pour tout $\epsilon' < \epsilon$. De plus, on a la "convergence" du bord visqueux vers celui d'Euler lorsque le paramètre ν tend vers zéro. Cette apparente perte de la régularité höldérienne n'a pas lieu dans les espaces de Besov $B^\epsilon_{p,\infty}$, avec $2 < p < +\infty$ et $\epsilon \in]2/p, 1[$. Ceci est dû à la propagation de la régularité Besov, uniformément en ν, dans les équations de type (TD_ν) que nous définirons dans le prochain paragraphe. Le but de ce chapitre est de montrer la propagation dans le cas limite $p = +\infty$, i.e., dans les espaces de Hölder. Comme conséquence de ce résultat, nous établissons que le bord du transporté $\psi_\nu(t,\Omega)$ conserve la régularité $C^{1+\epsilon}$, uniformément par rapport à ν.

Théorème 2.1.1. *Soient $\epsilon \in]0,1[$ et Ω^0 un un ouvert borné dont le bord est une courbe simple de classe $C^{1+\epsilon}$. Désignons par v^0 le champ de vecteurs dont le rotationnel vaut $\omega^0 = \mathbf{1}_{\Omega^0}$. Alors pour tout $\nu \geq 0$, (NS_ν) possède une unique solution dans $L^\infty_{loc}(\mathbb{R}_+; \mathrm{Lip}(\mathbb{R}^2))$. D'une manière plus précise, il existe une constante C ne dépendant que de ϵ et Ω^0 telle que, pour tout $\nu \geq 0$ et* *pour tout* $t \in \mathbb{R}_+$, *on ait*

$$\|\nabla v_\nu(t)\|_{L^\infty} \leq C(1+\nu)e^{Ct}.$$

De plus, si l'on désigne par $\Omega_\nu(t)$ *le transporté de* Ω^0 *par le flot de* v_ν, *alors* $\partial\Omega_\nu(t)$ *est une courbe simple de classe* $C^{1+\epsilon}$. *En outre, il existe une paramétrisation régulière* γ_ν *de la frontière de* $\Omega_\nu(t)$ *appartenant à* $L^\infty_{loc}(\mathbb{R}_+;\, C^{1+\epsilon}(\mathbf{S}^1,\mathbb{R}^2))$ *telle que, pour tout* $\epsilon' < \epsilon$, γ_ν *converge vers* γ_0 *dans l'espace* $L^\infty_{loc}(\mathbb{R}_+;\, C^{1+\epsilon'}(\mathbf{S}^1,\mathbb{R}^2))$ *lorsque* ν *tend vers zéro.*

La preuve est basée essentiellement sur deux résultats liés aux équations de transport-diffusion décrites par

$$(TD_\nu)\begin{cases} \partial_t a + v\cdot\nabla a - \nu\Delta a = F + \nu G \\ a_{|t=0} = a^0. \end{cases}$$

Le premier résultat que nous allons fournir traite de la propagation dans les espaces de Hölder. Nous verrons sa généralisation dans le théorème 2.2.1.

Proposition 2.1.1. *Soient* ϵ *un réel dans l'intervalle* $]-1,1[$ *et* d *un entier supérieur ou égal à 2. On se donne une fonction* $G \in L^\infty_{loc}(\mathbb{R}_+;\, C^{\epsilon-2})$ *et un champ de vecteurs* v *de* $\mathbb{R}^d$ *appartenant à l'espace* $L^1_{loc}(\mathbb{R}_+;\, \mathrm{Lip}(\mathbb{R}^d))$ *et de divergence nulle. Il existe une constante* C *ne dépendant que de* ϵ *telle que, si* a *est une solution de l'équation* (TD_ν) *correspondant à* $F \equiv 0$ *et si de plus elle appartient à* $L^\infty_{loc}(\mathbb{R}_+;\, C^\epsilon)$, *alors pour tout* $t \geq 0$ *et pour tout* $\nu \geq 0$

$$\|a(t)\|_{C^\epsilon} \leq C\, e^{C\int_0^t \|\nabla v(\tau)\|_{C^\epsilon} d\tau}\Big(\|a^0\|_{C^\epsilon} + (1+\nu t)\|G\|_{L^\infty_t C^{\epsilon-2}}\Big).$$

Nous insistons sur le gain, uniforme en ν, de deux dérivées sur G : un fait que nous ne le saurions pas par une simple application du principe du maximum.

Dans le second résultat, nous discutons un effet régularisant développé dans les équations de type (TD_ν) avec un second membre nul. Nous montrons, en particulier, que si $a^0 \in L^\infty$, alors, pour tout $t \in \mathbb{R}_+$,

$$\nu \int_0^t a(\tau,x)d\tau \in C^2_*.$$

De plus, la norme correspondante est majorée indépendamment de ν lorsque ce dernier est pris dans un domaine borné. L'espace C^2_* que nous avons introduit n'est autre que l'espace des distributions tempérées u satisfaisant

$$\|u\|_{C^2_*} \overset{déf}{=} \sup_{q\geq -1} 2^{2q}\|\Delta_q u\|_{L^\infty} < +\infty,$$

où Δ_q désigne l'opérateur de localisation en fréquences qu'on définit comme suit. Il existe deux fonctions positives et régulières χ et φ qui sont supportées respectivement dans une boule et une couronne telles que, pour tout $\xi \in \mathbb{R}^d$,

$$\chi(\xi) + \sum_{q\geq 0}\varphi(2^{-q}\xi) = 1 \quad \text{et} \quad \frac{1}{3} \leq \chi^2(\xi) + \sum_{q\geq 0}\varphi^2(2^{-q}\xi) \leq 1. \tag{2.1}$$

On pose alors pour toute distribution tempérée u

$$\Delta_{-1}u = \mathcal{F}^{-1}\big(\chi(\xi)\widehat{u}(\xi)\big)\ ;\ \forall q\in\mathbb{N},\ \Delta_q u = \mathcal{F}^{-1}\big(\varphi(2^{-q}\xi)\widehat{u}(\xi)\big) \quad \text{et} \quad S_q u = \sum_{-1\leq p\leq q-1}\Delta_p u.$$

Nous rappelons que les espaces de Hölder d'indices non entiers et qu'on note par C^s peuvent être définis dans le cadre de la théorie de Littlewood-Paley comme

$$C^s = \Big\{ u \in S'(\mathbb{R}^d) \; ; \|u\|_{C^s} \overset{déf}{=} \sup_{q \geq -1} 2^{qs} \|\Delta_q u\|_{L^\infty} < +\infty \Big\}.$$

Lorsque s est un entier alors l'espace défini ci-dessus, appelé espace de Zygmund, sera noté C^s_*

Proposition 2.1.2. *Soit d un entier ≥ 2. Il existe une constante positive C telle que, si v est un champ de vecteurs à divergence nulle et appartenant à $L^1_{loc}(\mathbb{R}_+ \,;\, \mathrm{Lip}(\mathbb{R}^d))$ et si a est une solution du problème (TD_ν) sans second membre, associée à une donnée initiale $a^0 \in L^\infty(\mathbb{R}^d)$, alors, on aura pour tout $t > 0$ et pour tout $q \geq -1$*

$$\|\Delta_q a(t)\|_{L^\infty} + \nu 2^{2q} \int_0^t \|\Delta_q a(\tau)\|_{L^\infty} d\tau \leq C \|a^0\|_{L^\infty} \Big(1 + \nu t + \int_0^t \|\nabla v(\tau)\|_{L^\infty} d\tau \Big).$$

2.2 Résultats principaux et outils de base

Cette section est structurée comme suit : nous discutons dans la première partie les limitations de la méthode d'énergie lorsqu'il s'agit de propager sans perte la régularité höldérienne. Nous présentons de façon succinte une méthode qui permettra de combler cette lacune et nous achevons cette première partie par la généralisation des résultats cités de manière restrictive dans les propositions 2.1.1 et 2.1.2. Dans la seconde partie, nous rappelons quelques lemmes qui nous serviront le long de la preuve et nous clôturons cette section par un lemme de propagation L^p dans les équations de transport-diffusion (TD_ν) que nous démontrons dans le cas limite L^1 à l'aide de la méthode de dualité.

2.2.1 Effet régularisant et propagation visqueuse

Pour espérer propager sans perte la régularité de type Besov ou Hölder dans les équations (TD_ν) nous nous plaçons dans le cadre, qui paraît naturel, d'un champ de vecteurs v localement lipschitzien, c'est-à-dire, vérifiant pour tout $t > 0$

$$V(t) \overset{déf}{=} \int_0^t \|\nabla v(\tau)\|_{L^\infty} d\tau < +\infty. \tag{2.2}$$

L'étude de la propagation de la régularté Besov $B^s_{p,\infty}$ a été menée par R. Danchin dans [13]. Il démontre des estimations uniformes par rapport à ν mais explosives dans le paramètre p. Ainsi, la propagation höldérienne semble hors d'atteinte. Par ces méthodes, nous signalons que la présence du facteur ν devant G nous permet effectivement de gagner, uniformément en ν, deux dérivées sur la régularité de cette fonction. Ce point est d'un apport crucial lorsqu'il s'agit de prouver la persistance de la régularité tangentielle du tourbillon.

La méthode utilisée est de type énergie : elle est basée sur des intégrations par parties et sur un lemme d'analyse harmonique qu'on retrouve dans [13]. Ce dernier apparaît comme une généralisation du lemme de Poincaré. L'un des avantages offerts par cette méthode est que le champ de vecteurs v n'est pas sensé vérifier la condition d'incompressibilté lorsque l'indice de régularité s est pris dans $]0,1[$. On a besoin seulement de cette condition pour propager la régularité négative correspondant à $s \in]-1,0[$.

Le but de ce travail est de montrer la persistance de la régularité dans le cas critique, i.e., dans les espaces de Hölder. La méthode que nous allons développer diffère de [13] : elle consiste à localiser en fréquences l'équation initiale et à dissoudre le terme de transport via un changement de variables lagrangien. Nous utilisons d'une manière incontournable la préservation de la mesure par le flot qui découle de l'incompressibilité de la vitesse.

Les difficultés posées par cette méthode peuvent être résumées en deux points : primo, le changement de variables lagrangien transforme l'équation de départ en une équation de la chaleur à cœfficients variables. Heureusement, la métrique en jeu se comporte sur un petit intervalle de temps comme une perturbation de l'identité. Secondo, la composition d'une fonction localisée en fréquences avec le flot ne donne pas en général une fonction localisée. En conséquence, nous ne pouvons pas appliquer à l'état brut le lemme 2.2.2. Pour remédier à ce défaut, nous procédons à une relocalisation, sur des couronnes de taille 2^j, de l'équation régissant les blocs dyadiques $\Delta_q a$. Ainsi nous obtenons les contrôles souhaités mais uniquement pour les fréquences correspondant à $j \geq q$. En ce qui concerne les basses fréquences, nous utilisons le lemme 2.3.1 qui est un lemme de composition dyadique. C'est exactement à cet endroit que la condition de divergence nulle semble indispensable pour mener le calcul avec succès.

Pour une description précise de nos résultats, introduisons quelques définitions de base. Commençons par les espaces de Besov inhomogènes, qui sont une généralisation des espaces de Hölder. Ils peuvent être définis comme suit :

$$B_p^s = \Big\{ u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d), \|u\|_{B_p^s} \stackrel{déf}{=} \sup_{q \geq -1} 2^{qs} \|\Delta_q u\|_{L^p} < +\infty \Big\}.$$

Notons que pour s non entier $C^s = B_\infty^s$. Nous disons qu'une fonction u appartient à $L^1_{loc}(\mathbb{R}_+;\, B_p^s)$ si, pour tout $T > 0$,

$$\int_0^T \|u(\tau)\|_{B_p^s} d\tau < +\infty.$$

Une fonction u appartient à l'espace $\widetilde{L^r_{loc}}(\mathbb{R}_+;\, B_p^s)$ si l'on a

$$\forall T > 0,\ \|u\|_{\widetilde{L^r_T}(B_p^s)} \stackrel{déf}{=} \sup_{q \geq -1} 2^{qs} \|\Delta_q u\|_{L^r([0,T];\, B_p^s)} < +\infty.$$

Avant de donner le résultat de propagation, nous allons tout d'abord se placer dans le cas où F et G sont nulles. Alors l'équation associée correspond à celle que vérifie le tourbillon visqueux en dimension deux. Dans ce cas, nous montrons un effet de régularisation résultant de l'intégration en temps des blocs dyadiques. Ceci sera un ingrédient principal de l'étude des poches höldériennes.

Proposition 2.2.1. *Il existe une constante positive C telle que, si v est un champ de vecteurs à divergence nulle satisfaisant (2.2) et si a est une solution de (TD_ν) associée à la donnée initiale a^0, avec $F = 0$ et $G = 0$, alors si $a^0 \in L^p$, avec $p \in [1,\, +\infty]$, on aura pour tout $r \in [1,\, +\infty]$ et pour tout $t > 0$*

$$\nu^{\frac{1}{r}} \|a\|_{\widetilde{L^r_t}\left(B_p^{\frac{2}{r}}\right)} \leq C \|a^0\|_{L^p} \Big(1 + \nu t + \int_0^t \|\nabla v(\tau)\|_{L^\infty} d\tau \Big)^{\frac{1}{r}}.$$

Remarques • Nous verrons dans l'application de cette proposition à des poches höldériennes que nous aurons uniquement besoin du cas particulier $r = 1$. Il permet, via une intégration en temps, de gagner les deux dérivées consommées par l'opérateur de Laplace.
• L'apparition de la quantité $(\nu t)^{\frac{1}{r}}$ dans l'estimation de la proposition ci-dessus est un phénomène de basses fréquences.

Voici maintenant la généralisation du théorème 4.1 de [13] au cas $p = +\infty$.

Théorème 2.2.1. (1) *Soient d un entier ≥ 2 et s et p deux éléments appartenant successivement aux intervalles $]-1, 1[$ et $[1, +\infty]$. Il existe une constante positive C_1 ne dépendant que de s et d, vérifiant les propriétés suivantes : soit v est un champ de vecteurs de divergence nulle et satisfaisant (2.2). On considère des fonctions $a^0 \in B^s_p$, $F \in L^1_{loc}(\mathbb{R}_+; B^s_p)$ et $G \in L^\infty_{loc}(\mathbb{R}_+; B^{s-2}_p)$. Si a est une solution de (TD_ν) associée à la donnée initiale a^0 et appartenant à $\widetilde{L}^\infty_{loc}(\mathbb{R}_+; B^s_p)$ alors, pour tout temps positif t, on a*

$$\|a(t)\|_{B^s_p} \leq C_1 e^{C_1 V(t)} \left(\|a^0\|_{B^s_p} + \|G\|_{L^\infty_t B^{s-2}_p} + \int_0^t e^{-C_1 V(\tau)} \Big(\|F(\tau)\|_{B^s_p} + \nu \|G(\tau)\|_{B^{s-2}_p} \Big) d\tau \right).$$

(2) *On se donne maintenant $s \in]-1,1[$ et $r \in]\frac{2}{1-s}, +\infty]$. On suppose que les fonctions F, G et v appartiennent successivement aux espaces $\widetilde{L^1_{loc}}(\mathbb{R}_+; B^s_p)$; $\widetilde{L^r_{loc}}(\mathbb{R}_+; B^{s+\frac{2}{r}-2}_p) \cap \widetilde{L^\infty_{loc}}(\mathbb{R}_+; B^{s-2}_p)$* et $L^{\frac{r}{r-1}}_{loc}(\mathbb{R}_+; \mathrm{Lip}(\mathbb{R}^d))$. *Alors, on aura pour tout t positif et pour tout $\nu \geq 0$*

$$\begin{aligned} \nu^{\frac{1}{r}} \|a\|_{\widetilde{L}^r_t B^{s+\frac{2}{r}}_p} &\leq C_2 N_r(t) e^{C_1 V(t)} \big(1 + (\nu t)^{\frac{1}{r}}\big) \Big(\|a^0\|_{B^s_p} + \|F\|_{\widetilde{L}^1_t B^s_p} \Big) \\ &+ C_2 N_r(t) (1 + \nu t) \left(\nu^{\frac{1}{r}} \|G\|_{\widetilde{L}^r_t B^{s+\frac{2}{r}-2}_p} + e^{C_1 V(t)} \big(1 + (\nu t)^{\frac{1}{r}}\big) \|G\|_{L^\infty_t B^{s-2}_p} \right), \end{aligned}$$

avec

$$N_r(t) = \begin{cases} 1 + r^{-1} t + \left(1 - \frac{1}{r}\right) \left(\int_0^t \|\nabla v(\tau)\|^{\frac{r}{r-1}}_{L^\infty} d\tau \right)^{1-\frac{1}{r}}, \ \textit{si } r \in]1, +\infty], \\ 1 + t \|\nabla v\|_{L^\infty_t L^\infty} \ \textit{si } r = 1, \end{cases}$$

La constante C_2 ne dépend que de d, s et r. Nous rappelons que $V(t) = \displaystyle\int_0^t \|\nabla v(\tau)\|_{L^\infty} d\tau$.

Remarques :
• Notons que la constante C_1 qui figure dans le théorème ci-avant peut être mise sous la forme $C_1 = \frac{C_d}{1-s^2}$, avec C_d dépend uniquement de d.
• La constante C_2 dépend de s et r de la manière suivante : $C_2 = \frac{C_d}{(1-(s-\frac{2}{r})^2)(1-s^2)}$.

2.2.2 Lemmes de base

L'objet de ce qui suivra est de fournir un nombre de lemmes qui sont d'une utilité courante: nous décrirons par le biais du premier lemme le gain de la régularité dû à la commutation. Par contre le second lemme discute un effet régularisant ponctuel en temps dans l'équation de la chaleur. Nous aborderons également le lemme de Bernstein et un résultat de convolution retardée. Nous discutons à la fin de cette section un résultat de propagation L^p dans les équations (TD_ν).

Pour la preuve du lemme ci-après, on peut consulter par exemple le lemme 4.2 de [13].

Lemme 2.2.1. *Soient v un champ de vecteurs lipschitzien de $\mathbb{R}^d$ et a est un élément pris dans l'espace B_p^s avec (s,p) un couple appartenant à $]-1,1[\times[1,+\infty]$. Alors, il existe une constante C ne dépendant que de s et d telle que,*

$$\left\|[\Delta_q, v\cdot\nabla]a\right\|_{L^p} \leq C2^{-qs}\|\nabla v\|_{L^\infty}\|a\|_{B_p^s}.$$

Voilà maintenant le second lemme qui joue un rôle central dans l'élaboration de la propagation de la régularité höldérienne et qu'on retrouve, par exemple, dans [8].

Lemme 2.2.2. *Soit $\mathcal{C}$ une couronne. Il existe deux constantes positives c et C telles que, pour tout couple (t,λ) de réels positifs, pour tout $p\in[1,+\infty]$ et pour tout $a\in L^p$, on aura l'implication :*

$$\operatorname{Supp}\widehat{a}\subset\lambda\mathcal{C}\Rightarrow\|e^{t\Delta}a\|_{L^p}\leq Ce^{-ct\lambda^2}\|a\|_{L^p}.$$

Nous ferons également usage du lemme de Bernstein qui décrit le coût d'une différentiation d'une distribution selon qu'elle est localisée en fréquence dans une boule $B(0,\lambda r_1)$ ou dans une couronne $\mathcal{C}(0,\lambda r_1,\lambda r_2)$. De façon plus précise, on a

Lemme 2.2.3. (Bernstein) *Soit (r_1,r_2) un couple de réels strictement positifs tels que $r_1<r_2$. Il existe une constante C telle que, pour tout entier k, pour tout couple (a,b) tel que $1\leq a\leq b$ et pour toute fonction $u\in L^a(\mathbb{R}^d)$, on ait*

$$\begin{aligned}
\operatorname{supp}\widehat{u}\in B(0,\lambda r_1) &\Rightarrow \sup_{|\alpha|=k}\|\partial^\alpha u\|_{L^b}\leq C^k\lambda^{k+d(\frac{1}{a}-\frac{1}{b})}\|u\|_{L^a},\\
\operatorname{supp}\widehat{u}\in \mathcal{C}(0,\lambda r_1,\lambda r_2) &\Rightarrow C^{-k}\lambda^k\|u\|_{L^a}\leq\sup_{|\alpha|=k}\|\partial^\alpha u\|_{L^a}\leq C^k\lambda^k\|u\|_{L^a}.
\end{aligned}$$

Nous verrons un peu plus tard, dans l'élaboration des preuves des résultats énoncés, que la représentation intégrale utilisant le semi-groupe de la chaleur introduit dans sa partie de Duhamel un terme de convolution retardée. Donc ce n'est pas inutile de rappeler les inégalités de convolution correspondantes. En fait, elles prennent la même forme qu'une convolution habituelle.

Lemme 2.2.4. (Young) *Soient f et g deux fonctions définies sur un intervalle $I=[0,T)$, avec $T>0$. On suppose que $f\in L^a(I)$ et $g\in L^b(I)$ avec*

$$1\leq a,b\leq+\infty \quad et \quad \frac{1}{c}\stackrel{déf}{=}\frac{1}{a}+\frac{1}{b}-1\geq 0.$$

Alors la fonction définie par

$$h(t)=\int_0^t f(t-\tau)g(\tau)d\tau,$$

appartient à $L^c(I)$ et satisfait l'estimation

$$\|h\|_{L^c(I)}\leq\|f\|_{L^a(I)}\|g\|_{L^b(I)}.$$

Le dernier lemme qu'on va énoncer dans cette partie introductive et qu'on démontrera est le suivant :

Lemme 2.2.5. *Soient $p\in[1,+\infty]$ et v un champ de vecteurs appartenant à $L^1_{loc}(\mathbb{R}_+;\operatorname{Lip}(\mathbb{R}^d))$ et à divergence nulle. On se donne deux fonctions $F,G\in L^1_{loc}(\mathbb{R}_+;L^p)$ et $a^0\in L^p$. Alors, pour toute solution a du problème (TD_ν) et appartenant à $C(\mathbb{R}_+;L^p)$, on aura*

$$\forall t\in\mathbb{R}_+,\quad \|a(t)\|_{L^p}\leq\|a^0\|_{L^p}+\int_0^t\left(\|F(\tau)\|_{L^p}+\nu\|G(\tau)\|_{L^p}\right)d\tau.$$

Preuve : Nous allons commencer par le cas $p \in [2, +\infty]$. Si p est fini, alors en multipliant l'équation régissant a par $a|a|^{p-2}$ et en faisant des intégrations par parties, utilisant la condition de divergence nulle, on trouve l'estimation du lemme. Quant à $p = +\infty$, on applique tout simplement le principe du maximum avec l'opérateur parabolique $\partial_t + v \cdot \nabla - \nu\Delta$ et l'on trouve le résultat souhaité. Dans le cas $p \in [1,2[$, la méthode précédente ne s'applique pas car les intégrations par parties dans le terme correspondant au laplacien ne seraient pas bien justifiées. Pour contourner cette difficulté, nous allons développer un argument de dualité. Sans réduire la généralité de la preuve, nous nous plaçons dans le cas $p = 1$. Soit T un temps positif. Prenons ϕ une fonction de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ à laquelle on associe le problème rétrograde suivant :

$$\begin{cases} \partial_t\psi_n + v_n \cdot \nabla\psi_n + \nu\Delta\psi_n = 0 \\ \psi_{n|t=T} = \phi. \end{cases}$$

Le champ de vecteurs v_n qui figure dans le terme de convection est une régularisation par convolution du champ v dans les deux variables d'espace et de temps. Comme conséquence, la suite de fonctions $v_n \in C_b^\infty([0,T] \times \mathbb{R}^d)$ et les bornes correspondantes dépendent de n. Ces hypothèses sur la vitesse v_n nous permettent d'assurer l'existence et l'unicité d'une solution qui soit C_b^∞ dans les deux variables t et x (voir par exemple [2]). De plus, vu que ϕ est nulle en dehors d'un compact, alors le principe du maximum relatif à des opérateurs paraboliques nous assure dans ce cas une décroissance rapide de ψ_n. En particulier, sachant que le support de ϕ est contenu dans une boule de rayon R, alors il existe une constante absolue C telle que nous ayons

$$\begin{aligned} |\psi_n(t,x)| &\leq \|\phi\|_{L^\infty} e^{Ct+\nu^{-1}\left(C_0(t)+R-|x|\right)}, \\ |\nabla\psi_n(t,x)| &\leq \|\nabla\phi\|_{L^\infty} e^{Ct+\nu^{-1}\left(C_1(t)+R-|x|\right)}, \end{aligned} \tag{2.3}$$

où l'on a posé

$$C_0(t) = \int_0^t \|v(\tau)\|_{L^\infty} d\tau \quad \text{et} \quad C_1(t) = \int_0^t \left(\|v(\tau)\|_{L^\infty} + \|\nabla v(\tau)\|_{L^\infty}\right) d\tau.$$

Remarquons que dans les fontions $C_i(t)$, il n'y a aucune trace de l'indice n dans le terme de droite. Ceci s'explique par le fait que la norme du champ régularisé v_n dans $\mathrm{Lip}(\mathbb{R}^d)$ est toujours inférieure à celle de v.

Nous signalons au passage que nous avons prouvé dans [23] des résultats précis sur la décroissance de ψ_n lorsque le champ de vitesse v_n est supposé uniquement dans $L^1_{loc}(\mathbb{R}_+; C_{LL})$, où l'on désigne par C_{LL} l'espace des fonctions logarithmiquement lipschitziennes, qui contient C^1_*.

En appliquant de nouveau le principe du maximum à l'équation gouvernant la fonction ψ_n, on trouve pour tout $t \in [0,T]$

$$\|\psi_n(t)\|_{L^\infty} \leq \|\phi\|_{L^\infty}. \tag{2.4}$$

Posons $f = F + \nu G$. Comme les fonctions ψ_n sont suffisamment régulières en temps et en espace, alors en procédant à des intégrations par parties, utilisant la divergence nulle de la vitesse, on trouve

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^d} \phi a(T) dx &= \int_{\mathbb{R}^d} \psi_n(0) a(0) dx + \int_0^T \int_{\mathbb{R}^d} f(t,x)\psi_n(t,x) dx dt \\ &+ \int_0^T \int_{\mathbb{R}^d} a(t,x)(v - v_n) \cdot \nabla\psi_n(t,x) dx dt. \end{aligned}$$

Or, d'après (2.3) nous pouvons écrire

$$\Big|\int_0^T\int_{\mathbb{R}^d} a(t,x)(v_n-v)\cdot\nabla\psi_n(t,x)dxdt\Big|\leq C_\nu(T)\|\nabla\phi\|_{L^\infty}\|v_n-v\|_{L^1_TL^\infty}\|a\|_{L^\infty_TL^1}.$$

Ainsi, en se servant de l'inégalité (2.4) et en passant ensuite à la limite quand n tend vers l'infini, on aboutit à

$$\Big|\int_{\mathbb{R}^d}\phi a(T)dx\Big|\leq\|\phi\|_{L^\infty}\Big(\|a^0\|_{L^1}+\int_0^T\|f(t)\|_{L^1}dt\Big).\tag{2.5}$$

Admettons pour le moment que cette estimation peut s'étendre à n'importe quelle fonction $\phi\in L^\infty$. Alors, par un argument de dualité on peut déduire que

$$\|a(T)\|_{L^1}\leq\|a^0\|_{L^1}+\int_0^T\|f(t)\|_{L^1}dt.$$

C'est ce qu'il faut trouver. Vérifions maintenant l'assertion de l'extension de (2.5) à des fonctions test prises dans la classe des fonctions bornées. Pour ce faire, on prend une fonction $\phi\in L^\infty$ et une approximation de l'identité ρ_n. On se donne un domaine borné Ω de $\mathbb{R}^d$ et l'on pose

$$\phi_n\overset{déf}{=}\phi\mathbf{1}_\Omega\star\rho_n.$$

Cette suite de fonctions est dans $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$. Par suite, on peut les choisir comme des fonctions test dans (2.5). D'une autre part, nous avons d'après l'inégalité de convolution

$$\|\phi_n\|_{L^\infty}\leq\|\phi\|_{L^\infty}.\tag{2.6}$$

Ainsi en reportant cette estimation dans (2.5), on trouve

$$\Big|\int_{\mathbb{R}^d}\phi_n a(T)dx\Big|\leq\|\phi\|_{L^\infty}\Big(\|a^0\|_{L^1}+\int_0^T\|f(t)\|_{L^1}dt\Big).$$

Nous voudrons passer à la limite dans le membre de gauche de l'estimation ci-dessus. Pour cela, nous avons l'intention d'appliquer le théorème de convergence dominée. La domination est triviale d'après (2.6). Il reste à vérifier la convergence presque partout d'une sous-suite de ϕ_n. Comme la suite ϕ_n converge dans L^1 vers $\phi\mathbf{1}_\Omega$, alors on déduit systématiquement la convergence presque partout. Donc, il s'ensuit que

$$\Big|\int_{\Omega}\phi a(T)dx\Big|\leq\|\phi\|_{L^\infty}\Big(\|a^0\|_{L^1}+\int_0^T\|f(t)\|_{L^1}dt\Big).$$

Il suffit à ce stade de faire un passage à la limite quand Ω croît vers $\mathbb{R}^d$. L'outil qu'on utilise à cette fin est le théorème de convergence dominée. ■

2.3 Preuve de l'effet régularisant

Cette section est réservée à la preuve de la proposition 2.2.1 qui sera effectuée en deux temps : en premier lieu nous démontrons l'effet régularisant sur un petit intervalle de temps qui ne dépend pas de la donnée initiale mais dépend uniquement du champ de vecteurs v. Ensuite, nous procédons à un découpage en temps permettant ainsi d'étendre les estimations à n'importe quel temps positif arbitrairement choisi.

2.3.1 Estimation Locale

Nous commençons par appliquer l'opérateur de découpage en fréquences à l'équation (TD_ν). Alors, en posant $a_q = \Delta_q a$, nous obtenons

$$\begin{aligned}\partial_t a_q + S_{q-1}v\cdot\nabla a_q - \nu\Delta a_q &= -[\Delta_q, v\cdot\nabla]a + (S_{q-1}v - v)\cdot\nabla a_q,\\ &\overset{déf}{=} f_q.\end{aligned}\tag{2.7}$$

La première remarque que nous pouvons mentionner concerne le spectre fréquenciel de la fonction f_q qui est localisé dans une couronne de taille 2^q, pour tout $q\in\mathbb{N}$. Nous verrons que cette information est utile lors de l'application du lemme 2.2.2. En fait, nous aurons besoin simplement d'un spectre qui soit contenu dans une boule de taille 2^q.

Pour éliminer le terme de convection $S_{q-1}v\cdot\nabla a_q$ du premier membre de l'équation 2.7 nous allons utiliser le changement de variables lagrangien donné par le flot ψ_q du champ de vecteurs régularisé $S_{q-1}v$. En revanche, nous aurons à faire à une équation de la chaleur associée à une métrique variable. Mais une particularité de cette équation, qui est un élément fondateur de la preuve, est que la métrique est proche de l'identité sur des petits intervalles de temps. Pour mettre en évidence de tels faits, nous projettons de décrire l'équation d'évolution satisfaite par la fonction $\bar{a}_q(t,x) = a_q(t,\psi_q(t,x))$ et de faire quelques estimations indispensables pour la suite.

Tout d'abord, nous allons contrôler la fonction f_q dans l'espace de Lebesgue L^p. Pour ce faire, nous utilisons pour la majoration du premier terme de f_q le lemme 2.2.1 avec $s=0$, alors que pour le second terme nous nous servons du lemme 2.2.3. Ainsi, nous trouvons une constante C qui dépend uniquement de la dimension et telle que pour tout entier $q\geq 1$,

$$\|f_q(t)\|_{L^p} \leq C\|\nabla v(t)\|_{L^\infty}\|a(t)\|_{L^p}.$$

Or le lemme 2.2.5 montre que la norme L^p de la fonction $a(t)$ est majorée par celle de la donnée initiale. Nous en déduisons alors que

$$\|f_q(t)\|_{L^p} \leq C\|\nabla v(t)\|_{L^\infty}\|a^0\|_{L^p}.\tag{2.8}$$

Posons

$$\bar{a}_q(t,x) = a_q(t,\psi_q(t,x)) \quad \text{et} \quad \bar{f}_q(t,x) = f_q(t,\psi_q(t,x)).\tag{2.9}$$

Écrivons $a_q(t,x) = \bar{a}_q(t,\psi_q^{-1}(t,x))$ et calculons son laplacien à l'aide de la formule de dérivation de fonctions composées. Alors, en notant la hessienne de $\bar{a}_q$ par $\nabla^2\bar{a}_q$, on trouve

$$\begin{aligned}\Delta a_q(t)\circ\psi_q(t,x) &= \sum_{i=1}^{d}\Big\langle\nabla^2\bar{a}_q(t,x)\cdot(\partial^i\psi_q^{-1})(t,\psi_q(t,x)),(\partial^i\psi_q^{-1})(t,\psi_q(t,x))\Big\rangle\\ &+ \nabla\bar{a}_q(t,x)\cdot(\Delta\psi_q^{-1})(t,\psi_q(t,x)).\end{aligned}\tag{2.10}$$

Le symbole $\langle\cdot,\cdot\rangle$ désigne le produit scalaire canonique de $\mathbb{R}^d$. Pour le contrôle des dérivées du flot et de son inverse $\psi_q^{-1}(t,x)$, nous disposons des estimations classiques

$$\|\nabla\psi_q^{\mp1}(t)\|_{L^\infty} \leq \exp\int_0^t\|\nabla S_{q-1}v(\tau)\|_{L^\infty}d\tau.\tag{2.11}$$

Quand on dérive l'équation d'évolution régissant l'inverse du flot par rapport à la variable d'espace, alors on peut déduire, grâce à (2.11), que la fonction ψ_q^{-1} satisfait une équation de type

$$(\partial^i\psi_q^{-1})(t,\psi_q(t,x)) = e_i + g_q^i(t,x), \tag{2.12}$$

avec e_i le i^{eme} vecteur canonique de $\mathbb{R}^d$. De plus, la fonction g_q^i est majorée comme suit :

$$\|g_q^i(t)\|_{L^\infty} \leq \exp\Big(\int_0^t \|\nabla S_{q-1}v(\tau)d\tau\Big)\int_0^t \|\nabla S_{q-1}v(\tau)\|_{L^\infty}d\tau.$$

Comme S_{q-1} envoie uniformément en q l'espace L^∞ dans lui même, alors nous aurons

$$\|g_q^i(t)\|_{L^\infty} \leq CV(t)e^{CV(t)} \stackrel{déf}{=} g(t). \tag{2.13}$$

En ce qui concerne l'estimation des dérivées secondes de $\psi_q^{-1}(t)$, nous dérivons deux fois l'équation d'évolution de ψ_q^{-1} et nous obtenons, suite à une application du lemme de Gronwall

$$\|\nabla^2\psi_q^{-1}(t)\|_{L^\infty} \leq e^{V_q(t)}\int_0^t \|\nabla^2 S_{q-1}v(\tau)\|_{L^\infty}d\tau. \tag{2.14}$$

Ainsi donc, par le biais de l'inégalité de Bernstein et l'estimation (2.11), l'inégalité (2.14) devient

$$\|\nabla^2\psi_q^{\mp1}(t)\|_{L^\infty} \leq C2^q g(t). \tag{2.15}$$

D'un autre côté, un simple calcul utilisant les informations (2.7), (2.10) et (2.12) montre que la fonction $\bar{a}_q$ vérifie

$$\begin{aligned}(\partial_t - \nu\Delta)\bar{a}_q(t,x) &= \nu\sum_{i=1}^d\langle\nabla^2\bar{a}_q(t,x)g_q^i,g_q^i(t,x)\rangle + 2\nu\sum_{i=1}^d\langle\nabla^2\bar{a}_q(t,x)e_i,g_q^i(t,x)\rangle \\ &+ \nu\nabla\bar{a}_q(t,x)\cdot(\Delta\psi_q^{-1})(t,\psi_q(t,x)) + \bar{f}_q(t,x) \stackrel{déf}{=} \mathcal{R}_q(t,x).\end{aligned} \tag{2.16}$$

Comme la fonction composée $\bar{a}_q$ n'est pas nécessairement localisée en fréquence, alors nous ne pouvons pas appliquer immédiatement le lemme 2.2.2. Donc nous serons amenés à tronquer l'équation (2.16) via l'opérateur Δ_j, avec $j \in \mathbb{N}$. Ainsi la formule de Duhamel montre que la fonction $\Delta_j\bar{a}_q$ vérifie

$$\Delta_j\bar{a}_q(t,x) = e^{\nu t\Delta}\Delta_j a_q(0) + \int_0^t e^{\nu(t-\tau)\Delta}\Delta_j\mathcal{R}_q(\tau,x)d\tau. \tag{2.17}$$

Le support de $\widehat{f_q}$ est localisé dans une boule de taille 2^q. Donc il s'ensuit, grâce au lemme de Bernstein et la préservation de la mesure par le flot, que

$$\begin{aligned}\|\Delta_j\bar{f}_q(t)\|_{L^p} &\leq C2^{-j}\|\nabla(f_q\circ\psi_q(t))\|_{L^p}, \\ &\leq C2^{q-j}\|\nabla\psi_q(t)\|_{L^\infty}\|f_q(t)\|_{L^p}.\end{aligned}$$

Ainsi les inégalités (2.8) et (2.11) permettent d'avoir

$$\begin{aligned}\|\Delta_j\bar{f}_q(t)\|_{L^p} &\leq C2^{q-j}e^{V_q(t)}\|a^0\|_{L^p}\|\nabla v(t)\|_{L^\infty} \\ &\leq C2^{q-j}e^{CV(t)}\|a^0\|_{L^p}\|\nabla v(t)\|_{L^\infty}.\end{aligned}$$

En conséquence, nous déduisons, à l'aide du lemme 2.2.2 et compte tenu des inégalités (2.13) et (2.15), que

$$\begin{aligned}\|\Delta_j\bar{a}_q(t)\|_{L^p} \leq Ce^{-c\nu t2^{2j}}\|\Delta_j a_q(0)\|_{L^p} \quad &+ \quad C\nu\big(g(t)+g^2(t)\big)\int_0^t e^{-c\nu(t-\tau)2^{2j}}\|\nabla^2\bar{a}_q(\tau)\|_{L^p}d\tau \\ &+ \quad C\nu 2^q g(t)\int_0^t e^{-c\nu(t-\tau)2^{2j}}\|\nabla\bar{a}_q(\tau)\|_{L^p}d\tau \qquad (2.18) \\ &+ \quad C2^{q-j}e^{CV(t)}\|a^0\|_{L^p}\int_0^t e^{-c\nu(t-\tau)2^{2j}}\|\nabla v(\tau)\|_{L^\infty}d\tau.\end{aligned}$$

Prenons la norme L^r en temps dans les deux membres de l'inégalité (2.18). Alors nous obtenons par le biais de l'inégalité de Young (lemme 2.2.4) et la croisssance de g,

$$\begin{aligned}\|\Delta_j\bar{a}_q(t)\|_{L^r([0,t];L^p)} \leq C(\nu 2^{2j})^{\frac{-1}{r}}\|\Delta_j a_q(0)\|_{L^p} \quad &+ \quad C\big(g(t)+g^2(t)\big)2^{-2j}\|\nabla^2\bar{a}_q\|_{L^r([0,t];L^p)} \\ &+ \quad Cg(t)2^q2^{-2j}\|\nabla\bar{a}_q\|_{L^r([0,t];L^p)} \\ &+ \quad Cg(t)\|a^0\|_{L^p}2^{q-j}(\nu 2^{2j})^{\frac{-1}{r}}. \qquad (2.19)\end{aligned}$$

En revenant à (2.9) et en se servant de (2.11), (2.15) et du lemme de Bernstein on aboutit, grâce à la conservation de la mesure par le flot, aux estimations

$$\|\nabla\bar{a}_q(t)\|_{L^p} \leq C2^q e^{CV(t)}\|a_q(t)\|_{L^p}, \qquad (2.20)$$

$$\|\nabla^2\bar{a}_q(t)\|_{L^p} \leq C2^{2q}e^{CV(t)}\|a_q(t)\|_{L^p}. \qquad (2.21)$$

Soit N_0 un entier que l'on choisira à la fin. Alors en reportant (2.20) et (2.21) dans (2.19) et en sommant sur les entiers $j \geq q-N_0$, on trouve

$$\begin{aligned}(\nu 2^{2q})^{\frac{1}{r}}\sum_{j\geq q-N_0}\|\Delta_j\bar{a}_q\|_{L^r([0,t];L^p)} \quad &\leq \quad C\|a^0\|_{L^p}+C2^{2N_0}h(t)(\nu 2^{2q})^{\frac{1}{r}}\|a_q\|_{L^r([0,t];L^p)} \qquad (2.22) \\ &+ \quad C2^{N_0(1+\frac{2}{r})}\|a^0\|_{L^p}g(t),\end{aligned}$$

où l'on a posé $h(t)=g(t)+g(t)^2$. Faisons remarquer qu'il n'y a pas un cœfficient en N_0 dans le premier terme du second membre de (2.22) car $\Delta_j a_q(0)=0$, si $|j-q|\geq 2$. Il faut noter aussi que le calcul que nous venons de développer est valable pour les entiers $q\geq N_0$, sinon, l'estimation (2.22) serait fausse.

Concernant le cas des basses fréquences $j\leq q-N_0$, on dispose du lemme suivant, démontré par M. Vishik dans [36] et que nous allons redémontrer pour la commodité du lecteur.

Lemme 2.3.1. *Soit d un entier supérieur ou égal à 2. Il existe une constante positive C ne dépendant que de d telle que, pour toute fonction a de la classe de Schwartz et pour tout difféomorphisme ψ de $\mathbb{R}^d$ préservant la mesure de Lebesgue, on aura pour tout $p\in[1,+\infty]$ et pour tous les $j,q\geq -1$,*

$$\|\Delta_j(\Delta_q a\circ\psi(\cdot))\|_{L^p} \leq C2^{-|j-q|}\|\nabla\psi^{\alpha(j,q)}\|_{L^\infty}\|\Delta_q a\|_{L^p},$$

où l'on a posé

$$\alpha(j,q) = \begin{cases} \frac{j-q}{|j-q|}, & \text{si} j\neq q, \\ 0, & \text{sinon.}\end{cases}$$

Nous convenons que $\psi^0 = \mathrm{Id}$.

Admettons pour le moment ce lemme et voyons comment il permet de conclure. Vu que le flot est une transformation qui préserve la mesure de Lebesgue, alors on peut écrire via le lemme 2.3.1 et les inégalités (2.22) et (2.11) que

$$\begin{aligned}
(\nu 2^{2q})^{\frac{1}{r}}\|a_q\|_{L^r([0,t];L^p)} &= (\nu 2^{2q})^{\frac{1}{r}}\|\bar{a}_q\|_{L^r([0,t];L^p)} \\
&\le (\nu 2^{2q})^{\frac{1}{r}}\sum_{j\ge q-N_0}\|\Delta_j\bar{a}_q\|_{L^r([0,t];L^p)} + (\nu 2^{2q})^{\frac{1}{r}}\sum_{j\le q-N_0}\|\Delta_j\bar{a}_q\|_{L^r([0,t];L^p)} \\
&\le C2^{2N_0}h(t)(\nu 2^{2q})^{\frac{1}{r}}\|a_q\|_{L^r([0,t];L^p)} + C2^{3N_0}\|a^0\|_{L^p}g(t) \\
&+ C\|a^0\|_{L^p} + C(\nu 2^{2q})^{\frac{1}{r}}\|a_q\|_{L^r([0,t];L^p)}2^{-N_0}e^{CV(t)}. \qquad (2.23)
\end{aligned}$$

Sous cette forme on voit clairement le rôle que l'entier N_0 joue: dans la zone des hautes fréquences on profite de la petitesse (en temps) de la fonction h. Tandis que dans le spectre des basses fréquences on agrandit N_0 de manière à ce que le dernier terme figurant dans (2.23) soit absorbé par la quantité de gauche. Mais le choix du temps et de N_0 sont fortement liés. ils sont donnés par les deux conditions suivantes :

$$C2^{2N_0}h(t) \le \frac{1}{4} \quad \text{et} \quad C2^{-N_0}e^{CV(t)} \le \frac{1}{4}. \qquad (2.24)$$

Par suite, si $V(t) \le 1$, on choisit N_0 pour que $2^{-N_0} \le \frac{1}{4C}e^{-C}$, puis quitte à diminuer encore $V(t)$, on assure que $C2^{2N_0}h(t) \le 1/4$. Ainsi on montre l'existence d'une constante C_0 dépendant seulement de la dimension d telle que, si

$$\int_0^t \|\nabla v(\tau)\|_{L^\infty}d\tau \le C_0 \qquad (2.25)$$

alors (2.24) aura lieu. Auquel cas l'entier N_0 est aussi absolu. Il s'ensuit que pour tout t satisfaisant (2.25) et pour tout $q \ge N_0$,

$$(\nu 2^{2q})^{\frac{1}{r}}\|a_q\|_{L^r([0,t];L^p)} \le C\|a^0\|_{L^p}. \qquad (2.26)$$

Pour finir cette première étape, il nous reste à voir comment s'estiment les basses fréquences : nous obtenons aisément, grâce à l'estimation $\|a(t)\|_{L^p} \le \|a^0\|_{L^p}$ et via la continuité uniforme en q de l'opérateur de localisation en fréquence $\Delta_q \in \mathcal{L}(L^p)$, que

$$(\nu 2^{q})^{\frac{1}{r}}\|\Delta_q a\|_{L^r([0,t];L^p)} \le C(\nu t)^{\frac{1}{r}}\|a^0\|_{L^p}. \qquad (2.27)$$

Ainsi, nous parvenons à établir localement en temps, le résultat énoncé dans la proposition 2.2.1.

2.3.2 Globalisation

L'extension du résultat local obtenu à n'importe quel temps arbitraire positif T n'est pas difficile. Nous parvenons à propager l'effet régularisant de proche en proche car la condition locale (2.25) ne tient pas compte des estimées de la solution a. Elle est uniquememt liée au gradient du champ de vecteurs v. Le point de départ de la preuve est de partager l'intervalle $[0,T]$ en une subdivision $(T_i)_{i=0}^N$ comme ci-dessous :

$$T_0 = 0 \le T_1 \le ... \le T_N = T \quad \text{et} \quad \int_{T_i}^{T_{i+1}} \|\nabla v(\tau)\|_{L^\infty}d\tau \simeq C_0, \forall\, i \in [\![0,N-1]\!].$$

Dans chacun de ces sous intervalles $[T_i,T_{i+1}]$, on reproduit exactement la même démarche locale sauf qu'au lieu d'utiliser le flot ψ_q fixant l'espace à l'instant $t = 0$, nous devons réinitialiser le flot à l'instant T_i. On obtient alors pour tout entier $q \geq N_0$ (N_0 est le même entier qui apparaît dans la preuve locale)

$$\begin{aligned}(\nu 2^{2q})^{\frac{1}{r}} \|a_q\|_{L^r([T_i,T_{i+1}];L^p)} &\leq C\|a(T_i)\|_{L^p} \\ &\leq C\|a^0\|_{L^p}. \end{aligned} \tag{2.28}$$

Sachant que $N \simeq 1 + \int_0^T \|\nabla v(\tau)\|_{L^\infty} d\tau$, alors en sommant les inégalités de 0 jusqu'au $N-1$, nous obtenons grâce à l'inégalité triangulaire que pour tout entier $q \geq N_0$ et pour tout $r \in [1,+\infty[$

$$\begin{aligned}\nu 2^{2q}\|a_q\|^r_{L^r([0,T];L^p)} &= \nu 2^{2q} \sum_{i=0}^{N-1} \|a_q\|^r_{L^r([T_i,T_{i+1}];L^p)} \\ &\leq C\|a^0\|^r_{L^p}\Big(1 + \int_0^T \|\nabla v(\tau)\|_{L^\infty} d\tau\Big). \end{aligned} \tag{2.29}$$

Ainsi l'estimation de la proposition 2.2.1 découle facilement des relations (2.27) et (2.29).

2.3.3 Preuve du lemme de composition dyadique

L'objet de ce paragraphe est de démontrer le lemme 2.3.1. Pour ce faire, nous allons distinguer trois cas : le premier concerne les $j > q$, le second correspond à $j < q$ et le dernier traite la situation où les deux indices coïncident. La preuve du premier et du troisième cas n'est pas trop difficile. En effet, pour $j > q$, on utilise le lemme de Bernstein et l'uniformité en j de la norme de l'opérateur Δ_j comme étant un élément de $\mathcal{L}(L^p)$. Alors un argument de conservation de la mesure par le flot nous permet de conclure que

$$\begin{aligned}\|\Delta_j(\Delta_q a \circ \psi)\|_{L^p} &\leq C2^{-j}\|\nabla(\Delta_q a \circ \psi)\|_{L^p}, \\ &\leq C2^{q-j}\|\nabla\psi\|_{L^\infty}\|\Delta_q a\|_{L^p}. \end{aligned}$$

Concernant le cas $j = q$, on écrit simplement, grâce à l'uniformité de l'opérateur Δ_q et à la préservation de la mesure par le flot, que

$$\|\Delta_q(\Delta_q a \circ \psi)\|_{L^p} \leq C\|\Delta_q a\|_{L^p}.$$

Pour avoir l'estimation du lemme, il suffit de faire usage de l'inégalité

$$(d!)^{\frac{-1}{d}} \leq \|\nabla\psi^{\mp1}\|_{L^\infty}. \tag{2.30}$$

Celle-ci s'obtient tout simplement grâce à la préservation de la mesure de Lebesgue. D'une manière concrète, cette hypothèse implique que le déterminant de la différentielle de $\psi^{\mp1}$ vaut 1. Il suffit ensuite de recourir à la formule du déterminant comme étant une somme sur les permutations d'ordre d d'un produit à d termes.

Dans ce qui suit, nous tâcherons de montrer le résultat dans le cas restant. Celui-ci est plus difficile à traiter et c'est justement dans cet endroit que la conservation de la mesure paraît un élément infranchissable de la preuve de la proposition 2.2.1 et même du théorème 2.2.1. Commençons par l'identité suivante

$$|\xi|^2 = \sum_{|\alpha|=1} (-i\xi)^\alpha (i\xi)^\alpha. \tag{2.31}$$

D'un autre côté, comme pour tout $q \in \mathbb{N}$ le support de la transformée de Fourier de $\Delta_q a$ est inclus dans $2^q\mathcal{C}$, alors on peut écrire

$$\mathcal{F}\Delta_q a(\xi) = \widetilde{\phi}(2^{-q}\xi)\mathcal{F}\Delta_q a(\xi),$$

avec $\widetilde{\phi}$ une fonction appartenant à la classe de Schwartz, supportée compactement dans un domaine ne contenant pas l'origine et valant 1 sur la couronne $\mathcal{C}$. Par conséquent, en posant

$$f_{\alpha,q} = \mathcal{F}^{-1}\big((i\xi)^\alpha |\xi|^{-2}\widetilde{\phi}(2^{-q}\xi)\big),$$

on constate que l'on peut écrire $\mathcal{F}f_{\alpha,q}(\xi) = 2^{-q}F_\alpha(2^{-q}\xi)$, avec $F_\alpha \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$. Par suite nous aurons sur $f_{\alpha,q}$ l'estimation

$$\|f_{\alpha,q}\|_{L^1} \leq C2^{-q}\|\mathcal{F}^{-1}F_\alpha\|_{L^1}. \tag{2.32}$$

D'autre part, nous pouvons écrire, grâce à (2.31), que

$$\Delta_q a = \sum_{|\alpha|=1} f_{\alpha,q} \star \partial^\alpha \Delta_q a. \tag{2.33}$$

Désignons par h la fonction dont la transformée de Fourier vaut φ, la fonction qu'on a déjà introduite dans (2.1). Alors, nous aurons la formule de convolution suivante

$$\Delta_j(\Delta_q a \circ \psi)(x) = 2^{jd}\int_{\mathbb{R}^d} h(2^j(x-y)\Delta_q a \circ \psi(y)dy. \tag{2.34}$$

Maintenant, on fait le changement de variable $y \to \psi^{-1}(y)$, qui préserve la mesure. Alors, on parvient à transformer (2.34) sous la forme

$$\Delta_j(\Delta_q a \circ \psi)(x) = 2^{jd}\int_{\mathbb{R}^d} h(2^j(x-\psi^{-1}(y))\Delta_q a(y)dy. \tag{2.35}$$

En combinant (2.35) avec (2.33) et en faisant des intégrations par parties permettant de porter les dérivées sur h, on obtient la majoration

$$|\Delta_j(\Delta_q a \circ \psi)(x)| \leq 2^j\|\nabla\psi^{-1}\|_{L^\infty}\sum_{|\alpha|=1} 2^{jd}\int_{\mathbb{R}^d} \big|\nabla h(2^j(x-\psi^{-1}(y))f_{\alpha,q} \star \Delta_q a(y)\big|dy \tag{2.36}$$

À ce stade on fait le changement de variable inverse $y \to \psi(y)$ et on utilise deux fois les inégalités de convolution, en s'appuyant particulièrement sur (2.32), et l'on trouve

$$\|\Delta_j(\Delta_q a \circ \psi)\|_{L^p} \leq C2^{j-q}\|\nabla\psi^{-1}\|_{L^\infty}\|\Delta_q a\|_{L^p}.$$

Ceci achève la preuve du lemme 2.3.1.

Remarque : Nous constatons bien que dans le cas d'un difféomorphisme ψ ne préservant pas la mesure, nous aurons à manipuler un terme nouveau qui correspond à la dérivation du jacobien de ψ^{-1}. Comme conséquence, le résultat du lemme persiste sous réserve que le gradient du jacobien $J_{\psi^{-1}}$ soit borné. Or, dans le cas pratique le difféomorphisme en jeu est ψ_q qui est le flot associé à $S_{q-1}v$. De ce fait, un calcul utilisant l'équation du jacobien montre bien que

$$\|\nabla J_{\psi^{-1}}(t)\|_{L^\infty} \leq 2^q\Big(e^{\int_0^t \|\,\mathrm{div}(\tau)\|_{L^\infty}d\tau} - 1\Big).$$

Par suite nous ne pouvons avoir que l'estimation

$$\|\Delta_j(a_q \circ \psi_q)(t)\|_{L^p} \leq Ce^{C\int_0^t \|\nabla v(\tau)\|_{L^\infty}d\tau}\|\Delta_q a(t)\|_{L^p},$$

ce qui ne permet pas d'assurer la petitesse de cette quantité quand $j < q$.

2.4 Propagation dans les espaces de Hölder

Nous nous occupons dans cette partie de la preuve du théorème 2.2.1. Elle suit dans ses grands traits celle de la proposition 2.2.1. Nous appliquons l'opérateur de filtrage en fréquences et nous faisons un changement de variables dans la nouvelle équation permettant de masquer le terme de convection. Ce qui ramène le problème initial à un problème parabolique à cœfficients variables. L'information cruciale qui est à la base de notre manœuvre est que la nouvelle métrique est proche de l'identité. Ce fait nous assure un résultat de propagation local qui peut s'itérer. Soulignons que le résultat local exige une estimation fine sur le commutateur et qui fera l'objet du lemme 2.4.1.

2.4.1 Estimation locale

Dans une première phase, nous projettons d'établir des estimations de la solution a dans la classe $L^\infty(\mathbb{R}_+; B^s_p)$. Nous verrons que le contrôle dans cet espace est primordial quand nous voudrons établir des estimations $\widetilde{L}^r_t B^s_p$. Ce lien apparaît lorsqu'on découpe le temps et l'on passe d'un intervalle à l'autre. Posons

$$a_q = \Delta_q a,\ F_q = \Delta_q F \quad \text{et} \quad G_q = \Delta_q G,$$

alors nous prétendons avoir ce qui suit :

Lemme 2.4.1. *Pour tout entier $q \geq 1$, la fonction a_q vérifie*

$$\partial_t a_q + S_{q-1}v\cdot\nabla a_q - \nu\Delta a_q = F_q + \nu\, G_q + R_q(v,a) \tag{2.37}$$

telle que, d'une part, la transformée de Fourier de R_q est supportée dans une couronne de taille 2^q et d'autre part nous avons

$$\|R_q(v,a)\|_{L^p} \leq C\|\nabla v\|_{L^\infty}\sum_{q'\geq -1} 2^{-|q'-q|}\|\Delta_{q'}a\|_{L^p}. \tag{2.38}$$

De plus, pour tout $q \geq -1$

$$\|[\Delta_q, v\cdot\nabla]a\|_{L^p} \leq C\|\nabla v\|_{L^\infty}\sum_{q'\geq -1} 2^{-|q'-q|}\|\Delta_{q'}a\|_{L^p}. \tag{2.39}$$

Nous admettons pour l'instant ce lemme qu'on démontrera à la fin de cette section. L'idée consiste à suivre la fonction a_q le long des lignes de courant correspondant au champ de vecteurs $S_{q-1}v$ et à décrire l'équation correspondante. Désignons comme dans la section précédente le flot associé au champ de vecteurs $S_{q-1}v$ par ψ_q et posons

$$\bar{a}_q(t) = a_q\big(t,\psi_q(t)\big) \quad , \quad \bar{F}_q(t) = F_q\big(t,\psi_q(t)\big),$$
$$\bar{G}_q(t) = G_q\big(t,\psi_q(t)\big) \quad \text{et} \quad \bar{R}_q(v,a) = R_q(v,a)\circ\psi_q(t).$$

Alors en imitant la preuve du (2.16) on trouve

$$\begin{aligned}(\partial_t - \nu\Delta)\bar{a}_q(t) &= \nu\sum_{i=1,2}\Big\langle\nabla^2\bar{a}_q(t)g_q^i(t), g_q^i(t)\Big\rangle + 2\nu\sum_{i=1,2}\Big\langle\nabla^2\bar{a}_q(t)e_i, g_q^i(t)\Big\rangle \\ &+ \nu\langle\nabla\bar{a}_q(t),(\Delta\psi_q^{-1})(t,\psi_q(t))\rangle + \bar{F}_q(t) + \nu\,\bar{G}_q(t) + \bar{R}_q(v,a)(t). \quad (2.40)\end{aligned}$$

Les fonctions g_q^i sont celles déjà introduites dans (2.12). Ainsi en tronquant l'équation régissant $\bar{a}_q$ sur des couronnes de taille 2^j et en recourant aux mêmes outils, utilisant particulièrement le lemme 2.2.2 et les estimations (2.11), (2.12), (2.13) et (2.15), on obtient

$$\begin{aligned}\|\Delta_j\bar{a}_q(t)\|_{L^p} &\leq Ce^{-c\nu t2^{2j}}\|\Delta_j a_q(0)\|_{L^p} + C\nu(g(t)+g^2(t))\int_0^t e^{-c\nu(t-\tau)2^{2j}}\|\nabla^2\bar{a}_q(\tau)\|_{L^p}d\tau \\ &+ C\nu 2^q g(t)\int_0^t e^{-c\nu(t-\tau)2^{2j}}\|\nabla\bar{a}_q(\tau)\|_{L^p}d\tau + C\nu\int_0^t e^{-c\nu(t-\tau)2^{2j}}\|\bar{G}_q(\tau)\|_{L^p}d\tau \\ &+ C\int_0^t e^{-c\nu(t-\tau)2^{2j}}\Big(\|\Delta_j\bar{F}_q(\tau)\|_{L^p} + \|\Delta_j\bar{R}_q(v,a)(\tau)\|_{L^p}\Big)d\tau. \quad (2.41)\end{aligned}$$

Dans l'espoir de sommer sur les hautes fréquences en j sans se soucier de la convergence de la série en jeu, nous devons faire quelques précautions dans le traitement de la dernière intégrale. Par contre les autres membres de la majoration sont faciles à étudier. En ce qui concerne le contrôle de la dernière intégrale de (2.41), le lemme 2.3.1 paraît un outil convenable. Il donne successivement en vertu de l'inégalité (2.11) et du lemme 2.4.1

$$\|\Delta_j\bar{F}_q(t)\|_{L^p} \leq Ce^{CV(t)}2^{-|q-j|}\|F_q(t)\|_{L^p} \quad \text{et} \quad (2.42)$$

$$\|\Delta_j\bar{R}_q(v,a)(t)\|_{L^p} \leq C2^{-|q-j|}e^{CV(t)}\|\nabla v(t)\|_{L^\infty}\sum_{q'}2^{-|q'-q|}\|\Delta_{q'}a(t)\|_{L^p}. \quad (2.43)$$

L'estimation (2.43) est valable pour tout $j \geq -1$ et pour tout $q \geq 1$. Ainsi en utilisant (2.20), (2.21), (2.42) et (2.43), alors l'estimation (2.41) devient

$$\begin{aligned}\|\Delta_j\bar{a}_q(t)\|_{L^p} &\leq Ce^{-c\nu t2^{2j}}\|\Delta_j a_q(0)\|_{L^p} + C\nu 2^{2q}h(t)\int_0^t e^{-c\nu(t-\tau)2^{2j}}\|a_q(\tau)\|_{L^p}d\tau \\ &+ Ce^{CV(t)}2^{q-j}\sum_{q'}2^{-|q'-q|}\int_0^t\|\nabla v(\tau)\|_{L^\infty}\|\Delta_{q'}a(\tau)\|_{L^p}d\tau \quad (2.44) \\ &+ Ce^{CV(t)}2^{q-j}\int_0^t e^{-c\nu(t-\tau)2^{2j}}\|F_q(\tau)\|_{L^p}d\tau + C\nu\int_0^t e^{-c\nu(t-\tau)2^{2j}}\|G_q(\tau)\|_{L^p}d\tau,\end{aligned}$$

avec $h(t) = C\big(V(t) + V^2(t)\big)e^{CV(t)}$. Soient N_0 un entier positif qui sera déterminé à la fin de ce paragraphe et q un entier supérieur à N_0. Alors en prenant la norme L^r des deux côtés et en sommant sur les $j \geq q - N_0$, tout en se servant des inégalités de Young et de Hölder, on trouve

$$\begin{aligned}
\sum_{j\geq q-N_0} \|\Delta_j \bar{a}_q(t)\|_{L^r_t L^p} &\leq C(\nu 2^{2q})^{\frac{-1}{r}}\|a_q(0)\|_{L^p} + Ch(t)2^{N_0}\|a_q\|_{L^r_t L^p} \\
&+ Ce^{CV(t)}2^{N_0}t^{\frac{1}{r}}\|\nabla v\|_{L^{\bar{r}}_t L^\infty}\sum_{q'} 2^{-|q'-q|}\|\Delta_{q'}a\|_{L^r_t L^p} \qquad (2.45)\\
&+ Ce^{CV(t)}2^{N_0(1+\frac{2}{r})}(\nu 2^{2q})^{\frac{-1}{r}}\|F_q\|_{L^1_t L^p} + C2^{2N_0}2^{-2q}\|G_q\|_{L^r_t L^p},
\end{aligned}$$

où l'on désigne par $\bar{r}$ l'exposant conjugué de r. Nous signalons que l'obtention de l'estimation figurant dans (2.45) se déduit à partir de (2.44) via l'inégalité suivante:

$$\Big\|\int_0^t f(\tau)g(\tau)d\tau\Big\|_{L^r_T} \leq t^{\frac{1}{r}}\|f\|_{L^{\bar{r}}_T}\|g\|_{L^r_T}.$$

Pour le traitement des basses fréquences en j, on se sert du lemme 2.3.1 qui implique

$$\sum_{j\leq q-N_0} \|\Delta_j \bar{a}_q(t)\|_{L^p} \leq Ce^{CV(t)}2^{-N_0}\|a_q(t)\|_{L^p}. \qquad (2.46)$$

Donc, en utilisant la conservation de la mesure par le flot et en combinant (2.45) et (2.46) nous aboutissons pour tout $q \geq N_0$ au résultat suivant

$$\begin{aligned}
\nu^{\frac{1}{r}}2^{q(s+\frac{2}{r})}\|a_q\|_{L^r_t L^p} &\leq \nu^{\frac{1}{r}}2^{q(s+\frac{2}{r})}\Big(\sum_{j\geq q-N_0}\|\Delta_j\bar{a}_q\|_{L^r_t L^p} + \sum_{j<q-N_0}\|\Delta_j\bar{a}_q\|_{L^r_t L^p}\Big)\\
&\leq C2^{qs}\|a_q(0)\|_{L^p} + C\big(h(t)2^{N_0} + e^{CV(t)}2^{-N_0}\big)\nu^{\frac{1}{r}}2^{q(s+\frac{2}{r})}\|a_q\|_{L^r_t L^p}\\
&+ Ce^{CV(t)}2^{3N_0}2^{qs}\|F_q\|_{L^1_t L^p} + C2^{2N_0}\nu^{\frac{1}{r}}2^{q(s+\frac{2}{r}-2)}\|G_q\|_{L^r_t L^p}\\
&+ Ce^{CV(t)}2^{N_0}t^{\frac{1}{r}}\|\nabla v\|_{L^{\bar{r}}_t L^\infty}\nu^{\frac{1}{r}}2^{q(s+\frac{2}{r})}\sum_{q'}2^{-|q'-q|}\|\Delta_{q'}a\|_{L^r_t L^p}. \qquad (2.47)
\end{aligned}$$

Concernant les basses fréquences, i.e., correspondant aux entiers $q \leq N_0$, nous allons procéder autrement. Pour commencer, on note que a_q est solution de l'équation

$$\Big(\partial_t + v\cdot\nabla - \nu\Delta\Big)a_q = F_q + \nu G_q - [\Delta_q, v\cdot\nabla]a. \qquad (2.48)$$

Alors, il suffit d'utiliser les lemmes 2.2.5 et 2.4.1 pour déduire que pour tout $q \geq -1$

$$\begin{aligned}
\|\Delta_q a(t)\|_{L^p} &\leq \|\Delta_q a(0)\|_{L^p} + \int_0^t \Big(\|F_q(\tau)\|_{L^p} + \nu\|G_q(\tau)\|_{L^p}\Big)d\tau\\
&+ \int_0^t \|\nabla v(\tau)\|_{L^\infty}\sum_{q'}2^{-|q'-q|}\|\Delta_{q'}a(\tau)\|_{L^p}d\tau. \qquad (2.49)
\end{aligned}$$

Maintenant, on prend la norme L^r des deux côtés dans l'inégalité (2.49) tout en se servant de l'inégalité de Hölder. On trouve pour tout $q \leq N_0$

$$\begin{aligned}
\nu^{\frac{1}{r}}2^{q(s+\frac{2}{r})}\|a_q\|_{L^r_t L^p} &\leq (\nu t)^{\frac{1}{r}}2^{\frac{2N_0}{r}}2^{qs}\|\Delta_q a(0)\|_{L^p} \qquad (2.50)\\
&+ (\nu t)^{\frac{1}{r}}2^{\frac{2N_0}{r}}2^{qs}\|F_q\|_{L^1_t L^p} + 2^{2N_0}(t\nu)\nu^{\frac{1}{r}}2^{q(s+\frac{2}{r}-2)}\|G_q\|_{L^r_t L^p}\\
&+ t^{\frac{1}{r}}\|\nabla v\|_{L^{\bar{r}}_t L^\infty}\nu^{\frac{1}{r}}2^{q(s+\frac{2}{r})}\sum_{q'}2^{-|q'-q|}\|\Delta_{q'}a\|_{L^r_t L^p}.
\end{aligned}$$

Posons

$$U_q(t) = \nu^{\frac{1}{r}} 2^{q(s+\frac{2}{r})} \|a_q\|_{L_t^r L^p} \quad \text{et} \quad V_r(t) = \|\nabla v\|_{L_t^r L^\infty}.$$

Alors en combinant les inégalités (2.47) et (2.50), nous parvenons à

$$\begin{aligned} U_q(t) &\leq C\big(1 + (\nu t)^{\frac{1}{r}}\big) 2^{2N_0} 2^{qs} \Big(\|a_q(0)\|_{L^p} + e^{CV(t)} \|F_q\|_{L_t^1 L^p} \Big) \\ &+ C\Big(h(t) 2^{N_0} + e^{CV(t)} 2^{-N_0}\Big) U_q(t) + C 2^{2N_0} (1 + \nu t) \nu^{\frac{1}{r}} 2^{q(s+\frac{2}{r}-2)} \|G_q\|_{L_t^r L^p} \\ &+ C e^{CV(t)} 2^{N_0} t^{\frac{1}{r}} V_r(t) \sum_{q'} 2^{-|q'-q|\alpha(r,s)} U_{q'}(t). \end{aligned} \tag{2.51}$$

où l'on a posé $\alpha(r,s) = \min\left\{1 + s + \frac{2}{r}, 1 - s - \frac{2}{r}\right\}\cdot$ L'inégalité de convolution que nous allons utiliser exige que $\alpha(r,s)$ soit strictement positif. C'est la source de la restriction sur r mentionnée dans le théorème 2.2.1. Soit t un réel positif tel qu'on ait

$$h(t) 2^{N_0} + e^{CV(t)} 2^{-N_0} \leq \frac{1}{2C}\cdot \tag{2.52}$$

Cette condition est semblable à (2.24). Donc, par les mêmes arguments, elle est satisfaite dès que

$$V(t) \leq C_0, \tag{2.53}$$

avec C_0 une constante universelle. De même N_0 est absolue. Ainsi l'estimation (2.51) devient

$$\begin{aligned} U_q(t) &\leq C\big(1 + (\nu t)^{\frac{1}{r}}\big) \Big(2^{qs} \|a_q(0)\|_{L^p} + 2^{qs} \|F_q\|_{L_t^1 L^p} \Big) \\ &+ C(1 + \nu t) \nu^{\frac{1}{r}} 2^{q(s+\frac{2}{r}-2)} \|G_q\|_{L_t^r L^p} + C t^{\frac{1}{r}} V_r(t) \sum_{q'} 2^{-|q'-q|\alpha(r,s)} U_{q'}(t). \end{aligned} \tag{2.54}$$

En prenant la borne supérieure sur q des deux côtés et sachant que la somme sur q' est une convolution, alors on établit que

$$\begin{aligned} (U_q)_{\ell^\infty(\mathbb{Z})} &\leq C\big(1 + (\nu t)^{\frac{1}{r}}\big) \Big(\|a^0\|_{B_p^s} + \|F\|_{\widetilde{L}_t^1 B_p^s} \Big) + C(1 + \nu t) \nu^{\frac{1}{r}} \|G\|_{\widetilde{L}_t^r B_p^{s+\frac{2}{r}-2}} \\ &+ C \alpha(r,s)^{-1} t^{\frac{1}{r}} V_r(t) (U_q)_{\ell^\infty(\mathbb{Z})}. \end{aligned} \tag{2.55}$$

Si on impose sur le temps t la condition

$$C \alpha(r,s)^{-1} t^{\frac{1}{r}} V_r(t) \leq \frac{1}{2}, \tag{2.56}$$

alors l'estimation (2.55) devient

$$(U_q)_{\ell^\infty(\mathbb{Z})} \leq C\big(1 + (\nu t)^{\frac{1}{r}}\big) \Big(\|a^0\|_{B_p^s} + \|F\|_{\widetilde{L}_t^1 B_p^s} \Big) + C(1 + \nu t) \nu^{\frac{1}{r}} \|G\|_{\widetilde{L}_t^r B_p^{s+\frac{2}{r}-2}}. \tag{2.57}$$

En fait, quitte à prendre C_0 petite, alors on peut déduire, grâce à l'inégalité de Hölder, la condition dictée par (2.53) à partir de (2.56). Pour être précis et pour avoir les deux conditions à la fois, nous supposerons que t satisfait

$$t^{\frac{1}{r}} V_r(t) \leq C \alpha(r,s), \tag{2.58}$$

avec C une petite constante qui dépend uniquement de la dimension d. Dorénavant, c'est cette condition qu'on retient. Quand on travaille avec la norme L^∞ en temps, alors l'estimation décrite par (2.57) devient

$$\|a(t)\|_{B^s_p} \leq C\|a^0\|_{B^s_p} + C\|F\|_{\widetilde{L}^1_t B^s_p} + C(1+\nu t)\|G\|_{\widetilde{L}^r_t B^{s+\frac{2}{r}-2}_p}, \tag{2.59}$$

sous réserve que (2.58) soit satisfaite. Nous allons donner une autre estimation ponctuelle en temps: on prend le supremum en q des deux côtés dans (2.47) tout en le faisant rentrer à l'intérieur des intégrales. Ensuite on reproduit la même chose pour l'inégalité (2.49) mais après une mutilplication par 2^{qs}. On aboutit à

$$\|a(t)\|_{B^s_p} \leq C\|a^0\|_{B^s_p} + C\|F\|_{\widetilde{L}^1_t B^s_p} + C\nu \int_0^t \|G(\tau)\|_{B^{s-2}_p} d\tau + C\|G\|_{L^\infty_t B^{s-2}_p}. \tag{2.60}$$

Sachant que $L^1_t B^s_p$ s'injecte continûment dans $\widetilde{L}^1_t B^s_p$, alors nous déduisons de l'estimation (2.60)

$$\|a(t)\|_{B^s_p} \leq C\|a^0\|_{B^s_p} + C \int_0^t \Big(\|F(\tau)\|_{B^s_p} + \nu\|G(\tau)\|_{B^{s-2}_p}\Big) d\tau + C\|G\|_{L^\infty_t B^{s-2}_p}. \tag{2.61}$$

Il n'est pas difficile d'obtenir des estimations globales en temps car la contrainte sur le temps n'est pas liée à la taille de la donnée initiale mais seulement à la taille lipschitzienne du champ de vecteurs v. En premier lieu, nous nous occupons de l'extension des estimations (2.61) et (2.59). Ayant établi de tels résultats, nous pouvons alors espérer avoir une estimation de la solution dans les espaces $\widetilde{L}^r_{loc}(\mathbb{R}_+; B^s_p)$.

2.4.2 Globalisation

On se donne un réel positif T et on découpe l'intervalle $[0,T]$ en une subdivision $(T_i)_{i=0}^N$ telle que $T_0 = 0 < T_1 < \dots < T_N = T$ et

$$\frac{1}{r}(T_{i+1} - T_i) + \frac{1}{\bar r} \int_{T_i}^{T_{i+1}} \|\nabla v(\tau)\|^{\bar r}_{L^\infty} d\tau \simeq C\alpha(r,s) \overset{déf}{=} c_2 = C_2^{-1}. \tag{2.62}$$

Remarquons que l'inégalité (2.56) nous oblige à travailler normalement sous la condition

$$\big(T_{i+1} - T_i\big)^{\frac{1}{r}} \Big(\int_{T_i}^{T_{i+1}} \|\nabla v(\tau)\|^{\bar r}_{L^\infty} d\tau\Big)^{\frac{1}{\bar r}} \leq c_2. \tag{2.63}$$

Mais cette dernière découle de la première grâce à l'inégalité de convexité suivante, qui dit que pour tous les réels positifs a et b et pour tout $\theta \in]0,1[$

$$ab \leq \theta a^{\frac{1}{\theta}} + (1-\theta) b^{\frac{1}{1-\theta}}.$$

Nous avons opter pour (2.62) parce qu'elle permet d'expliciter sans peine le nombre N. Pour l'estimer, on somme sur i les égalités (2.62) et l'on trouve

$$N \simeq C_2\Big(\frac{T}{r} + \frac{1}{\bar r} V^{\bar r}_{\bar r}(t)\Big). \tag{2.64}$$

La réduction que nous venons de justifier est valable uniquement pour les réels $r \in]1, +\infty]$. Dans le cas extrême correspondant à $r = 1$, nous privilégions la condition (2.63). Elle implique que

$$N = C_2 T \|\nabla v\|_{L^\infty_T L^\infty}.$$

Considérons tout d'abord le cas $r = +\infty$ et voyons comment itérer l'estimation (2.61). Dans ce cas particulier, on note C_2 par C_1 et que l'on peut prendre égale à $C/(1-s^2)$. Nous reproduisons dans l'intervalle $[T_i, T_{i+1}]$ la preuve que nous venons d'exposer sauf qu'au lieu de travailler avec le flot ψ_q nous devons utiliser le flot qui fixe les points de l'espace à l'instant T_i. Alors nous obtenons sous la condition (2.62) une estimation semblable à (2.61), qui dit qu'il existe une constante C dépendant uniquement de d telle que pour tout réel $t \in [T_i, T_{i+1}]$

$$\|a(t)\|_{B^s_p} \leq C\Bigg(\|a(T_i)\|_{B^s_p} + \int_{T_i}^t \Big(\|F(\tau)\|_{B^s_p} + \nu\|G(\tau)\|_{B^{s-2}_p}\Big)d\tau + \|G\|_{L^\infty([T_i,\,t];\,B^{s-2}_p)}\Bigg). \quad (2.65)$$

En posant $\bar{a}_i = \|a(T_i)\|_{B^s_p}$, nous déduisons de (2.65) que

$$\begin{cases} \bar{a}_{i+1} \leq C\Bigg(\bar{a}_i + \displaystyle\int_{T_i}^{T_{i+1}} \Big(\|F(\tau)\|_{B^s_p} + \nu\|G(\tau\|_{B^{s-2}_p}\Big)d\tau + \|G\|_{L^\infty([T_i,\,T_{i+1}];\,B^{s-2}_p)}\Bigg), i = 0,..,N-1. \\ \bar{a}_0 = \|a_0\|_{B^s_p}. \end{cases}$$

Posons $H(\tau) = \|F(\tau)\|_{B^s_p} + \nu\|G(\tau)\|_{B^{s-2}_p}$. Ainsi en développant un raisonnement par récurrence nous établissons que

$$\bar{a}_N \leq C^N\Big(\bar{a}_0 + \|G\|_{L^\infty([0,T];\,B^{s-2}_p)}\Big) + \sum_{i=0}^{N-1} C^{N-i}\int_{T_i}^{T_{i+1}} H(\tau)d\tau. \quad (2.66)$$

Nous pouvons déduire à partir de la relation (2.66) l'existence d'une constante $\bar{C}$ ne dépendant que de s telle qu'on ait

$$\sum_{k=0}^{N-1} C^{N-i-1}\int_{T_i}^{T_{i+1}} H(\tau)d\tau \leq e^{\bar{C}V(T)}\int_0^T e^{-\bar{C}V(\tau)}H(\tau)d\tau. \quad (2.67)$$

En effet, on décompose l'intégrale du membre de droite comme une somme d'intégrales admettant pour bornes T_i et T_{i+1} :

$$\begin{aligned} \int_0^T e^{-\bar{C}V(\tau)}H(\tau)d\tau &= \sum_{i=0}^{N-1}\int_{T_i}^{T_{i+1}} e^{-\bar{C}V(\tau)}H(\tau)d\tau \\ &\geq \sum_{i=0}^{N-1} e^{-\bar{C}c_1(i+1)}\int_{T_i}^{T_{i+1}} H(\tau)d\tau. \end{aligned}$$

Notons que nous avons utilisé dans l'inégalité ci-dessus le fait que $V(T_i) \simeq c_1 i$. Nous rappelons que $c_1 = C_1^{-1}$ est la valeur de c_2 donnée par (2.62) quand $r = +\infty$. Donc nous aurons pour tout réel $\tau \in [T_i, T_{i+1}]$,

$$e^{-\bar{C}V(\tau)} \geq e^{-\bar{C}c_1(i+1)}.$$

En conséquence, nous aurons

$$e^{\bar{C}V(T)}\int_0^T e^{-\bar{C}V(\tau)}H(\tau)d\tau \geq \sum_{i=0}^{N-1} e^{\bar{C}c_1(N-i-1)}\int_{T_i}^{T_{i+1}} H(\tau)d\tau.$$

Par suite, la constante $\bar{C} = \frac{\ln C}{c_1} = C_1 \ln C$ convient dans (2.67) et l'on trouve pour tout t positif

$$\|a(t)\|_{B_p^s} \leq C_1 e^{C_1 V(t)}\Big(\|a^0\|_{B_p^s} + \|G\|_{L_t^\infty B_p^{s-2})} + \int_0^t e^{-C_1 V(\tau)}H(\tau)d\tau\Big). \qquad (2.68)$$

Ce qui achève la preuve du premier point (1) du théorème 2.2.1.

Si on suppose que F appartient à l'espace $\widetilde{L}^1_{loc}(\mathbb{R}_+;\, B_p^s)$, alors nous obtenons sur chaque intervalle $[T_i, T_{i+1}]$ une estimation similaire à (2.60) qui prend la forme suivante : Pour tout $t \in [T_i,T_{i+1}]$, on a

$$\|a(t)\|_{B_p^s} \leq C\bigg(\|a(T_i)\|_{B_p^s} + \|F\|_{\widetilde{L}^1([T_i,\,t];\,B_p^s)} + \|G\|_{L^\infty([T_i,\,t],B_p^{s-2})} + \nu\int_{T_i}^t \|G(\tau)\|_{B_p^{s-2}}d\tau\bigg). \quad (2.69)$$

En reproduisant la démarche de globalisation que nous venons de détailler, nous aboutissons à

$$\begin{aligned}\|a(T)\|_{B_p^s} \;&\leq\; C_1 e^{C_1 V(T)}\left(\|a^0\|_{B_p^s} + \|G\|_{L_T^\infty B_p^{s-2}} + \|F\|_{\widetilde{L}_T^1 B_p^s} + \int_0^T e^{-C_1 V(\tau)}\nu\|G(\tau)\|_{B_p^{s-2}}d\tau\right)\\ &\leq\; C_1 e^{C_1 V(T)}\left(\|a^0\|_{B_p^s} + (1+\nu T)\|G\|_{L_T^\infty B_p^{s-2}} + \|F\|_{\widetilde{L}_T^1 B_p^s}\right). \qquad (2.70)\end{aligned}$$

En ce qui concerne les estimations dans l'espace $\widetilde{L_t^r}B_p^s$, nous obtenons dans l'intervalle $[T_i, T_{i+1}]$ une estimation analogue à (2.57). Plus précisément , nous aurons pour tout $t \in [T_i, T_{i+1}]$

$$\begin{aligned}\nu^{\frac{1}{r}}\|a\|_{\widetilde{L^r}([T_i,\,t];\,B_p^{s+\frac{2}{r}})} \;&\leq\; C\big(1+(\nu(t-T_i))^{\frac{1}{r}}\big)\Big(\|a(T_i)\|_{B_p^s} + \|F\|_{\widetilde{L^r}([T_i,\,t];\,B_p^s)}\Big)\\ &+\; C\big(1+\nu(t-T_i)\big)\nu^{\frac{1}{r}}\|G\|_{\widetilde{L_t^r}B_p^{s+\frac{2}{r}-2}}. \qquad (2.71)\end{aligned}$$

Nous voudrons recoller ces estimations sur l'intervalle de temps $[0,T]$. Pour cela nous aurons besoin du résultat suivant qui s'obtient facilement à l'aide de l'inégalité triangulaire : on se donne un espace normé E et une partition $(T_i)_0^N$ de l'intervalle $[0,T]$. Alors pour toute famille de fonctions $(f_q) \in L^r([0,T];\, E)$ nous avons

$$\sup_q \|f_q\|_{L^r([0,T];\,E)} \leq \sum_{i=0}^{N-1}\sup_q \|f_q\|_{L^r([T_i,\,T_{i+1}];\,E)} \leq N\sup_q \|f_q\|_{L^r([0,T];\,E)}.$$

Il suffit maintenant d'appliquer ce résultat pour déduire à partir de (2.71) et (2.70) que

$$\begin{aligned}\nu^{\frac{1}{r}}\|a\|_{\widetilde{L_T^r}B_p^{s+\frac{2}{r}}} \;&\leq\; C\big(1+(\nu T)^{\frac{1}{r}}\big)\Big(\sum_{i=0}^{N-1}\|a(T_i)\|_{B_p^s} + N\|F\|_{\widetilde{L_T^1}B_p^s}\Big)\\ &+\; C(1+\nu T)N\nu^{\frac{1}{r}}\|G\|_{\widetilde{L_T^r}B_p^{s+\frac{2}{r}-2}},\\ &\leq\; C_1 N e^{C_1 V(T)}\big(1+(\nu T)^{\frac{1}{r}}\big)\Big(\|a^0\|_{B_p^s} + \|F\|_{\widetilde{L_T^1}B_p^s}\Big)\\ &+\; C_1 N\Big(\nu^{\frac{1}{r}}\|G\|_{\widetilde{L_T^r}B_p^{s+\frac{2}{r}-2}} + e^{C_1 V(T)}\big(1+(\nu T)^{\frac{1}{r}}\big)\|G\|_{L_T^\infty B_p^{s-2}}\Big). \qquad (2.72)\end{aligned}$$

Pour enfin conclure et obtenir l'estimation désirée, il suffit de remplacer N par sa valeur qui est fournie par (2.64).

2.4.3 Preuve du lemme de commutation

Nous allons faire usage le long de cette preuve du calcul paradifférentiel introduit par J.-M. Bony dans [4]. Tout d'abord nous faisons remarquer que le terme $R_q(v,a)$ est donné par la relation

$$\Delta_q(v\cdot\nabla a)=S_{q-1}v\cdot\nabla a_q+R_q(v,a). \tag{2.73}$$

D'une manière plus précise, il se décompose comme suit

$$R_q(v,a)=\sum_{l=1}^{4}R_q^l(v,a),$$

où l'on a posé

$$\begin{aligned}
R_q^1(v,a) &= \sum_{k=1}^{d}\Delta_q(T_{\partial_k a}v^k),\\
R_q^2(v,a) &= -\sum_{k=1}^{d}[T_{v^k}\partial_k,\Delta_q]a,\\
R_q^3(v,a) &= \sum_{k=1}^{d}T_{(v^k-S_{q-1}v^k)}\partial_k\Delta_q a,\\
R_q^4(v,a) &= \sum_{k=1}^{d}\Delta_q R(v^k,\partial_k a)-R(S_{q-1}v^k,\Delta_q\partial_k a).
\end{aligned}$$

En effet la décomposition de Bony produit $v\cdot\nabla a$ donne

$$v\cdot\nabla a=\sum_{k=1}^{d}T_{v^k}\partial_k a+T_{\partial_k a}v^k+R(v^k,\partial_k a).$$

En appliquant l'opérateur Δ_q à l'équation ci-dessus, on obtient

$$\begin{aligned}
\Delta_q(v\cdot\nabla a) &= \sum_{l=1}^{2}R_q^l(v,a)+\sum_{k=1}^{d}T_{v^k}\partial_k\Delta_q a+\Delta_q R(v^k,\partial_k a),\\
&= \sum_{l=1}^{3}R_q^l(v,a)+\sum_{k=1}^{d}S_{q-1}v^k\partial_k\Delta_q a-T_{\partial_k\Delta_q a}S_{q-1}v^k\\
&- R(S_{q-1}v^k,\partial_k\Delta_q a)+\Delta_q R(v^k,\partial_k a),\\
&= \sum_{l=1}^{4}R_q^l(v,a)+S_{q-1}v\cdot\nabla a_q-\sum_{k=1}^{d}T_{\partial_k\Delta_q a}S_{q-1}v^k.
\end{aligned}$$

D'un autre côté, nous avons par définition du paraproduit

$$T_{\partial_k\Delta_q a}S_{q-1}v^k=\sum_j S_{j-1}\partial_k\Delta_q a\,\Delta_j S_{q-1}v^k.$$

Vu que $\Delta_q\Delta_{q'}$ est l'opérateur nul si $|q'-q|\geq 2$, alors il est immédiat que les deux termes du produit figurant dans la somme ne peuvent pas être simultanément non nuls. En conséquence la somme est nulle. Ce qui achève la preuve de l'inégalité (2.73).

ESTIMATION DE $R^1_q(v,a)$: Comme la transformée de Fourier de $S_{q'-1}\partial_k a\Delta_{q'}v^k$ est supportée dans une couronne de taille $2^{q'}$ alors on ne tiendra compte dans la décomposition de $R^1_q(v,a)$ que d'un nombre fini de termes et l'on écrit

$$R^1_q(v,a)=\sum_{k=1}^{d}\sum_{|q'-q|\leq M_0}\Delta_q\big(S_{q'-1}\partial_k a\,\Delta_{q'}v^k\big).$$

Nous signalons que cette somme porte sur les entiers q' positif, sinon $S_{q'-1}$ est nul. Ceci permet grâce au lemme de Bernstein d'avoir

$$\|S_{q'-1}\partial_k a\,\Delta_{q'}v^k\|_{L^p}\leq C\|\nabla v\|_{L^\infty}2^{-q'}\sum_{j\leq q'-2}2^j\|\Delta_j a\|_{L^p}.$$

Ainsi, comme $|q-q'|\leq M_0$, alors on aura pour tout entier $q\geq -1$

$$\|R^1_q(v,a)\|_{L^p}\leq C\|\nabla v\|_{L^\infty}\sum_{j\geq -1}2^{-|j-q|}\|\Delta_j a\|_{L^p}.$$

ESTIMATION DE $R^2_q(v,a)$: Nous avons par définition du paraproduit et grâce à la commutation des opérateurs Δ_q entre eux

$$\begin{aligned}R^2_q(v,a) &= \sum_{k=1}^{d}\sum_{q'}[S_{q'-1}v^k\partial_k\Delta_{q'},\Delta_q]a,\\ &= \sum_{k=1}^{d}\sum_{q'}[S_{q'-1}v^k\partial_k,\Delta_q]\Delta_{q'}a\end{aligned}$$

La somme est en fait finie. Elle ne concerne que les indices q' vérifiant $|q'-q|\leq M_0$. Ceci est dû, d'une part, à la localisation du support de la transformée de Fourier de $S_{q'-1}v^k\Delta_{q'}\partial_k a$ dans une couronne de taille $2^{q'}$ et d'autre part au fait que $\Delta_q\Delta_{q'}\equiv 0$, si $|q'-q|\geq 2$. Maintenant occupons-nous de la majoration du commutateur qui nous permettra de gagner une dérivée. Pour s'en rendre compte, nous écrivons l'opérateur Δ_q comme une intégrale de convolution :

$$\begin{aligned}\big\|[S_{q'-1}v^k\partial_k,\Delta_q]\Delta_{q'}a(x)\big\|_{L^p} &= 2^{qd}\Big\|\int h(2^q(x-y))\big(S_{q'-1}v^k(x)-S_{q'-1}v^k(y)\big)\Delta_{q'}\partial_k a(y)dy\Big\|_{L^p},\\ &\leq C2^{-q}\|\nabla S_{q'-1}v\|_{L^\infty}\|\Delta_{q'}\partial_k a\|_{L^p},\\ &\leq C\|\nabla v\|_{L^\infty}2^{q'-q}\|\Delta_{q'}a\|_{L^p}. \qquad (2.74)\end{aligned}$$

En conséquence, nous aurons l'estimation

$$\|R^2_q(v,a)\|_{L^p}\leq C\|\nabla v\|_{L^\infty}\sum_{|q'-q|\leq M_0}2^{-|q'-q|}\|\Delta_{q'}a\|_{L^p}. \qquad (2.75)$$

Estimation de $R_q^3(v,a)$: Par définition du paraproduit, nous avons

$$R_q^3(v,a)=\sum_{k=1}^{d}\sum_{|q'-q|\leq 1}S_{q'-1}(v^k-S_{q-1}v^k)\Delta_{q'}\partial_k\Delta_q a.$$

Par suite pour tout entier $q\geq 1$, nous pouvons écrire par l'intermédiaire du lemme de Bernstein

$$\begin{aligned}\|S_{q'-1}(v^k-S_{q-1}v^k)\|_{L^\infty} &\leq \sum_{j\geq q-1}\|\Delta_j v\|_{L^\infty},\\ &\leq C2^{-q}\|\nabla v\|_{L^\infty}.\end{aligned}$$

Ce qui nous assure dans ce cas la majoration souhaitée.

Estimation de $R_q^4(v,a)$: Nous commençons par décomposer ce terme de la manière suivante

$$R_q^4(v,a)=R_q^{4,1}(v,a)+R_q^{4,2}(v,a),$$

avec

$$\begin{aligned}R_q^{4,1}(v,a) &= \sum_{k=1}^{d}\Delta_q R(v^k-S_{q-1}v^k,\partial_k a),\\ R_q^{4,2}(v,a) &= \sum_{k=1}^{d}\Delta_q R(S_{q-1}v^k,\partial_k a)-R(S_{q-1}v^k,\Delta_q\partial_k a).\end{aligned}$$

Par définition du reste et grâce à la condition de divergence nulle du champ de vecteurs v, nous pouvons écrire

$$R_q^{4,1}(v,a)=\sum_{k=1}^{d}\Delta_q\partial_k\sum_{\substack{q'\geq q-M_0\\ i\in\{\mp 1,0\}}}\Delta_{q'}(\mathrm{Id}-S_{q-1})v^k\Delta_{q'+i}a. \tag{2.76}$$

Comme pour tout $q\geq 1$ le terme $(\mathrm{Id}-S_{q-1})v^k$ ne possède pas de basses fréquences, alors le lemme de Bernstein nous permet d'assurer l'estimation

$$\begin{aligned}\|\Delta_{q'}(\mathrm{Id}-S_{q-1})v^k\|_{L^\infty} &= \Big\|\sum_{\substack{|q'-j|\leq 1\\ j\geq q-1}}\Delta_{q'}\Delta_j v^k\Big\|_{L^\infty},\\ &\leq C2^{-q'}\|\nabla v\|_{L^\infty}.\end{aligned}$$

En reportant cett inégalité dans (2.76), nous obtenons suite à une estimation L^p

$$\|R_q^{4,1}(v,a)\|_{L^p}\leq C\|\nabla v\|_{L^\infty}2^q\sum_{q'\geq q-M_0}2^{-q'}\|\Delta_{q'}a\|_{L^p}.$$

Concernant le terme $R_q^{4,2}(v,a)$, il sera traité comme le terme $R_q^2(v,a)$. Nous avons grâce à la condition div $S_{q-1}v=0$,

$$\begin{aligned}R_q^{4,2}(v,a) &= \sum_{\substack{q'\geq q-M_0\\ i\in\{\mp 1,0\}}}[\Delta_q,\Delta_{q'}S_{q-1}v^k]\Delta_{q'+i}\partial_k a=R_{q,1}^{4,2}(v,a)+R_{q,2}^{4,2}(v,a),\\ &= \sum_{\substack{|q'-q|\leq M_0\\ i\in\{\mp 1,0\}}}[\Delta_q,\Delta_{q'}S_{q-1}v^k]\Delta_{q'+i}\partial_k a+\sum_{\substack{q'>q+M_0\\ i\in\{\mp 1,0\}}}\Delta_q\partial_k(\Delta_{q'}S_{q-1}v^k\Delta_{q'+i}a).\end{aligned}$$

Signalons que la condition $\Delta_q\Delta_{q'+i}a = 0$ si $|q'-q| \geq 3$ justifie bien l'expression figurant dans la dernière somme. En utilisant une démarche analogue à celle qu'on a employée dans l'estimation de R_q^2, on obtient

$$\|R_{q,1}^{4,2}(v,a)\|_{L^p} \leq C\|\nabla v\|_{L^\infty} \sum_{\substack{|q'-q|\leq M_0 \\ i\in\{\mp 1,0\}}} 2^{q'-q}\|\Delta_{q'+i}a\|_{L^p}.$$

La deuxième somme se majore comme suit

$$\begin{aligned}\|R_{q,2}^{4,2}(v,a)\|_{L^p} &\leq C2^q \sum_{\substack{q'>q+M_0 \\ i\in\{\mp 1,0\}}} \|\Delta_{q'}v\|_{L^p}\|\Delta_{q'+i}a\|_{L^p}, \\ &\leq C\|\nabla v\|_{L^\infty} \sum_{q'\geq q+M_0-1} 2^{q-q'}\|\Delta_{q'}a\|_{L^p}.\end{aligned}$$

Ceci achève la preuve du lemme 2.4.1. ■

2.5 Application aux poches de tourbillon höldériennes

Ce paragraphe est dédié à l'étude des poches de tourbillon visqueuses à bord höldérien. Nous montrerons que la perte de la régularité höldérienne mentionnée dans [13] n'est qu'un fait apparent. En d'autres termes, nous allons prouver que dans le cadre du système de Navier-Stokes, si l'on part d'une poche de tourbillon $\omega^0 = \mathbf{1}_\Omega$ de bord $C^{1+\epsilon}$, alors son transporté par le flot visqueux reste en tout temps de classe $C^{1+\epsilon}$. Ceci apparaît comme un cas particulier d'un résultat général de persistance des structures géométriques des poches de tourbillon généralisées. Nous insistons sur le fait que la proposition 2.2.1 et le théorème 2.2.1 constituent les deux piliers de la preuve. Ce sont justement les deux nouvelles informations que nous avons obtenues en tenant compte d'une part du fait que le tourbillon est plus régulier qu'on l'attend et d'autre part du fait que le flot n'est pas quelconque mais il préserve la mesure de Lebesgue. Nous montrerons également des résultats de convergence non visqueuse des structures géométriques. Cela est axé sur un contrôle uniforme en ν de la norme lipschitzienne du champ de vitesse v_ν. Avant de fournir nos principaux résultats en cette matière, nous allons d'abord rappeler quelques concepts de base suivis d'une estimation logarithmique du gradient de la vitesse.

2.5.1 Outils préliminaires

L'objet de ce paragraphe est d'introduire les espaces de Hölder anisotropes construits à partir d'une famille donnée de champs de vecteurs. L'utilité de ces espaces se révèle lorsqu'on aspire à un contrôle lipschitzien de la vitesse, dans le cas de faible régularité, comme le montrera le théorème 2.5.1.

Définition 2.5.1. *Soit $X = (X_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ une famille de champs de vecteurs tels qu'ils sont avec leurs divergence dans la classe de Hölder C^ϵ. Cette famille est dite admissible si et seulement si, on a*

$$I(X) = \inf_{x\in\mathbb{R}^d}\sup_{\lambda\in\Lambda}\big|X_\lambda(x)\big| > 0.$$

On note

$$\widetilde{\|}X_\lambda\|_{C^\epsilon} = \|X_\lambda\|_{C^\epsilon} + \|\mathrm{div}X_\lambda\|_{C^\epsilon}.$$

Nous définissons l'action de cette famille sur une distribution u appartenant à L^∞ par:

$$\forall\, \lambda \in \Lambda,\ X_\lambda(x,D)u = \operatorname{div}(uX_\lambda) - u\,\operatorname{div}X_\lambda.$$

Nous allons maintenant introduire la notion d'espace de Hölder non isotrope modelé sur une famille de champs de vecteurs X.

Définition 2.5.2. *Soit X une famille admissible de champs de vecteurs tels qu'ils sont avec leurs divergence dans C^ϵ. On note par $C^\epsilon(X)$ l'espace des distributions tempérées u, bornées sur $\mathbb{R}^d$ et telles que,*

$$\forall\, \lambda \in \Lambda,\ X_\lambda(x,D)u \in C^{\epsilon-1} \quad \text{et} \quad \sup_{\lambda\in\Lambda} \|X_\lambda(x,D)u\|_{C^{\epsilon-1}} < +\infty.$$

La norme correspondante est définie par

$$\|u\|_{C^\epsilon(X)} = \frac{1}{I(X)}\Big(\|u\|_{L^\infty} \sup_{\lambda\in\Lambda} \widetilde{\|}X_\lambda\|_{C^\epsilon} + \sup_{\lambda\in\Lambda}\|X_\lambda(x,D)u\|_{C^{\epsilon-1}}\Big).$$

Cette notion de régularité stratifiée est d'une si grande importance dans l'étude des poches höldériennes. En effet, J.-Y. Chemin établit dans [6] une estimation logarithmique stationnaire : elle montre que le contrôle des dérivées directionnelles du tourbillon le long des champs (X_λ) dans un espace de Hölder d'indice négatif permet de récupérer un contrôle logarithmique de la norme Lipschitz de v :

Théorème 2.5.1. *Il existe une constante $C > 0$ telle que, pour tout $\epsilon \in]0,1[$ et pour tout $a > 1$, on a la propriété suivante :*
Soit X une famille admissible de champs de vecteurs tels qu'ils sont avec leur divergence dans l'espace C^ϵ. Considérons une fonction ω appartenant à $C^\epsilon(X)\cap L^a$. Si v est un champ de vecteurs de divergence nulle et de tourbillon ω, alors il est lipschitzien et vérifie

$$\|\nabla v\|_{L^\infty} \leq C\Big(a\|\omega\|_{L^a} + \frac{\|\omega\|_{L^\infty}}{\epsilon}\log\Big(e + \frac{\|\omega\|_{C^\epsilon(X)}}{\epsilon\|\omega\|_{L^\infty}}\Big)\Big). \tag{2.77}$$

2.5.2 Principaux résultats

Nous allons à travers la proposition suivante décrire l'évolution d'un champ de vecteurs tangent par le flot. La preuve se fait à l'aide d'un simple calcul de dérivation.

Proposition 2.5.1. *Soit v un champ de vecteurs lipschitzien et ψ le flot correspondant. Prenons une famille $X_0 = (X_{0,\lambda})_{\lambda\in\Lambda}$ de champs de vecteurs appartenant à C^ϵ. Alors, le champ de vecteurs $X_t = \big(X_{t,\lambda}\big)_{\lambda\in\Lambda}$, défini par*

$$X_{t,\lambda}(x) = \psi_\star(t)X_{0,\lambda} = \big(X_{0,\lambda}(x,D))\psi(t)\big)\big(\psi^{-1}(t,x)\big),$$

satisfait l'équation

$$\big(\partial_t + v\cdot\nabla\big)X_{t,\lambda} = X_{t,\lambda}(x,D)v. \tag{2.78}$$

Le transporté par le flot visqueux sera noté X_t^ν.

Remarque : L'utilité de l'application $\psi_\star(t)$ est qu'elle envoie un champ de vecteurs tangent à une courbe γ en un champ de vecteurs tangent à $\psi(t,\gamma)$.

Maintenant, il est temps de fournir notre résultat principal portant sur les poches de tourbillon généralisées, c'est-à-dire, appartenant à l'espace anisotrope $C^\epsilon(X)$. Il permet en particulier d'obtenir la propagation de la régularité stratifiée dans les espaces de Hölder généralisant ainsi le théorème 1.2 de [13].

Théorème 2.5.2. *Soient $0 < \epsilon < 1, a > 1$ et X_0 une famille admissible de champs de vecteurs. On se donne un champ de vecteurs v^0 à coefficients dans C^1_* et de divergence nulle. On suppose en outre que $\nabla v^0 \in L^a$ et que son tourbillon $\omega^0 \in C^\epsilon(X_0)$. Alors, $\forall \nu \geq 0$, (NS_ν) possède une unique solution v_ν dans $L^\infty_{loc}(\mathbb{R}_+; \mathrm{Lip}(\mathbb{R}^2))$. Plus précisément, il existe une constante C ne dépendant que de ϵ, ω^0 et X_0 telle que,*

$$\begin{aligned} \|\nabla v_\nu(t)\|_{L^\infty} &\leq C(1+\nu)e^{Ct} \\ \|X_{0,\lambda}(x,D)\psi_\nu(t)\|_{C^\epsilon} + \|\omega_\nu(t)\|_{C^\epsilon(X_t^\nu)} &\leq Ce^{C\left(\nu t+1\right)\exp Ct}. \end{aligned}$$

De plus, lorsque la viscosité ν tend vers zéro, alors v_ν tend vers v et $\psi_\nu - Id$ tend vers $\psi - Id$ dans l'espace $L^\infty_{loc}(\mathbb{R}_+; C^\alpha)$ pour tout $\alpha < 1$. En outre, si $\epsilon' < \epsilon$ alors $X_{0,\lambda}(x,D)\psi_\nu, X^\nu_{t,\lambda}$ et $\mathrm{div}\, X^\nu_{t,\lambda}$ convergent respectivement vers $X_{0,\lambda}(x,D)\psi, X_{t,\lambda}$ et $\mathrm{div}\, X_{t,\lambda}$ dans $L^\infty_{loc}(\mathbb{R}_+; C^{\epsilon'})$, uniformément en λ.

Voyons comment peut-on déduire le théorème 2.1.1 à partir du théorème 2.5.2. Pour commencer, nous allons construire à partir de la donnée d'un ouvert borné de classe $C^{1+\epsilon}$, une famille admissible X_0, telle que $\omega^0 = 1_\Omega \in C^\epsilon(X_0)$. Par définition d'un bord de classe $C^{1+\epsilon}$, il existe une fonction $f_0 \in C^{1+\epsilon}(\mathbb{R}^2)$ telle que $\partial\Omega$ coïncide dans un de ses voisinages V avec l'ensemble des zéros de f_0 et dont le gradient ne s'annule pas dans V. Soit α une fonction régulière supportée dans V et valant 1 dans un petit voisinage de $\partial\Omega$. On pose

$$X_{0,0} = \nabla^\perp f_0 \quad \text{et} \quad X_{0,1} = (1-\alpha)\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Une simple vérification montre que la famille de champs de vecteurs $(X_{0,i})_{i=0}^2$ est admissible. De plus, $X_{0,i}(x,D)\omega^0 = 0$. Considérons maintenant un point $x_0 \in \partial\Omega$ et définissons la courbe γ^0 par l'équation différentielle ordinaire

$$\begin{cases} \partial_\sigma \gamma^0(\sigma) = \nabla^\perp f_0(\gamma^0(\sigma)) \\ \gamma^0(0) = x_0. \end{cases}$$

Il est facile de voir que γ^0 appartient à $C^{1+\epsilon}(\mathbb{R},\mathbb{R}^2)$ et qu'elle est une paramétrisation régulière de $\partial\Omega$. Soit $\gamma_\nu(t)$ le bord du transporté de Ω par le flot visqueux $\psi_\nu(t)$. Alors en différentiant l'égalité $\gamma_\nu(t) = \psi_\nu(t) \circ \gamma^0$, on montre que

$$\partial_\sigma \gamma_\nu(t,\sigma) = \big(X_{0,0}(x,D)\psi_\nu\big)(t, \gamma^0(\sigma)).$$

Comme le théorème 2.5.2 implique que $X_{0,0}(x,D)\psi_\nu$ appartient à $L^\infty_{loc}(\mathbb{R}_+; C^\epsilon)$, alors on en déduit que $\gamma_\nu(t)$ appartient à $L^\infty_{loc}(\mathbb{R}_+; C^{1+\epsilon})$. D'autre part, la matrice jacobienne de $\psi_\nu(t)$ est inversible. En conséquence $X_{0,0}(x,D)\psi_\nu(t)$ ne s'annule pas sur V. Ainsi on en déduit que la courbe $\gamma_\nu(t)$ est une paramétrisation régulière de $\partial\Omega_\nu(t)$. Les résultats de limite non visqueuse se déduisent sans peine à partir de ceux du théorème 2.5.2. Le point crucial est justement l'uniformité des estimations par rapport à ν. ■

La preuve du théorème 2.5.2 est fondée essentiellement sur la proposition ci-après dont on envisage de fournir sa preuve et le reste de la démonstration du théorème 2.5.2 s'achève de façon identique à celle du théorème 1.2 que l'on retrouve dans [13].

Proposition 2.5.2. *Soient $0<\epsilon<1, a>1$ et $X_0=(X_{0,\lambda})_\lambda$ une famille admissible de champs de vecteurs. On suppose que v_ν est une solution de (NS_ν) appartenant à $L^\infty_{loc}(\mathbb{R}_+;\ C^\infty_b(\mathbb{R}^2))$ et que son tourbillon est dans $L^\infty_{loc}(\mathbb{R}_+;\ L^a\cap L^\infty)$. Alors, le transporté X^ν_t de X_0 par le flot visqueux ψ_ν est admissible pour tout temps positif t. De plus, il existe une constante C ne dépendant que de la dimension telle que*

$$\begin{aligned}\|\nabla v_\nu(t)\|_{L^\infty} &\leq (C_{0,\epsilon}+\nu)\exp\Big(C_\epsilon\|\omega^0\|_{L^\infty}\,t\Big)\ ;\\ I(X^\nu_0) &\geq I(X_0)\exp\Big(-(C_{0,\epsilon}+\nu)t\,e^{C_\epsilon\|\omega^0\|_{L^\infty}\,t}\Big)\ ;\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Gamma(t)\overset{déf}{=}\|X_{0,\lambda}(x,D)\psi_\nu(t)\|_{C^\epsilon} &+ \|\omega_\nu(t)\|_{C^\epsilon(X_{\nu,t})}\leq\Gamma(0)e^{C_\epsilon}\\ &\times\ \exp\Big((C_{0,\epsilon}+\nu)t\,e^{C_\epsilon\|\omega^0\|_{L^\infty}t}\Big);\end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned}C_\epsilon &= \frac{C}{\epsilon^3(1-\epsilon)}\log\frac{1}{\epsilon(1-\epsilon)}\quad et\\ C_{0,\epsilon} &= C\Bigg(C_\epsilon+a\|\omega^0\|_{L^a\cap L^\infty}+\epsilon^{-1}\|\omega^0\|_{L^\infty}\log\Big(e+\frac{\|\omega^0\|_{C^\epsilon(X_0)}}{\epsilon\|\omega^0\|_{L^\infty}}\Big)\Bigg).\end{aligned}$$

2.5.3 Démonstration de la proposition 2.5.2.

Le point le plus délicat dans la preuve est d'estimer convenablement la quantité $\|X_{t,\lambda}(x,D)\omega_\nu\|_{C^{\epsilon-1}}$ et c'est exactement dans cet endroit que l'effet régularisant et la propagation höldérienne sont décisifs. Lorsqu'on se place dans le cadre eulérien, alors $X_{t,\lambda}(x,D)\omega$ satisfait l'équation de transport

$$(\partial+v\cdot\nabla)X_{t,\lambda}(x,D)\omega=0.$$

Comme conséquence on peut propager facilement la régularité höldérienne sous réserve que le champ v soit lipschitzien et l'on obtient

$$\|X_{t,\lambda}(x,D)\omega\|_{C^{\epsilon-1}}\leq C\|X_{0,\lambda}(x,D)\omega^0\|_{C^{\epsilon-1}}\exp\Big(C_\epsilon\int_0^t\|\nabla v(\tau)\|_{L^\infty}d\tau\Big).$$

Pour plus de détails, on peut consulter le lemme 5.5.1 cité dans [6]. Par contre, dans le cadre visqueux la commutation des champs de vecteurs $\partial_t+v\cdot\nabla$ et $X_{t,\lambda}$ permet de dire que l'équation satisfaite par $X_{t,\lambda}(x,D)\omega_\nu$ est

$$(\partial_t+v_\nu\cdot\nabla-\nu\Delta)X_{t,\lambda}(x,D)\omega_\nu=-\nu[\Delta,X_{t,\lambda}(x,D)]\,\omega_\nu. \tag{2.79}$$

Dans ce qui suit nous omettons l'indice ν afin d'alléger les notations. Ainsi le problème qui surgit est de donner un sens au commutateur qui n'a *a priori* aucune raison d'exister vu que le laplacien consomme deux dérivées et le tourbillon est supposé juste borné. Cependant l'effet régularisant mis en évidence dans la proposition 2.2.1 nous permettra effectivement de montrer que le commutateur est presque pour tout temps dans l'espace $C^{\epsilon-1}$.

La preuve que nous allons exposer ici est tout d'abord locale en temps et nous verrons que sa globalisation et de même genre que celle de la proposition 2.2.1 et du théorème 2.2.1.

Estimation locale

En se servant du calcul paradifférentiel introduit par J.-M. Bony [4], nous aboutissons à la décomposition suivante :

$$\nu[\Delta, X_{t,\lambda}(x,D)]\,\omega = F + \nu\, G,$$

où l'on a posé

$$F = 2\nu\, R(\nabla X^i_{t,\lambda}, \partial_i \nabla\omega) + \nu R(\Delta X^i_{t,\lambda}, \partial_i\omega) \tag{2.80}$$

et

$$G = 2T_{\nabla X^i_{t,\lambda}} \partial_i\nabla\omega + 2T_{\partial_i\nabla\omega}\nabla X^i_{t,\lambda} + T_{\Delta X^i_{t,\lambda}}\partial_i\omega + T_{\partial_i\omega}\Delta X^i_{t,\lambda}. \tag{2.81}$$

Remarque : Nous avons utilisé la convention d'Einstein concernant la sommation sur les indices répétés.

Le lemme qu'on va énoncer fournit des estimations sur F et G. Il montre en particulier que l'intégration en temps des blocs dyadiques de F permet de compenser les dérivées consommées par le laplacien.

Lemme 2.5.1. *Soient ϵ un réel appartenant à $]0,1[$ et C_0 une constante positive. Alors pour tous les réels $0 \leq T_1 < T_2$ vérifiant*

$$\nu(T_2 - T_1) + \int_{T_1}^{T_2} \|\nabla v(t)\|_{L^\infty} dt \leq C_0 \tag{2.82}$$

et pour tout $t \in [T_1, T_2]$, on a

$$\sup_q 2^{q(\epsilon-1)} \int_{T_1}^{t} \|\Delta_q F(\tau)\|_{L^\infty} d\tau \leq \frac{CC_0}{\epsilon} \sup_{\tau\in[T_1,\,t]} \widetilde{\|}X_\lambda(\tau)\|_{C^\epsilon} \|\omega^0\|_{L^\infty}$$

et

$$\|G(t)\|_{C^{\epsilon-3}} \leq \frac{C}{1-\epsilon} \|X_\lambda(t)\|_{C^\epsilon} \|\omega^0\|_{L^\infty}.$$

La constante C qui figure dans ces estimations est universelle.

Démonstration

La preuve du premier point se démontre facilement à l'aide de la proposition 2.2.1. En effet, en appliquant l'opérateur de localisation en fréquence Δ_q à F et en utilisant les identités

$$R(\Delta X^i_{t,\lambda}, \partial_i\omega) = \partial_i R(\Delta X^i_{t,\lambda}, \omega) - R(\Delta \text{div} X, \omega) \quad \text{et}$$

$$R(\nabla X^i_{t,\lambda}, \nabla\partial_i\omega) = \partial_i R(\nabla X^i_{t,\lambda}, \nabla\omega) - R(\nabla \text{div} X_{t,\lambda}, \nabla\omega),$$

on trouve, après une intégration en temps et un usage du lemme de Bernstein,

$$\begin{aligned} 2^{q(\epsilon-1)} \int_{T_1}^{t} \|\Delta_q F(\tau)\|_{L^\infty} d\tau \;&\leq\; C 2^{q(\epsilon-1)} 2^q \sum_{\substack{j\geq q-N_0 \\ i\in\{\mp 1,0\}}} \nu 2^{2j} \int_{T_1}^{t} \|\Delta_{j+i} X_{\tau,\lambda}\|_{L^\infty} \|\Delta_j \omega(\tau)\|_{L^\infty} d\tau \\ &+\; C 2^{q(\epsilon-1)} \sum_{\substack{j\geq q-N_0 \\ i\in\{\mp 1,0\}}} \nu 2^{2j} \int_{T_1}^{t} \|\Delta_{j+i} \text{div} X_{\tau,\lambda}\|_{L^\infty} \|\Delta_j \omega(\tau)\|_{L^\infty} d\tau. \end{aligned}$$

En utilisant le fait que le champ $X_{t,\lambda}$ et sa divergence sont dans l'espace C^ϵ, d'indice strictement positif, et en se servant de l'inégalité (2.28) et de la condition (2.82), nous obtenons

$$
\begin{aligned}
2^{q(\epsilon-1)}\int_{T_1}^t \|\Delta_q F(t)\|_{L^\infty}dt &\leq C\|\omega^0\|_{L^\infty}\Big(1+\nu(t-T_1)+\int_{T_1}^t \|\nabla v(t)\|_{L^\infty}dt\Big)\\
&\times \sup_{\tau\in[T_1,t]} \widetilde{\|}X_\lambda(\tau)\|_{C^\epsilon}\sum_{j\geq q-N_0} 2^{(q-j)\epsilon}.
\end{aligned}
$$

Nous pouvons alors dériver facilement l'estimation du lemme à partir de cette forme. Concernant l'estimation de G, elle ne pose aucun problème significatif. Les paraproduits sont bien définis sous réserve que le tourbillon est borné et que $\epsilon<1$ et l'on obtient

$$
\|G(t)\|_{C^{\epsilon-3}}\leq \frac{C}{1-\epsilon}\|X_{t,\lambda}\|_{C^\epsilon}\|\omega(t)\|_{L^\infty}.
$$

Pour conclure, il suffit de recourir au principe du maximum qui implique $\|\omega(t)\|_{L^\infty}\leq\|\omega^0\|_{L^\infty}$. ■

Pour assurer en premier lieu une propagation locale nous allons prendre dans le lemme 2.5.1 la constante C_0 de manière à ce que la condition (2.62) soit respectée, avec $r=+\infty$. En d'autres termes, nous nous plaçons sous la condition

$$
\nu(T_2-T_1)+\int_{T_1}^{T_2}\|\nabla v(t)\|_{L^\infty}dt\leq c\,\epsilon(1-\epsilon)\overset{déf}{=}C_\epsilon^{-1}. \tag{2.83}
$$

avec c une constante que nous pouvons prendre aussi petite que l'on veut. Désormais, nous nous plaçons sous hypothèse (2.83). Estimons maintenant la norme de $X_{t,\lambda}(x,D)\omega(t)$. Pour ce faire, on utilise l'estimation (2.69) qui permet, via le lemme 2.5.1, de montrer que pour tout réel $t\in[T_1,T_2]$,

$$
\begin{aligned}
\|X_{t,\lambda}(x,D)\omega(t)\|_{C^{\epsilon-1}} &\leq C\Big(\|X_{T_1,\lambda}(x,D)\omega(T_1)\|_{C^{\epsilon-1}}+\|F\|_{\widetilde{L^1}([T_1,t];C^{\epsilon-1})}\\
&+ (1+\nu(t-T_1))\|G\|_{L^\infty([T_1,t];C^{\epsilon-3})}\Big) \\
&\leq \frac{C}{\epsilon(1-\epsilon)}\Big(\|X_{T_1,\lambda}(x,D)\omega(T_1)\|_{C^{\epsilon-1}}+\|\omega^0\|_{L^\infty}\sup_{\tau\in[T_1,t]}\widetilde{\|}X_\lambda(\tau)\|_{C^\epsilon}\Big).
\end{aligned} \tag{2.84}
$$

Dans ce qui suit, nous tâcherons de décrire la propagation höldérienne du champ de vecteurs $X_{t,\lambda}$. Pour cela, on s'appuit sur l'inégalité (2.65) et on se sert de la proposition 2.5.1. Alors, on parvient à établir l'existence d'une constante absolue C telle que pour tout $t\in[T_1,T_2]$

$$
\|X_\lambda(t)\|_{C^\epsilon}\leq C\Big(\|X_\lambda(T_1)\|_{C^\epsilon}+\int_{T_1}^t\|X_\lambda(x,D)v(\tau)\|_{C^\epsilon}d\tau\Big). \tag{2.85}
$$

Nous allons admettre l'inégalité qui suit. Pour plus de détails sur la preuve, on renvoie, par exemple, au lemme 3.3.2 de [6].

$$
\|X_{t,\lambda}(x,D)v\|_{C^\epsilon}\leq\frac{C}{\epsilon}\Big(\epsilon\|X_{t,\lambda}(x,D)\omega\|_{C^{\epsilon-1}}+\|\mathrm{div}X_{t,\lambda}\|_{C^\epsilon}\|\omega(t)\|_{L^\infty}+\|X_{t,\lambda}\|_{C^\epsilon}\|\nabla v(t)\|_{L^\infty}\Big). \tag{2.86}
$$

Par conséquent, en combinant (2.85) et (2.86) et en utilisant la condition (2.83), on trouve que pour tout $t \in [T_1,T_2]$

$$\begin{aligned}\|X_\lambda(t)\|_{C^\epsilon} &\leq C\Big(\|X_\lambda(T_1)\|_{C^\epsilon} + \int_{T_1}^t \Big(\|X_\lambda(x,D)\omega(\tau)\|_{C^\epsilon} + \epsilon^{-1}\|\omega^0\|_{L^\infty}\|\mathrm{div}X_\lambda(\tau)\|_{C^\epsilon}\Big)d\tau\Big)\\ &+ C\,c \sup_{T_1\leq\tau\leq t}\|X_\lambda(\tau)\|_{C^\epsilon}.\end{aligned}$$

Par suite, quitte à prendre c suffisamment petite dans (2.83), on trouve

$$\|X_\lambda(t)\|_{C^\epsilon} \leq C\Big(\|X_\lambda(T_1)\|_{C^\epsilon} + \int_{T_1}^t \Big(\|X_\lambda(x,D)\omega(\tau)\|_{C^\epsilon} + \epsilon^{-1}\|\omega^0\|_{L^\infty}\|\mathrm{div}X_\lambda(\tau)\|_{C^\epsilon}\Big)d\tau\Big) \quad (2.87)$$

Le contrôle de la quantité $\|\mathrm{div}X_{t,\lambda}\|_{C^s}$ ne pose pas de véritables problèmes. En effet, en prenant la divergence dans l'équation (2.78) et en se servant de l'incompressibilité du fluide, on montre que $\mathrm{div}X_{t,\lambda}$ vérifie l'équation de transport

$$(\partial_t + v\cdot\nabla)\mathrm{div}X_{t,\lambda} = 0.$$

Ainsi en appliquant l'estimation (2.65), on obtient

$$\|\mathrm{div}X_\lambda(t)\|_{C^\epsilon} \leq C\|\mathrm{div}X_\lambda(T_1)\|_{C^\epsilon}, \forall t\in[T_1,T_2]. \quad (2.88)$$

Soit t un réel positif. Posons

$$\Gamma(t) \stackrel{déf}{=} \widetilde{\|}X_\lambda(t)\|_{C^\epsilon} + \frac{\|X_\lambda(x,D)\omega(t)\|_{C^{\epsilon-1}}}{\|\omega^0\|_{L^\infty}}.$$

Alors en combinant les inégalités (2.84), (2.87) et (2.88), on aboutit pour tout $t\in[T_1,T_2]$ à

$$\Gamma(t) \leq \frac{C}{\epsilon^2(1-\epsilon)}\Big(\Gamma(T_1) + \int_{T_1}^t \Gamma(\tau)\|\omega^0\|_{L^\infty}d\tau\Big).$$

Donc nous aurons par l'intermédiaire du lemme de Gronwall et la définition (2.83)

$$\Gamma(t) \leq C_\epsilon\epsilon^{-1}\Gamma(T_1)\exp\Big(C_\epsilon\epsilon^{-1}\Big(\int_{T_1}^t \|\omega^0\|_{L^\infty}d\tau\Big). \quad (2.89)$$

Ceci achève la formulation locale de nos estimations. Occupons-nous dans le paragraphe suivant de leur extension à tout temps arbitrairement choisi dans $\mathbb{R}_+$.

Estimation globale

Soit T un réel positif. Partageons l'intervalle $[0,T]$ en une subdivision $(T_i)_{i=0}^{N-1}$ telle que

$$\nu(T_{i+1}-T_i) + \int_{T_i}^{T_{i+1}} \|\nabla v(t)\|_{L^\infty} \simeq c\,\epsilon(1-\epsilon) = C_\epsilon^{-1}.$$

Signalons qu'en faisant la somme de ces égalités, on trouve

$$i \simeq C_\epsilon\Big(1 + \nu T_i + \int_0^{T_i} \|\nabla v(\tau)\|_{L^\infty}d\tau\Big). \quad (2.90)$$

En appliquant l'inégalité (2.89) dans $[T_i, T_{i+1}]$, alors nous obtenons pour tout temps pris dans cet intervalle

$$\Gamma(t) \leq C_\epsilon \epsilon^{-1} \Gamma(T_i) \exp\left(C_\epsilon \epsilon^{-1}\Big(\int_{T_i}^t \|\omega^0\|_{L^\infty} d\tau\right). \tag{2.91}$$

Ainsi en itérant cette inégalité de proche en proche et en se servant de (2.90), on parvient à établir l'estimation

$$\Gamma(t) \leq \Gamma(0) \exp \widetilde{C}_\epsilon\Big(1 + \nu t + \int_0^t (\|\omega^0\|_{L^\infty} + \|\nabla v(\tau)\|_{L^\infty}) d\tau\Big), \tag{2.92}$$

où l'on a posé $\widetilde{C}_\epsilon = \frac{C}{\epsilon^2(1-\epsilon)} \log\left(\frac{1}{\epsilon(1-\epsilon)}\right)$.

Nous allons maintenant voir que l'estimation (2.92) permet de déduire, par le biais du théorème 2.5.1, un contrôle sur le gradient de la vitesse.

Estimation du gradient de la vitesse

En faisant une estimation rétrograde, on montre facilement que pour tout temps positif t,

$$I(X_t) \geq I(X_0) \exp\Big(-\int_0^t \|\nabla v(\tau)\|_{L^\infty}\Big).$$

Par suite, l'inégalité $\|\omega(t)\|_{L^\infty} \leq \|\omega^0\|_{L^\infty}$ à laquelle on associe l'estimation (2.92) donne

$$\begin{aligned}
\|\omega(t)\|_{C^\epsilon(X_t)} &\leq \frac{\|\omega^0\|_{L^\infty}}{I(X_0)} \Gamma(t) \exp \int_0^t \|\nabla v(\tau)\|_{L^\infty} d\tau \\
&\leq \frac{\Gamma(0)\|\omega^0\|_{L^\infty}}{I(X_0)} \exp \widetilde{C}_\epsilon\Big(1 + \nu t + \int_0^t (\|\omega^0\|_{L^\infty} + \|\nabla v(\tau)\|_{L^\infty}) d\tau\Big) \\
&\leq \|\omega^0\|_{C^\epsilon(X_0)} \exp \widetilde{C}_\epsilon\Big(1 + \nu t + \int_0^t (\|\omega^0\|_{L^\infty} + \|\nabla v(\tau)\|_{L^\infty}) d\tau\Big). \qquad (2.93)
\end{aligned}$$

Or d'après le théorème 2.5.1, on sait qu'il existe une constante C telle que pour tout $\epsilon \in]0,1[$, on ait

$$\|\nabla v(t)\|_{L^\infty} \leq C\left(a\|\omega(t)\|_{L^a} + \frac{\|\omega(t)\|_{L^\infty}}{\epsilon} \log\Big(e + \frac{\|\omega(t)\|_{C^\epsilon(X_t)}}{\epsilon\|\omega(t)\|_{L^\infty}}\Big)\right). \tag{2.94}$$

En reportant (2.93) dans (2.94) et en utilisant la monotonie de l'application de $x \to \log\left(e + \frac{a}{x}\right)$ on trouve

$$\begin{aligned}
\|\nabla v(t)\|_{L^\infty} &\leq C\Big(a\|\omega^0\|_{L^a} + \frac{\|\omega^0\|_{L^\infty}}{\epsilon} \log\Big(e + \frac{\|\omega^0\|_{C^\epsilon(X_0)}}{\epsilon\|\omega^0\|_{L^\infty}}\Big)\Big) \\
&+ \frac{\widetilde{C}_\epsilon}{\epsilon}\Big(1 + \nu t\|\omega^0\|_{L^\infty} + \|\omega^0\|_{L^\infty}^2 t + \|\omega^0\|_{L^\infty} \int_0^t \|\nabla v(\tau)\|_{L^\infty} d\tau\Big). \qquad (2.95)
\end{aligned}$$

Posons

$$C_{0,\epsilon} \stackrel{déf}{=} C\Big(\frac{\widetilde{C}_\epsilon}{\epsilon} + a\|\omega^0\|_{L^a \cap L^\infty} + \frac{\|\omega^0\|_{L^\infty}}{\epsilon} \log\Big(e + \frac{\|\omega^0\|_{C^\epsilon(X_0)}}{\epsilon\|\omega^0\|_{L^\infty}}\Big)\Big).$$

Alors une simple application du lemme de Gronwall permet d'avoir

$$\begin{aligned}\|\nabla v(t)\|_{L^\infty} &\leq \Big(C_{0,\epsilon}+\widetilde{C}_\epsilon\epsilon^{-1}\Big(\nu t\|\omega^0\|_{L^\infty}+\|\omega^0\|^2_{L^\infty}t\Big)\Big)\exp\Big(\widetilde{C}_\epsilon\epsilon^{-1}\|\omega^0\|_{L^\infty}t\Big)\\ &\leq \Big(C_{0,\epsilon}+\big(\nu+\|\omega^0\|_{L^\infty}\big)\Big)\exp\Big(\widetilde{C}_\epsilon\epsilon^{-1}\|\omega^0\|_{L^\infty}t\Big)\\ &\leq \Big(C_{0,\epsilon}+\nu\Big)\exp\Big(\widetilde{C}_\epsilon\epsilon^{-1}\|\omega^0\|_{L^\infty}t\Big).\end{aligned} \tag{2.96}$$

Par conséquent en remplaçant dans (2.92) le gradient de la vitesse par la majoration (2.96), on parvient à

$$\begin{aligned}\Gamma(t) &\leq \Gamma(0)\exp\widetilde{C}_\epsilon\left(1+\nu t+t\|\omega^0\|_{L^\infty}+\Big(\nu t+C_{0,\epsilon}t\Big)\exp\Big(\widetilde{C}_\epsilon\epsilon^{-1}\|\omega^0\|_{L^\infty}t\Big)\right)\\ &\leq e^{\widetilde{C}_\epsilon}\Gamma(0)\exp\Big(\widetilde{C}_\epsilon(\nu+C_{0,\epsilon})t\,e^{\widetilde{C}_\epsilon\epsilon^{-1}\|\omega^0\|_{L^\infty}t}\Big).\end{aligned} \tag{2.97}$$

En ce qui concerne l'estimation de $X_{0,\lambda}(x,D)\psi_\nu(t)$, nous avons par définition

$$X_{0,\lambda}(x,D)\psi_\nu(t)=X_{t,\lambda}\circ\psi_\nu(t).$$

En conséquence, il suffit pour conclure d'utiliser le lemme de composition suivant.

2.5.4 Une loi de composition

Lemme 2.5.2. *Soit d un entier supérieur ou égal à 2. Il existe une constante positive C dépendant de d telle que, si $s\in]-1,1[$ et $p\in[1,+\infty]$, alors pour toute fonction f de B^s_p et pour tout difféomorphisme ψ préservant la mesure , on aura*

$$\|f\circ\psi\|_{B^s_p}\leq C\|\nabla\psi\|_{L^\infty}\|\nabla\psi^{-1}\|_{L^\infty}\|f\|_{B^s_p}.$$

De plus, si $s=0$, on a d'une manière plus précise

$$\|f\circ\psi\|_{B^0_p}\leq C\Big(1+\log\big(\|\nabla\psi\|_{L^\infty}\|\nabla\psi^{-1}\|_{L^\infty}\big)\Big)\|f\|_{B^0_p}.$$

Démonstration. Le résultat est connu pour $s\in]0,1[$, uniquement sous l'hypothèse d'un difféomorphisme ψ ayant avec son inverse un jacobien borné. Le lemme ci-dessus recouvre le cas de la régularité négative, mais sous une hypothèse plus forte qui est la préservation de la mesure de Lebesgue. L'estimation logarithmique correspondant à $s=0$ a été établie par M. Vishik dans [36]. La preuve que nous allons fournir suit la démarche développée par ce même auteur. Elle utilise d'une manière cruciale le lemme 2.2.1. Pour ce faire, on écrit

$$f\circ\psi=\sum_{q\geq-1}\Delta_q f\circ\psi.$$

Ainsi en appliquant l'opérateur Δ_j et en se servant de l'inégalité triangulaire, on aboutit à

$$\|\Delta_j(f\circ\psi)\|_{L^p}\leq\sum_{q\geq-1}\|\Delta_j(\Delta_q f\circ\psi)\|_{L^p}.$$

En conséquence, le lemme 2.2.1 permet d'avoir

$$\begin{aligned}\|\Delta_j(f\circ\psi)\|_{L^p} &\leq C\|\nabla\psi\|_{L^\infty}\sum_{q<j-N}2^{q-j}\|\Delta_q f\|_{L^p}+C\sum_{|j-q|\leq N}\|\Delta_q f\|_{L^p}.\\ &+ C\|\nabla\psi^{-1}\|_{L^\infty}\sum_{q>j+N}2^{j-q}\|\Delta_q f\|_{L^p}.\end{aligned}\tag{2.98}$$

Si l'on multiplie des deux côtés par 2^{js} et l'on utilise l'inégalité de convolution, alors on aura

$$\|f\circ\psi\|_{B^s_p}\leq C\Big(\|\nabla\psi\|_{L^\infty}2^{-N(1-s)}+\|\nabla\psi^{-1}\|_{L^\infty}2^{-N(1+s)}+2^{Ns}\Big)\|f\|_{B^s_p}.$$

Choisissons $N=\log_2(\|\nabla\psi\|_{L^\infty})$. Alors l'estimation ci-dessus devient

$$\|f\circ\psi\|_{B^s_p}\leq C\Big(\|\nabla\psi\|^s_{L^\infty}+\|\nabla\psi^{-1}\|_{L^\infty}\|\nabla\psi\|^{-(1+s)}_{L^\infty}\Big)\|f\|_{B^s_p}.$$

En se servant de (2.30), alors nous obtenons le résultat énoncé. Quant au cas $s=0$, on peut déduire à partir de (2.98) que

$$\|\Delta_j(f\circ\psi)\|_{L^p}\leq C\Big(2^{-N}(\|\nabla\psi\|_{L^\infty}+\|\nabla\psi^{-1}\|_{L^\infty})+N\Big)\|f\|_{B^0_p}.$$

Ainsi en prenant $N=1+\log_2\left(\|\nabla\psi\|_{L^\infty}+\|\nabla\psi^{-1}\|_{L^\infty}\right)$ et en s'appuyant sur la décomposition donnée par (2.98), alors on parvient au résultat souhaité.

Remarque

Nous avons supposé implicitement dans tout le calcul précédent que les fonctions en jeu sont suffisamment régulières. De façon plus rigoureuse, nous devons régulariser la donnée initiale, en prenant par exemple $v^{0,n}=S_nv^0$, et montrer que les estimations du théorème 2.5.2 sont stables par passage à la limite en n. Cette étude a été faite dans [13]. De même, les résultats de convergence cités dans le théorème 2.5.2 s'obtiennent de façon similaire au théorème 1 établi dans [13].

Chapitre 3

Transport-diffusion et viscosité évanescente

Résumé. Dans ce chapitre, nous étudions un modèle de transport-diffusion relatif à un champ log-lipschitzien. Plus précisément, on s'intéresse à la répartition visqueuse de la masse des solutions de l'équation correspondante. On démontre que la masse est quasiment concentrée autour du transporté du support initial par le flot. Ceci nous permet, dans le cas des poches de tourbillon bidimensionnelles non régulières, de montrer un résultat global de convergence L^p du tourbillon de Navier-Stokes ω_ν vers celui d'Euler ω, avec $p > 1$.

3.1 Introduction

Nous envisageons dans ce chapitre de décrire les endroits où est concentrée la quasi-totalité des normes L^p de toute solution du modèle de transport-diffusion (TD_ν). Il est décrit par

$$(TD_\nu)\begin{cases} \partial_t a_\nu + v_\nu \cdot \nabla a_\nu - \nu \Delta a_\nu = 0 \\ a_{\nu|t=0} = a^0. \end{cases}$$

Le champ de vecteurs v_ν est supposé uniquement log-lipschitzien et dont la divergence est nulle. Le paramètre qui est censé mesurer la concentration de la masse est la viscosité ν. La motivation initiale de cette étude est un problème de convergence visqueuse du tourbillon du système de Navier-Stokes incompressible vers celui d'Euler incompressible, dans le cas des poches de tourbillon non régulières. Historiquement, l'étude mathématique des équations incompressibles de la mécanique des fluides a débuté avec le travail précurseur de J. Leray [26]. Depuis, le sort de cette branche a connu des développements spectaculaires dans de multitudes directions. Les questions abordées traitent essentiellement les thèmes de l'existence, l'unicité, le temps de vie des éventuelles solutions et bien d'autres. La littérature portant sur ces divers sujets est très abondante. Citons par exemple les livres de J.-Y Chemin [6], M. Cannone [5] et P.-L. Lions [29].

Revenons à la présentation du problème qui nous intéresse. Nous savons grâce aux travaux de Yudovich [40] que, dans le cadre des équations d'Euler incompressibles, la structure des poches de tourbillon est préservée pour tout temps. Autrement dit, si l'on part d'une donnée initiale dont le tourbillon est l'indicatrice d'un ensemble borné F_0, alors le tourbillon $\omega(t)$ associé à la solution d'Euler est, pour tout temps, l'indicatrice du transporté du support initial F_0 par le flot $\psi(t)$. Une telle considération cesse d'être valable lorsqu'on s'intéresse au système de Navier-Stokes incompressible à cause de l'effet régularisant résultant du terme visqueux. Il est alors naturel de savoir si le tourbillon ω_ν reste proche, dans un sens qu'on précisera, du tourbillon eulérien quand la viscosité est proche de zéro. Dans cette direction, citons l'article de R. Danchin [13] dans lequel Il démontre que si la poche de tourbillon initiale est de bord régulier, alors les solutions v_ν de (NS_ν) sont lipschitziennes. De plus, la famille (v_ν) est uniformément contrôlée par rapport à ν dans l'espace de Lipschitz. Grâce à cette information cruciale, R. Danchin parvient à démontrer que le tourbillon ω_ν est quasiment concentré autour du transporté du support initial par le flot visqueux $\psi_\nu(t)$. Plus précisément, il prouve que la décroissance de la norme L^2 du tourbillon $\omega_\nu(t)$ tronqué à une distance supérieure à un paramètre h de l'ensemble $\psi_\nu(t, \operatorname{supp} \omega_\nu(0))$ est exponentielle et qu'elle tend vers zéro quand la viscosité se rapproche indéfiniment de zéro.

Dans le but de généraliser ces résultats de décroissance à des solutions de type Yudovich associées à une poche quelconque, on est confronté à une difficulté sérieuse. Celle-ci réside dans le fait que le point clé de la preuve dans [13], qui est l'uniformité du contrôle en ν de la norme lipschitzienne du champs de vecteurs (v_ν), est mis en général en défaut. D'ailleurs, on montre en dimension deux que si le tourbillon est l'indicatrice d'un carré, alors le gradient de la vitesse associée explose près des coins. Ainsi, pour contourner ce problème, nous avons régularisé le champ de vitesse v_ν via l'opérateur de convolution S_λ. Ensuite nous avons repris la méthode utilisée par R. Danchin qui accorde un privilège pour les troncatures exponentielles et nous avons réussi à établir un résultat local de décroissance exponentielle. Nous rappelons que S_λ est l'opérateur de troncature en fréquence sur des boules de taille λ. L'importante information dont nous nous servons pour la preuve est que la famille des champs de vecteurs (v_ν) est dans la classe de Zygmund C^1_* et qu'elle est contrôlée indépendamment de ν dans une telle classe d'espaces.

Ayant établi un résultat local, on peut songer à une méthode itérative qui permet de propager la décroissance de proche en proche. Malheureusement, une telle procédure est vouée à l'echec et ne peut pas aboutir. Ceci est dû tout simplement à un mauvais contrôle de la quantité à propager $\|\omega_\nu(t)\|_{L^2((F_{t,\nu})^c_h)}$ (voir les définitions (3.1) mentionnées dans le prochain paragraphe) en passant d'une étape au suivante. En fait, le véritable handicap qui empèche toute procédure récursive de réussir provient de la troncature exponentielle utilisée $e^{\phi_\lambda(t,x)}$, qui contribue avec une quantité grande en λ dans le terme d'initialisation du second membre de l'inégalité d'énergie. Cet apport nocif dans la variable λ est dû à l'étalement du support de $\omega_\nu(t)$. Pour remédier à ce défaut et assurer un résultat global de décroissance, nous sommes amenés à travailler avec une troncature de type $\phi_\lambda(t,x)$ qui soit bornée dans la variable λ et qui permette de détecter suffisamment d'informations sur l'ensemble $F_{t,\nu}$. D'une manière plus précise, nous avons élaboré une procédure itérative qui consiste à découper l'intervalle de temps $[0,T]$ en petits intervalles $[T_i, T_{i+1}]$ dont la taille dépend uniquement de v_ν. Dans chacun de ces intervalles, nous introduisons une troncature initiale dans laquelle nous avons inséré une partie des souvenirs du support initial F_0 accumulés au cours de son évolution dans le temps, via le flot $\psi_\nu(t)$. En fait, les troncatures sont modelées sur $\psi_\nu(T_i,F_0)$. Ensuite, nous manœuvrons avec le transporté d'une telle troncature par le flot régularisé à deux paramètres $\psi_{\lambda,\nu}(t, T_i)$; ce dernier est baptisé flot généralisé. Il désigne le flot associé à la vitesse régularisée $S_\lambda v_\nu$, valant l'identité de l'espace à l'instant T_i.

Pour mener à bien notre étude dans chaque intervalle, nous avons besoin de quelques renseignements sur la dynamique d'un ensemble, via les flots qui interviennent. Ceci est l'objet du lemme 3.4.1. Dans les estimations qu'on établit, le passage d'un intervalle de temps au suivant obéit à une relation de récurrence explicite en h. Ceci permet de propager les informations voulues de proche en proche et de reconstituer l'information finale à travers une succession finie d'estimations qui se recollent. En revanche, le prix qu'on paye avec cette méthode est évidemment sur le taux de décroissance qui n'est pas exponentiel mais polynomial en ν.

Nous signalons que les analyses sont faites directement sur le modèle (TD_ν) et que le champ de vecteurs v_ν est pris dans la classe des fonctions logarithmiquement lipschitziennes notée C_{LL}. Cet espace contient strictement la classe de Zygmund C^1_*.

En ce qui concerne la convergence L^p du tourbillon visqueux $\omega_\nu(t)$ du système de Navier-Stokes vers le tourbillon eulérien $\omega(t)$, dans le cas des données de tourbillons non régulières, citons le résultat dû à P. Constantin et J. Wu [11]. Ils ont montré que si le tourbillon initial appartient à $L^1 \cap L^\infty \cap B^s_{2,\infty}$, pour un certain $s \in (0,1)$, alors la convergence aura lieu mais localement en temps. Ici, on verra comment l'étude de la répartition de la norme L^p du tourbillon visqueux $\omega_\nu(t)$ permet de déduire, dans le cas des données de type poches de tourbillon à bord de mesure nulle, un résultat de convergence forte $L^\infty_{loc}(\mathbb{R}_+; L^p)$, pour tout $p > 1$. On montre même un résultat local de convergence "presque" $L^\infty(\mathbb{R}^2)$: on prouve que si h est petit, la convergence en norme L^∞ a lieu en dehors de $\{x, \mathrm{dist}(x, \partial F_t) \leq h\}$, où ∂F_t désigne la frontière du support de $\omega(t)$. Pour établir ces résultats, Nous nous appuyons d'une part sur les estimations de décroissance et d'autre part sur un résultat de convergence uniforme du flot visqueux $\psi_\nu(t,\cdot)$ vers le flot eulérien $\psi(t,\cdot)$.

3.2 Enoncé des résultats et notations.

On s'intéresse à l'étude qualitative de la répartition de la masse de toute solution de l'équation du transport-diffusion associée à un champ de vecteurs v_ν. Elle est donnée par

$$(TD_\nu) \begin{cases} \partial_t a_\nu + v_\nu \cdot \nabla a_\nu - \nu \Delta a_\nu = 0 \\ \mathrm{div}\, v_\nu = 0 \\ a_{\nu|t=0} = a^0, \end{cases}$$

où ν est un réel positif désignant la viscosité, a_ν est une fonction de $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d$ dans $\mathbb{R}$ et (v_ν) est une famille de champs de vecteurs de $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d$ dans $\mathbb{R}^d$, avec d un entier supérieur ou égal à 2. L'opérateur $v_\nu \cdot \nabla$ est défini par $v_\nu \cdot \nabla = \sum_{i=1}^d v^i_\nu \partial_i$.

On s'intéressera également à l'équation de transport, associé à un champ v. Elle est décrite par

$$(T) \begin{cases} \partial_t a + v \cdot \nabla a = 0 \\ \mathrm{div}\, v = 0 \\ a_{|t=0} = a^0. \end{cases}$$

Pour simplifier la situation, on travaille avec une donnée initiale commune à tous les (TD_ν) et à (T). Ce sont les équations modèles qui régissent respectivement, en dimension 2, le tourbillon associé à toute solution de Navier-Stokes (NS_ν) et celle d'Euler (E) $(\nu = 0)$. Le champ de vecteurs $v_\nu(t,x)$, $(\nu > 0)$ qui donne la vitesse à l'instant t de la particule qui passe par le point x dans un écoulement de fluide incompressible, obéit au système suivant

$$(NS_\nu) \begin{cases} \partial_t v_\nu + v_\nu \cdot \nabla v_\nu - \nu \Delta v_\nu = -\nabla p_\nu \\ \mathrm{div}\, v_\nu = 0 \\ v_{\nu|t=0} = v^0, \end{cases}$$

alors que le champ de vecteurs d'un fluide parfait est donné par le système d'Euler suivant

$$(E)\begin{cases}\partial_t v + v\cdot\nabla v = -\nabla p\\ \operatorname{div} v = 0\\ v_{|t=0} = v^0.\end{cases}$$

Nous rappelons que dans le plan le tourbillon ω associé à un champ de vecteurs $v = (v^1, v^2)$ est donné par

$$\omega = \partial_1 v^2 - \partial_2 v^1.$$

Nous allons fixer quelques notations de base qui seront utiles pour la description de la décroissance de a_ν. On note $\psi_\nu(t,x)$ le flot régi par l'équation intégrale

$$\psi_\nu(t,x) = x + \int_0^t v_\nu\big(\tau, \psi_\nu(\tau,x)\big)d\tau.$$

On le note simplement ψ lorsqu'il s'agit du flot de v. Soulignons au passage l'existence et l'unicité du flot pour les champs log-lipschitziens dans la classe des fonctions continues. On verra une formulation plus précise de ce résultat dans le théorème 3.3.1. On pose

$$F_0 = \operatorname{supp}(a^0),\ F_t = \psi(t, F_0) \quad \text{et} \quad F_{t,\nu} = \psi_\nu(t, F_0). \tag{3.1}$$

Nous faisons remarquer que lorsqu'il s'agit d'établir des résultats de décroissance, nous imposons à F_0 d'être uniquement un domaine borné sans aucune condition sur le bord. Par contre quand il s'agit de montrer des résultats de convergence visqueuse, nous supposons, pour avoir une description explicite de la convergence, que le bord de F_0 est une réunion finie de chemins rectifiables. Dans ce cas, on note L_0 la longueur de ∂F_0. Notons que cette hypothèse n'est pas nécessaire : on peut imposer uniquement au bord d'avoir une mesure nulle.

Soit A un ensemble de $\mathbb{R}^d$ et h une longueur. On définit les ensembles

$$A_h^c = \{x \in \mathbb{R}^d, \operatorname{dist}(x, A) \geq h\} \quad \text{et} \quad (A^c)_h = (A^c)_h^c.$$

On définit aussi pour tout s et t positifs et pour ℓ fixé dans $[\frac{1}{2}, 1]$

$$V_\nu(t,s) = \Big|\int_s^t \|v_\nu(\tau)\|_{LL} d\tau\Big|, V_\nu(t) = V_\nu(t,0) \quad \text{et} \quad \delta_\nu(t,h) = e\ell\Big(\frac{h}{e\ell}\Big)^{\exp V_\nu(t)}.$$

On signale que le réel ℓ représente l'unité de longueur. On l'a introduit pour adimensionner les quantités mises en jeu. On désigne par $(C_{LL}, \|\cdot\|_{LL})$ l'espace normé des fonctions v vérifiant

$$\|v\|_{LL} = \frac{\|v\|_{L^\infty}}{\ell} + \sup_{0<|x-x'|\leq \ell} \frac{|v(x) - v(x')|}{|x-x'|\log\frac{e\ell}{|x-x'|}} < \infty.$$

Convention :

Chaque fois qu'il s'agit de manipuler la même quantité dans le cas du système (T), on lui attribue la même notation que (TD_ν), mais sans l'indexer par ν.

Nous allons rappeler ici un résultat de décroissance exponentielle de toute solution de (TD_ν), où v_ν est un champ de vecteurs supposé lipschitzien. Une telle condition est satisfaite par exemple pour toute vitesse qui est solution du système de Navier-Stokes ou du système d'Euler incompressible avec des données initiales de type poche de tourbillon à bord de classe $C^{1+\epsilon}$, avec $\epsilon \in]0,1[$.

Le cas eulérien est établi par J.-Y. Chemin [6], tandis que le cas visqueux est dû à R. Danchin. Ce dernier auteur montre dans [13] que le contrôle Lipschitz que l'on obtient sur la vitesse est uniforme par rapport à la viscosité. Dans ce même article on trouve le résultat de décroissance suivant:

Théorème 3.2.1. *Soient $\nu > 0$ et v_ν un champ de vecteurs appartenant à $L^\infty_{loc}(\mathbb{R}_+; \mathrm{Lip}(\mathbb{R}^d))$ et à divergence nulle. On suppose que a_ν vérifie (TD_ν) avec $a^0 \in L^2(\mathbb{R}^d)$. Alors on a pour tout $t > 0$ et $h > 0$:*

1. $\|a_\nu(t)\|_{L^2((F_{t,\nu})^c_h)} \leq e^{-\frac{h^2}{4\nu t}e^{-4\bar{V}_\nu(t)}}\|a^0\|_{L^2}$.
2. *Si $a^0 = 1_{F_0}$, alors*

$$\|a_\nu(t) - \mathbf{1}_{F_{t,\nu}}\|_{L^2((F^c_{t,\nu})_h)} \leq 2\|a^0\|_{L^2} \min\Big\{1, C\Big(\frac{\nu t}{h^2}\Big)^{\frac{1}{2}} e^{2\bar{V}_\nu(t)} e^{-\frac{h^2}{\nu t}e^{-4\bar{V}_\nu(t)}}\Big\}.$$

avec C est une constante qui dépend de d et $\bar{V}_\nu(t) = \int_0^t \|\nabla v_\nu(s)\|_{L^\infty} ds.$

Dans les travaux pionniers de Yudovich [40], on montre que les systèmes de Navier-Stokes et d'Euler incompressibles possèdent des uniques solutions globales lorsque la donnée initiale est à tourbillon dans $L^1 \cap L^\infty$. En outre, la vitesse est uniformément contrôlée en temps et par rapport à la viscosité ν dans l'espace C^1_*. Même dans ce cas de faible régularité, nous réussissons à démontrer un résultat de décroissance, par rapport à la viscosité, de la masse du tourbillon. Notre fil directeur est essentiellement les techniques utilisées pour démontrer le théorème 3.2.1. Il s'avère qu'un tel résultat n'est pas spécifique aux tourbillons : il est lié à la nature parabolique des équations de transport-diffusion (TD_ν) relatives à un champ logarithmiquement lipschitzien. Plus précisément, nous avons ce premier résultat :

Théorème 3.2.2. *Soit d un entier supérieur ou égal à 2 et p un réel appartenant à $[2, +\infty[$. Il existe une constante C ne dépendant que de d telle que, si v_ν est un champ de vecteurs appartenant à $L^1_{loc}(\mathbb{R}_+; C_{LL})$ de divergence nulle et si a_ν vérifie (TD_ν), avec a^0 dans $L^p(\mathbb{R}^d)$, alors en posant*

$$T_\nu = \sup\Big\{t \geq 0, \int_0^t \|v_\nu(s)\|_{LL} ds \leq \frac{1}{C}\Big\},$$

on aura pour tout $t \in [0, T_\nu[$, pour tout $h \in [0, \ell]$ et pour tout ν vérifiant

$$\frac{\nu t}{\ell^2} \leq \Big(\frac{h}{C\ell}\Big)^{\frac{C}{1 - CV_\nu(t)}}, \tag{3.2}$$

l'estimation suivante

$$\big\|a_\nu(t)\big\|_{L^p((F_{t,\nu})^c_h)} \leq C\big\|a^0\big\|_{L^p} \exp\Bigg(-\frac{e}{4}\Big(\frac{\ell^2}{\nu t}\Big)^{\frac{1}{4}}\Big(\frac{h}{e\ell}\Big)^{\exp V_\nu(t)}\Bigg).$$

De plus, si F_0 est un domaine borné de $\mathbb{R}^d$, alors en posant $a^0 = \mathbf{1}_{F_0}$ et en se restreignant à des réels $t \in [0, T_\nu)$, $h \in [0, \ell]$ et ν satisfaisant (3.2), *on aura l'estimation suivante*

$$\big\|a_\nu(t) - \mathbf{1}_{F_{t,\nu}}\big\|_{L^p((F^c_{t,\nu})_h)} \leq C\|a^0\|_{L^p} \exp\Big(-\frac{e}{4}\Big(\frac{\ell^2}{\nu t}\Big)^{\frac{1}{4}}\Big(\frac{h}{e\ell}\Big)^{\exp V_\nu(t)}\Big). \tag{3.3}$$

En vue d'application à la limite visqueuse dans les poches de tourbillon, on établit le corollaire suivant :

Corollaire 3.2.1. *Soient v et (v_ν) des champs de vecteurs dans $L^1_{loc}(\mathbb{R}_+; C_{LL}(\mathbb{R}^2))$ et de divergence nulle. On se donne des solutions (a_ν) et a associées respectivement aux systèmes (TD_ν) et (T) avec la même donnée initiale a^0. On suppose que (v_ν) converge vers v dans $L^1_{loc}(\mathbb{R}_+; L^\infty(\mathbb{R}^2))$, quand ν tend vers zéro et que*

$$\inf_{\nu>0} T_\nu = T > 0.$$

Si $a^0 = \mathbf{1}_{F_0}$, avec F_0 un domaine borné à bord rectifiable de longueur L_0, alors on aura pour tout $p \in [2, +\infty[$,

$$\lim_{\nu \to 0^+} \|a_\nu(t) - \mathbf{1}_{F_t}\|_{L^\infty_{loc}([0,T[;L^p)} = 0.$$

Plus précisément, pour tout $h \in [0,\ell]$ et pour tout $t \in [0,T[$. Il existe une fonction $\tilde{\nu}(t,h)$ à valeurs strictement positives telle que, pour tout $\nu \in [0, \tilde{\nu}(t,h)]$

$$\begin{aligned} \big\|a_\nu(t) - \mathbf{1}_{F_t}\big\|_{L^p(\mathbb{R}^2)} &\leq C\|a^0\|_{L^p} \exp\Big(-\frac{e}{4}\Big(\frac{\ell^2}{\nu t}\Big)^{\frac{1}{4}}\Big(\frac{h}{e\ell}\Big)^{\exp V_\nu(t)}\Big) \\ &+ C(L_0\ell + \ell^2)^{\frac{1}{p}}\Big(\frac{h}{e\ell}\Big)^{\frac{1}{p}\exp -V_\nu(t)}. \end{aligned}$$

De plus, pour tout h fixé

$$\lim_{\nu \to 0^+} \|a_\nu(t) - \mathbf{1}_{F_t}\|_{L^\infty_{loc}([0,T[;L^\infty(\mathcal{T}^c_{t,h}))} = 0.$$

Plus précisément, avec la même condition sur ν, on a

$$\|a_\nu(t) - \mathbf{1}_{F_t}\|_{L^\infty(\mathcal{T}^c_{t,h})} \leq C \exp\Big(-\frac{e}{4}\Big(\frac{\ell^2}{\nu t}\Big)^{\frac{1}{4}}\Big(\frac{h}{e\ell}\Big)^{\exp V_\nu(t)}\Big),$$

où l'on désigne $\mathcal{T}_{t,h} = \{x \in \mathbb{R}^2, \mathrm{dist}(x, \partial F_t) \leq h\}$. La constante C est absolue.

Les résultats de décroissance exponentielle que nous venons d'exposer dans le théorème 3.2.2 et le corollaire 3.2.1 sont valables sur un petit intervalle de temps. Ceci est dû vraisemblablement à une limitation de la méthode. En modifiant légèrement les techniques utilisées, nous aboutissons à un résultat de décroissance globale en temps mais en une puissance fractionnaire de ν.

Théorème 3.2.3. *Il existe une constante strictement positive C telle que, si (v_ν) est une famille de champs de vecteurs de divergence nulle, appartenant à $L^1_{loc}(\mathbb{R}_+; C_{LL})$ et si a_ν vérifie (TD_ν) avec $a^0 \in L^2(\mathbb{R}^d)$ alors, pour tout temps $T > 0$ et pour tout nombre réel $\alpha \in [0,1[$ et $h \in [0,\ell]$, si ν vérifie*

$$\frac{\nu T}{\ell^2} \leq \min\left\{\Big(\frac{h}{C\ell}\Big)^{C\exp\left(\frac{V_\nu(T)}{1-\alpha}\right)^2}, \Big(\frac{e^{1-\exp CV_\nu(T)}}{CV_\nu(T)}\Big)^{\frac{4}{1+\alpha}}\right\}, \tag{3.4}$$

on aura pour tout temps t appartenant à $[0,T]$

$$\|a_\nu(t)\|_{L^2((F_{t,\nu})^c_h)} \leq C\Big(\frac{\nu t}{\ell^2}\Big)^{\frac{\alpha}{2}}\Big(\frac{4e\ell}{h}\Big)^{\exp\left(\frac{CV_\nu(T)}{1-\alpha}\right)^2}\|a^0\|_{L^2}.$$

De plus, considérons la donnée initiale $a^0 = \mathbf{1}_{F_0}$, avec F_0 un domaine borné. Alors pour tout h et ν vérifiant la condition (3.4) et pour tout $t \in [0,T]$, on aura l'estimation suivante

$$\|a_\nu(t) - \mathbf{1}_{F_{t,\nu}}\|_{L^2((F^c_{t,\nu})_h)} \leq C\Big(\frac{\nu t}{\ell^2}\Big)^{\frac{\alpha}{2}}\Big(\frac{4e\ell}{h}\Big)^{\exp C\left(\frac{V_\nu(T)}{1-\alpha}\right)^2}\|a^0\|_{L^2}.$$

Ce théorème permet, dans le cadre des systèmes (NS_ν) et (E), d'avoir les corollaires suivants

Corollaire 3.2.2. *Il existe une constante strictement positive C et une fonction f de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}_+$ strictement décroissante vers zéro telles que, si v_ν et v désignent respectivement les solutions de (NS_ν) et de (E) associées à la même donnée initiale de tourbillon $\omega^0 \in L^1 \cap L^\infty$, alors pour tout temps $T > 0$, pour tout nombre réel $\alpha \in]0,1[$, pour tout $h \in]0,\ell]$ et pour tout ν satisfaisant*

$$\frac{\nu T}{\ell^2} \leq \min\left\{\Big(\frac{h}{C\ell}\Big)^{C\exp\left(C(1-\alpha)^{-2}\|\omega^0\|^2_{L^1\cap L^\infty}T^2\right)}, f(T\|\omega^0\|_{L^1\cap L^\infty})\right\}, \tag{3.5}$$

on ait

$$\forall t \in [0,T], \quad \|\omega_\nu(t)\|_{L^2((F_t)^c_h)} \leq C\Big(\frac{\nu t}{\ell^2}\Big)^{\frac{\alpha}{2}}\Big(\frac{4e\ell}{h}\Big)^{\exp\left(C(1-\alpha)^{-2}\|\omega^0\|^2_{L^1\cap L^\infty}T^2\right)}\|\omega^0\|_{L^2}.$$

De plus, soit F_0 un domaine borné, on considère une donnée initiale de type $\omega^0 = \mathbf{1}_{F_0}$. Alors pour tout h et ν vérifiant les conditions ci-dessus, l'estimation suivante aura lieu

$$\forall t \in [0,T], \quad \|\omega_\nu(t) - \mathbf{1}_{F_t}\|_{L^2((F^c_t)_h)} \leq C\Big(\frac{\nu t}{\ell^2}\Big)^{\frac{\alpha}{2}}\Big(\frac{4e\ell}{h}\Big)^{\exp\left(C(1-\alpha)^{-2}\|\omega^0\|^2_{L^1\cap L^\infty}T^2\right)}\|\omega^0\|_{L^2}.$$

Le corollaire suivant fournit un résultat de convergence en norme $L^\infty_{loc}(\mathbb{R}_+; L^2(\mathbb{R}^2))$ du tourbillon ω_ν vers ω, lorsque la viscosité tend vers zéro. Néanmoins, c'est un résultat restreint aux tourbillons initiaux de type $\omega^0 = \mathbf{1}_{F_0}$. Il est basé essentiellement sur le corollaire 3.2.2 et sur un résultat de convergence de v_ν vers v dans l'espace $L^\infty_{loc}(\mathbb{R}_+; L^2)$. Le taux de convergence qu'on a réussi à expliciter est une puissance de ν qui se dégrade avec le temps.

Corollaire 3.2.3. *Soient ω_ν et ω les tourbillons respectifs des solutions de (NS_ν) et de (E) tels que, $\omega_\nu(0) = \omega(0) = \omega^0 = \mathbf{1}_{F_0}$ avec F_0 un domaine borné ayant un bord de longueur finie L_0. Alors pour tout $p \in (1, +\infty)$, on a*

$$\lim_{\nu\to 0^+}\|\omega_\nu - \omega\|_{L^\infty_{loc}(\mathbb{R}_+; L^p(\mathbb{R}^2))} = 0.$$

Plus précisément, il existe une fonction f de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}_+$ strictement décroissante vers zéro et une constante C strictement positive telles que, pour tout réel T positif et pour tout nombre positif ν vérifiant

$$\frac{\nu T}{\ell^2} \leq f(T\|\omega^0\|_{L^1\cap L^\infty}),$$

on aura pour tout $t \in [0,T]$ l'estimation

$$\|\omega_\nu(t) - \omega(t)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^2)} \leq C\|\omega^0\|^2_{L^1\cap L^\infty}(L_0\ell + \ell^2)\Big(\frac{\nu T}{\ell^2}\Big)^{C^{-1}\exp(-CT^2\|\omega^0\|^2_{L^1\cap L^\infty})}.$$

De plus, il existe une constante universelle $C_1 > 0$ telle que pour tout $h \in [0,\ell]$ et pour tout temps $t \in [0, C_1\|\omega^0\|^{-1}_{L^1\cap L^\infty}[$, on ait

$$\lim_{\nu\to 0^+}\|\omega_\nu(t) - \omega(t)\|_{L^\infty(T^c_{t,h})} = 0.$$

Remarques.

• Le corollaire 3.2.1 reste valable pour toute dimension $d \geq 2$. La seule rectification qu'on doit apporter, en passant à une dimension supérieure, concerne le terme qui fait apparaître la longueur L_0, qu'on doit l'adapter à la dimension.

• L'hypothèse que ∂F_0 est rectifiable n'est pas essentielle. On peut la remplacer par une hypothèse plus faible de type la mesure de Lebesgue de cet ensemble est nulle. Cependant on ne peut pas avoir un contrôle explicite. En fait, on doit échanger les quantités qui font appel à la mesure de surface en L_0 par des quantités qui font intervenir la mesure de Lebesgue de $\mathcal{T}_{0,h_1}$, défini dans le corollaire 3.2.1, où $h_1 = e\ell(\frac{h}{e\ell})^{\exp -V(t)}$. Cette mesure tend vers zéro quand h tend vers zéro et c'est suffisant pour déduire la convergence.

• Les résultats de convergence sont établis pour $p \geq 2$ et par interpolation et uniformité du contrôle dans L^1, on peut les étendre à des $p > 1$.

• La convergence "presque" L^∞ mentionnée dans le corollaire 3.2.1 est assurée localement en temps. La méthode utilisée pour avoir des estimations globales ne permet pas d'obtenir des estimations L^p uniformes en p.

• La méthode qu'on utilise ne donne pas une décroissance exponentielle pour des temps assez grands car, vraisemblablement, la troncature exponentielle qu'on a utilisée est bénéfique uniquement près de l'origine. En fait, elle ne manifeste aucun signe de souplesse à l'égard des méthodes itératives.

3.3 Quelques outils de base

Nous allons introduire dans ce paragraphe quelques éléments de base qui serviront pour la suite. En premier lieu, nous étudions quelques propriétés fondamentales de l'espace des fonctions log-lipschitziennes en donnant en particulier la caractérisation dyadique de ses éléments. Ensuite, nous discutons l'existence de flot pour un champ log-lipschitzien, en détaillant certaines de ses propriétés fondamentales. Nous clôturons cette brève excursion par quelques lemmes qui sont d'une utilité courante pour prouver les résultats énoncés.

Définition 3.3.1. *Fixons un réel $\ell \in [\frac{1}{2}, 1]$. Alors on désigne par C_{LL} (pour alléger les notations on omet l'indice ℓ) l'espace des fonctions v bornées sur $\mathbb{R}^d$ telles que*

$$\sup_{0<|x-x'|\leq \ell} \frac{|v(x)-v(x')|}{|x-x'|(1+\log\frac{\ell}{|x-x'|})} < +\infty.$$

La norme naturelle associée à cet espace est

$$\|v\|_{LL} = \frac{\|v\|_{L^\infty}}{\ell} + \sup_{0<|x-x'|\leq \ell} \frac{|v(x)-v(x')|}{|x-x'|(1+\log\frac{\ell}{|x-x'|})}.$$

Avant d'aborder la caractérisation dyadique des éléments de C_{LL}, on va juste introduire les opérateurs de découpage en fréquence dont la construction repose sur la proposition suivante :

Proposition 3.3.1. *Il existe deux fonctions χ et ϕ appartenant respectivement aux espaces $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ et $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d\backslash\{0\})$ telles que,*

$$\chi(\xi) + \sum_{q\geq 0}\phi(2^{-q}\xi) = 1, \quad \frac{1}{3} \leq \chi^2(\xi) + \sum_{q\geq 0}\phi^2(2^{-q}\xi) \leq 1,$$

$$|p-q| \geq 2 \Rightarrow \operatorname{supp}\phi(2^{-p}\cdot) \cap \operatorname{supp}\phi(2^{-q}\cdot) = \varnothing \quad \text{et}$$

$$q \geq 1 \Rightarrow \operatorname{supp}\chi \cap \operatorname{supp}\phi(2^{-q}) = \varnothing.$$

On note

$$\Delta_{-1}v = \mathcal{F}^{-1}(\chi(\xi)\widehat{v}(\xi)), \quad \Delta_q v = \mathcal{F}^{-1}(\phi(2^{-q}\xi)\widehat{v}(\xi)) \text{ si } q \in \mathbb{N}.$$

$$\forall q \leq -2, \quad \Delta_q v = 0 \quad \text{ et pour tout } q \in \mathbb{Z}, S_q v = \sum_{p \leq q-1} \Delta_p v.$$

Rappelons brièvement les espaces de Hölder :

Définition 3.3.2. *Soit r un nombre réel. On note C^r l'ensemble des distributions tempérées v telles que*

$$\|v\|_r = \sup_q 2^{qr} \|\Delta_q v\|_{L^\infty} < +\infty.$$

Si r est un entier on note C^r_* au lieu de C^r.

La proposition qui va suivre fournit une caractérisation des éléments de l'espace C_{LL} en termes d'estimations L^∞ de leurs troncatures en fréquence. Pour la preuve, voir par exemple [4].

Proposition 3.3.2. *Il existe une constante $C > 0$, telle que pour toute fonction $v \in C_{LL}$ on ait :*

$$C^{-1}\|v\|_{LL} \leq \frac{\|\Delta_{-1}v\|_{L^\infty}}{\ell} + \sup_q \frac{\|\nabla S_q v\|_{L^\infty}}{2+q} \leq C\|v\|_{LL},$$

$$\|\Delta_q v\|_{L^\infty} \leq C\ell \|v\|_{LL}(2+q)2^{-q}.$$

Le lien entre l'espace de Zygmund C^1_* et C_{LL} est l'objet du corollaire suivant :

Corollaire 3.3.1. *L'espace C^1_* s'injecte continûment dans l'espace C_{LL}.*

Nous savons que les solutions de type Yudovich sont dans l'espace C^1_*. Alors en conséquence du corollaire ci-dessus, nos résultats revêtent un aspect plus général. Nous faisons appel dans de nombreux passages aux deux lemmes suivants :

Lemme 3.3.1. *(Lemme de Gronwall) Soit f une fonction continue de $[0,T]$ dans $\mathbb{R}_+$et g, h deux fonctions de $L^1([0,T]; \mathbb{R}_+)$. On suppose qu'il existe un réel positif a tel qu'on ait*

$$f(t) \leq a + \int_0^t g(\tau)d\tau + \int_0^t h(\tau)f(\tau)d\tau.$$

Alors, pour tout $t \in [0,T]$, on a

$$f(t) \leq e^{\int_0^t h(\tau)d\tau}\Big(a + \int_0^t e^{-\int_0^\tau h(\tau')d\tau'} g(\tau)d\tau\Big).$$

Le second lemme qu'on va énoncer, connu sous le nom du lemme d'Osgood, généralise partiellement le lemme de Gronwall ($g = 0$).

Lemme 3.3.2. *(Lemme d'Osgood) Soient ρ une fonction mesurable positive, γ une fonction positive localement intégrable et μ une fonction continue croissante positive. On suppose qu'il existe un réel positif a tel qu'on ait*

$$\rho(t) \leq a + \int_{t_0}^t \gamma(\tau)\mu(\rho(\tau))d\tau.$$

Si a est différent de zéro, alors on a

$$-\mathcal{M}(\rho(t)) + \mathcal{M}(a) \leq \int_{t_0}^t \gamma(\tau)d\tau, \text{ avec } \mathcal{M}(x) = \int_x^1 \frac{dr}{\mu(r)}.$$

Si a est nul et si de plus $\displaystyle\int_0^1 \frac{dr}{\mu(r)} = +\infty$, alors ρ est identiquement nulle.

Maintenant on va définir la notion de flot généralisé à deux paramètres. Il permet de décrire par le même formalisme le flot ψ et son inverse. Ce qui entraîne, dans notre cas, qu'ils ont tous les deux la même régularité höldérienne.

$$\psi_s(t,x) = x + \int_s^t v(\tau,\psi_s(\tau,x))d\tau \quad \text{avec } t,s \in \mathbb{R}_+ \text{ et } x \in \mathbb{R}^d.$$

En d'autres termes, dans un écoulement fluide, $\psi_s(t,x)$ n'est autre que la position à l'instant t de la particule qui, à l'instant s, se trouve en x. Le théorème qu'on va énoncer répond à la question de l'existence et l'unicité d'un flot à un champ de vecteurs qui n'est que logarithmiquement lipschitzien. Il décrit la dégradation de sa régularité en fonction du temps. Pour la preuve en détail, voir par exemple [6].

Théorème 3.3.1. *Soit v un champ de vecteurs appartenant à l'espace $L^1_{loc}(\mathbb{R}_+; C_{LL})$. Alors*

1. *pour tout $s \geq 0$, il existe une unique fonction ψ_s de $C(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d; \mathbb{R}^d)$ solution de :*

$$\psi_s(t,x) = x + \int_s^t v(\tau,\psi_s(\tau,x))d\tau.$$

De plus, pour tout $t \in \mathbb{R}_+$

$$\psi_s(t,\cdot) - \mathrm{Id} \in C^{e^{-|\int_s^t \|v(\tau)\|_{LL} d\tau|}}.$$

De façon plus précise, on a

$$|x-y| \leq \ell e^{1-e^{V(t,s)}} \Rightarrow |\psi_s(t,x) - \psi_s(t,y)| \leq e\ell \Big(\frac{|x-y|}{e\ell}\Big)^{e^{-V(t,s)}}.$$

2. *Pour tout t et s positifs, $\psi_s(t,\cdot)$ est un homéomorphisme de $\mathbb{R}^d$ d'inverse $\psi_t(s,\cdot)$. De plus, si v est de divergence nulle, alors $\psi_s(t)$ laisse invariante la mesure de Lebesgue.*

Démonstration

Concernant la démonstration de la première partie, on renvoit par exemple au théorème 5.2.1 énoncé dans [6]. Donc on se contente de la vérification de la deuxième partie.
Pour démontrer que $\psi_s(t)$ est un homéomorphisme il suffit de vérifier que pour tout $x \in \mathbb{R}^d$ et pour tout t et s positifs on a $\psi_s(t,\psi_t(s,x)) = x$.
Pour la preuve de l'identité ci-dessus, on ne peut pas dériver cette expression par rapport au temps parce que v est de faible régularité mais on fixe deux temps τ,s positifs et on considère la fonction y définie comme l'unique solution du système

$$\begin{cases} \partial_t y(t,x) = v(t,y(t,x)) \\ y(s) = \psi_\tau(s,x). \end{cases}$$

Signalons que l'existence et l'unicité de telle solution découle de la première partie de ce théorème. Comme $(t,x) \to \psi_\tau(t,x)$ et $(t,x) \to \psi_s(t,\psi_\tau(s,x))$ sont deux solutions de ce même problème de Cauchy, alors on en déduit par unicité que

$$\forall t \in \mathbb{R}_+, \psi_\tau(t,x) = \psi_s(t,\psi_\tau(s,x)).$$

En particulier on a l'égalité pour $t = \tau$ et c'est ce qu'il faut.
En ce qui concerne la conservation de la mesure, on utilise par exemple $S_\lambda v$ comme une approximation régulière et on montre que le flot correspondant converge uniformément vers le flot de v. Ceci est suffisant pour déduire que la propriété de conservation de la mesure, qui est vraie pour ces flots, est héritée par le flot limite. ■

Comme conséquence de ce résultat, on a le corollaire suivant :

Corollaire 3.3.2. *Soit v un champ de vecteurs appartenant à l'espace $L^1_{loc}(\mathbb{R}_+; C_{LL})$. Alors pour tout $t \geq 0$,* $\psi(t,\cdot)$ et $\psi^{-1}(t,\cdot)$ appartiennent à $\mathrm{Id} + C^{e^{-V(t)}}$.

Démonstration

Pour la preuve, il suffit de constater que

$$\psi(t,x) = \psi_0(t,x) \quad \text{et} \quad \psi^{-1}(t,x) = \psi_t(0,x).\blacksquare$$

Dans ce qui suit, nous allons fournir un lemme qui sera très présent dans la preuve des résultats de décroissance. On désigne par S_λ l'opérateur de troncature en fréquence défini par :

$$S_\lambda v = \sum_{p \leq [\log_2 \lambda\ell]} \Delta_p v. \tag{3.6}$$

La fonction $S_\lambda v$ est très régulière. Elle jouit en particulier des estimations décrites par le lemme ci-après, qui sont une conséquence de la proposition 3.3.2.

Lemme 3.3.3. *Il existe une constante $C_0 > 0$, telle que, pour tout champ v dans C_{LL} et pour tout réel λ vérifiant $\lambda\ell \geq e$, on a*

$$\begin{aligned}
\|S_\lambda v - v\|_{L^\infty} &\leq C_0 \lambda^{-1} \log(\lambda\ell) \|v\|_{LL}, \\
\|\nabla S_\lambda v\|_{L^\infty} &\leq C_0 \log(\lambda\ell) \|v\|_{LL}, \\
\|S_\lambda v\|_{LL} &\leq C_0 \|v\|_{LL}.
\end{aligned}$$

Démonstration

D'après la proposition 3.3.2, on a

$$\begin{aligned}
\|S_\lambda v - v\|_{L^\infty} &\leq \sum_{p > \log_2 \lambda\ell} \|\Delta_p v\|_{L^\infty} \\
&\leq C \sum_{p \geq \log_2 \lambda\ell} \frac{p}{2^p} \|v\|_{LL}.
\end{aligned}$$

Le fait que $\displaystyle\sum_{p \geq n} \frac{p}{2^p} \approx \frac{n}{2^n}$ donne la première estimation. La deuxième estimation est explicitée dans la proposition 3.3.2. En ce qui concerne la preuve de la dernière inégalité il suffit, outre la caractérisation des éléments de C_{LL}, d'utiliser l'estimation $\|S_\lambda v\|_{L^\infty} \leq C\|v\|_{L^\infty}$.

3.4 Propagé d'un ensemble par le flot

La description de la manière dont se propage un ensemble donné par flot est d'une si grande importance : elle permet de récupérer une minoration convenable dans le membre de gauche de l'inégalité (3.30). Elle est aussi d'un apport décisif lorsqu'on s'intéresse à l'extension de nos estimations à tout temps. Le lemme qu'on va présenter couvre plusieurs aspects de cette dynamique : nous faisons une description relative à des flots ψ et ψ_λ associés respectivement à des champs de vecteurs v et $S_\lambda v$. Avant de fournir l'énoncé en question, nous définissons tout d'abord une quantité qui sera souvent intégrée dans nos estimations. On pose pour tout réel positif λ et pour tout temps $t \geq 0$

$$\bar{\delta}(t,\lambda) = 2e\ell\Big(\frac{\log \lambda\ell}{\lambda\ell}\Big)^{\exp -C_0 V(t)}.$$

Signalons, d'un côté, que cette quantité sera indexée par ν quand elle sera associée au champ de vecteurs v_ν et d'un autre côté que la constante C_0 est celle qui apparaît dans le lemme 3.3.3. Nous rappelons aussi la définition

$$\delta(t,h) = e\ell(\frac{h}{e\ell})^{\exp V(t)}.$$

Lemme 3.4.1. *Il existe une constante $C_0 > 1$, telle que pour tout champ de vecteurs v appartenant à l'espace $L^1_{loc}(\mathbb{R}_+; C_{LL})$ et pour tout ensemble A de $\mathbb{R}^d$ on a*

1. $\psi(t,A)^c_h \subset \psi(t, A^c_{\delta(t,h)}), \forall h \in [0,\ell]$.
2. $\psi(t, A^c_h) \subset (\psi(t,A))^c_{\delta(t,h)}, \forall h \in [0,\ell]$.
3. *Soient λ un réel vérifiant $\lambda\ell \geq e$ et $h \in [0,\ell]$. Alors pour tout temps positif t vérifiant*

$$C_0 V(t)\frac{\log(\lambda\ell)}{\lambda\ell} < e^{1-\exp C_0 V(t)},$$

on a

$$\psi_\lambda^{-1}(t) \circ \psi(t, A^c_h) \subset A^c_{h-\bar{\delta}(t,\lambda)}.$$

De plus, pour tout réel τ positif, on a

$$\psi^{-1}_{\tau,\lambda}(t) \circ \psi(t, A^c_h) \subset \psi(\tau, A)^c_{\delta(\tau,h)-\bar{\delta}(t,\lambda)},$$

avec $\psi_{\tau,\lambda}(t,\cdot)$ le flot associé à $S_\lambda v$ valant l'identité à l'instant τ et $\psi_\lambda(t) = \psi_{0,\lambda}(t,\cdot)$.

4. *Soient λ un nombre réel vérifiant les hypothèses de la partie 3. et $h \in [0,\ell]$. Alors pour tous les réels positifs $0 \leq \tau \leq t$, on a*

$$\psi_{\tau,\lambda}\Big(t, (\psi(\tau,A))^c_h\Big) \subset \Big(\psi_\lambda(t,A)\Big)^c_{\delta^{(2)}(t,h)-2\bar{\delta}(t,\lambda)},$$

à condition que $2\bar{\delta}(t,\lambda) \leq \delta^{(2)}(t,h)$. On note par $\delta^{(2)}(t,h) = \delta(t,\delta(t,h))$.

Démonstration

1. Considérons un élément y de $\psi(t,A)^c_h$. Alors il existe $x' \in \mathbb{R}^d$ tel qu'on ait $y = \psi(t,x')$. De plus, on a pour tout x dans A

$$|\psi(t,x') - \psi(t,x)| \geq h.$$

D'autre part, le théorème 3.3.1 montre que

$$\frac{|x'-x|}{\ell} \leq e^{1-e^{V(t)}} \Rightarrow \frac{|\psi(t,x') - \psi(t,x)|}{\ell} \leq e\Big(\frac{|x'-x|}{\ell e}\Big)^{e^{-V(t)}}.$$

Donc si $|x'-x| \leq e^{1-e^{V(t)}}\ell$, alors $|x'-x| \geq e\ell(\frac{h}{e\ell})^{e^{V(t)}}$. Dans l'autre cas on aura

$\frac{|x'-x|}{e\ell} \geq e^{-e^{V(t)}} \geq (\frac{h}{e\ell})^{e^{V(t)}}$, dès que $h \in [0,\ell]$. Ce qui donne le résultat.

2. La preuve se fait d'une façon identique à 1., sauf qu'on applique le théorème 3.3.1 dans le cadre particulier correspondant à $\psi_t(0,\cdot) = \psi^{-1}(t,\cdot)$.

3. Soient $x \in A_h^c$ et $x_0 \in A$. Alors par une simple application de l'inégalité triangulaire on aura

$$\begin{aligned} |\psi_\lambda^{-1}(t) \circ \psi(t)(x) - x_0| &\geq |x - x_0| - |\psi_\lambda^{-1}(t) \circ \psi(t)(x) - x| \\ &\geq h - |\psi_\lambda^{-1}(t) \circ \psi(t)(x) - x|. \end{aligned}$$

L'objet de ce qui suit est de majorer la dernière quantité du membre de droite. Pour réaliser un tel objectif, on aura besoin d'une estimation uniforme en espace de la quantité

$$\rho_\lambda(t,x) \stackrel{déf}{=} |\psi(t,x) - \psi_\lambda(t,x)|.$$

Plus précisément, on va montrer que pour tout temps $t \geq 0$ et pour tout réel $\lambda \geq \frac{e}{\ell}$, tels que

$$C_0 V(t) \frac{\log(\lambda\ell)}{\lambda\ell} < e^{1-e^{V(t)}},$$

alors on aura l'estimation

$$\|\rho_\lambda(t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)} \leq \bar{\delta}(t,\lambda). \tag{3.7}$$

Revenons à la formulation intégrale des flots et écrivons

$$\psi(t,x) - \psi_\lambda(t,x) = \int_0^t v(s,\psi(s,x)) - S_\lambda v(s,\psi_\lambda(s,x))ds.$$

Le module de cette dernière intégrale est majoré par

$$\int_0^t |v(s,\psi_\lambda(s,x)) - S_\lambda v(s,\psi_\lambda(s,x))|ds + \int_0^t |v(s,\psi(s,x)) - v(s,\psi_\lambda(s,x))|ds.$$

Ainsi la fonction ρ_λ vérifie grâce au lemme 3.3.3 l'inégalité fonctionnelle suivante

$$\rho_\lambda(t,x) \leq C_0 V(t) \frac{\log(\lambda\ell)}{\lambda} + \int_0^t |v(s,\psi(s,x)) - v\big(s,\psi_\lambda(s,x)\big)|ds.$$

Pour transformer l'intégrale en une expression rendant exploitable le lemme d'Osgood, nous devons prendre quelques précautions sur la taille de ρ_λ. Pour cela, on fixe un temps arbitraire positif T et on prend un réel λ satisfaisant

$$\lambda\ell \geq e \quad \text{et} \quad C_0 V(T) \frac{\log(\lambda\ell)}{\lambda\ell} < e^{1-\exp V(T)}. \tag{3.8}$$

On va montrer que dans un tel contexte $\rho_\lambda(t,x) < \ell$, pour tout temps t appartenant à $[0,T]$. Pour ce faire, on note

$$I = \{t \in [0,T];\ \forall t' \in [0,t], \rho_\lambda(t',x) < \ell\} \quad \text{et} \quad T^\star = \sup I.$$

Une simple constatation montre que T^* existe, vu que 0 se trouve dans l'ensemble I. Donc I est un intervalle de la forme $[0,T^*)$. D'autre part, la continuité de ρ_λ implique que I est un ouvert de $[0,T]$. Donc, si on démontre que T^* est dans I, alors on a nécessairement $T^*=T$.
Pour tout $t<T^*$, ρ_λ vérifie l'inégalité fonctionnelle suivante

$$\frac{\rho_\lambda(t,x)}{\ell} \le C_0 V(T)\frac{\log\lambda\ell}{\lambda\ell} + \int_0^t \|v(s)\|_{LL}\mu\Big(\frac{\rho_\lambda(s,x)}{\ell}\Big)ds.$$

où l'on désigne par $\mu(r)=r(1-\ln r), 0<r\le 1$. Une application du lemme d'Osgood donne

$$\forall t\in I,\quad \frac{\rho_\lambda(t,x)}{\ell} \le e\Big(C_0V(T)\frac{\log\lambda\ell}{\lambda\ell e}\Big)^{e^{-V(t)}}.$$

Ce qui entraîne, grâce à (3.8) et à la continuité de ρ_λ, que pour tout réel $t\in[0,T^*]$, on a

$$\frac{\rho_\lambda(t,x)}{\ell} \le e\Big(C_0V(T)\frac{\log\lambda\ell}{\lambda\ell e}\Big)^{e^{-V(T)}} < 1.$$

Ce qui prouve que $T^*\in I$. En particulier, pour tout t vérifiant $C_0V(t)\frac{\log\lambda\ell}{\lambda\ell} < e^{1-e^{V(t)}}$, on a

$$\begin{aligned}\forall x\in\mathbb{R}^d,\quad \rho_\lambda(t,x) &\le e\ell\Big(C_0V(t)\frac{\log\lambda\ell}{\lambda\ell e}\Big)^{e^{-V(t)}} \\ &\le \bar\delta(t,\lambda).\end{aligned} \tag{3.9}$$

Au passage, on a utilisé les deux faits suivants : Pour tout réel positif y on a $y^{e^{-y}}\le 2$. La fonction $y\to\alpha^{e^{-y}}$ est croissante si $\alpha\in[0,1]$. Ainsi la preuve de (3.7) est achevée.

Soit maintenant t un réel positif et $\lambda\ell\ge e$ satisfaisant

$$C_0V(t)\frac{\log\lambda\ell}{\lambda\ell} < e^{1-e^{C_0V(t)}}. \tag{3.10}$$

Dans ces conditions on peut écrire, grâce au théorème 3.3.1 appliqué avec le champ $S_\lambda v$, que

$$\begin{aligned}|\psi_\lambda^{-1}(t)\circ\psi(t)(x)-x| &= |\psi_\lambda^{-1}(t,\psi(t,x))-\psi_\lambda^{-1}(t,\psi_\lambda(t,x))| \\ &\le e\ell\Big(\frac{\rho_\lambda(t,x)}{e\ell}\Big)^{e^{-\int_0^t\|S_\lambda v(s)\|_{LL}ds}},\end{aligned} \tag{3.11}$$

sous réserve que $\rho_\lambda(t,x)\le \ell e^{1-e^{\int_0^t\|S_\lambda v(s)\|_{LL}ds}}$. Or d'après (3.9) cette condition est satisfaite si

$$C_0V(t)\frac{\log\lambda\ell}{\lambda\ell e} \le e^{-\exp\big(\int_0^t(\|v(s)\|_{LL}+\|S_\lambda v(s)\|_{LL})ds\big)}. \tag{3.12}$$

Quitte à utiliser la caractérisation dyadique des élements de C_{LL} et à ajuster les constantes, on en déduit alors (3.12) grâce à (3.10). Enfin, on aura par l'intermédiaire des inégalités (3.9) et (3.11) l'estimation suivante

$$\begin{aligned}\forall x\in\mathbb{R}^d\ ;\quad |\psi_\lambda^{-1}(t)\circ\psi(t)(x)-x| &\le e\ell\Big(C_0V(t)\frac{\log\lambda\ell}{\lambda\ell e}\Big)^{e^{-C_0V(t)}} \\ &\le \bar\delta(t,\lambda).\end{aligned}$$

Concernant le second point, on utilise la décomposition suivante

$$\forall \tau, t \in \mathbb{R}_+; \quad \psi(t,x) = \psi_\tau(t, \psi(\tau,x)). \tag{3.13}$$

Ainsi, on déduit à partir de 2. et de l'identité (3.13) que

$$\begin{aligned} \psi_{\tau,\lambda}^{-1}(t) \circ \psi(t, A_h^c) &\subset \psi_{\tau,\lambda}^{-1} \circ \psi_\tau\big(t,(\psi(\tau, A))_{\delta(\tau,h)}^c\big) \\ &\subset \big(\psi(\tau, A)\big)_{\delta(\tau,h)-\bar{\delta}(t,\lambda)}^c. \end{aligned}$$

4. En utilisant successivement le premier point 1. du lemme 3.4.1 et l'identité (3.13) on aura l'inclusion suivante

$$\psi_{\tau,\lambda}\Big(t,\big(\psi(\tau, A)\big)_h^c\Big) \subset \psi_{\tau,\lambda} \circ \psi_\tau^{-1}\Big(t,\psi(t, A_{\delta(\tau,h)}^c)\Big).$$

D'autre part le second point 2. et la première partie du 3. du même lemme permettent d'avoir

$$\psi_{\tau,\lambda} \circ \psi_\tau^{-1}\Big(t,\psi(t, A_{\delta(\tau,h)}^c)\Big) \subset \big(\psi(t, A)\big)_{\delta(t,\delta(\tau,h))-\bar{\delta}(t,\lambda)}^c.$$

Enfin, on utilise le fait que $\delta^{(2)}(t,h) \leq \delta(\tau,\delta(t,h))$, pour $0 \leq \tau \leq t$ ainsi que l'inclusion

$$(\psi(t, A))_h^c \subset \big(\psi_\lambda(t, A)\big)_{h-\bar{\delta}(t,\lambda)}^c,$$

pour déduire que

$$\big(\psi(t, A)\big)_{\delta(t,\delta(\tau,h))-\bar{\delta}(t,\lambda)}^c \subset \big(\psi_\lambda(t, A)\big)_{\delta^{(2)}(t,h)-2\bar{\delta}(t,\lambda)}.$$

Le lemme 3.4.1 est ainsi démontré.

3.5 Décroissance exponentielle en temps petit

Nous allons dans cette section donner une preuve du théorème 3.2.2. Le plan de la démonstration s'organise de la manière suivante: on régularise en premier lieu le champ de vecteurs v_ν via l'opérateur S_λ défini par (3.6). Ensuite on tronque la solution par des fonctions exponentielles et on procède à une estimation d'énergie suivie d'une application du lemme 3.4.1. Enfin, on choisit judicieusement la valeur de λ en fonction des paramètres ν, t et ℓ et on détermine le domaine de variations des paramètres ν et h.

3.5.1 Estimation en dehors du support $F_{t,\nu}$

On commence par écrire le système (TD_ν) sous la forme suivante

$$\begin{cases} \partial_t a_\nu + S_\lambda v_\nu \cdot \nabla a_\nu - \nu\Delta a_\nu = (S_\lambda - \mathrm{Id})v_\nu \cdot \nabla a_\nu \\ a_{\nu|t=0} = a^0 \in L^p(\mathbb{R}^d). \end{cases}$$

On suppose dans ce qui suit que le support de la donnée initiale est un compact F_0 et l'on introduit la fonction g_λ, définie par:

$$g_\lambda(x) = \lambda \min\big\{\ell,\, \mathrm{dist}(x, F_0)\big\}.$$

Cette fonction joue un rôle important dans la première phase de la preuve car les troncatures que nous allons introduire sont modelées sur cette fonction. L'une de ses particularités est qu'elle est nulle sur F_0 et constante loin de cet ensemble mais elle est seulement lipschitzienne. Donc, pour mener un calcul sans avoir de souci de régularité, on la régularise par un noyau de convolution (θ_λ) de type

$$\theta_\lambda(x) = \lambda^d \theta(\lambda \ell x), \tag{3.14}$$

où θ est une fonction régulière supportée dans $B(0,\ell)$, prenant ses valeurs dans $[0,1]$ et vérifiant en plus $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^d} \theta(x)\frac{dx}{\ell^d} = 1$. On pose

$$f_\lambda = g_\lambda * \theta_\lambda.$$

Remarquons que la fonction f_λ est de classe C^∞. En outre, elle conserve "quasiment" les mêmes propriétés de g_λ. Par exemple pour tout λ supérieur à ℓ^{-1}, elle vaut $\lambda\ell$ sur $(F_0)^c_{2\ell}$. On associe à f_λ la fonction $\phi_{\lambda,\nu}$, qui décrit son évolution par le flot $\psi_{\lambda,\nu}$ du champ régularisé $S_\lambda v_\nu$. Elle a pour expression

$$\phi_{\lambda,\nu}(t,x) = f_\lambda(\psi^{-1}_{\lambda,\nu}(t,x)).$$

Posons $\Phi_{\lambda,\nu}(t,x) = \exp\big(\phi_{\lambda,\nu}(t,x)\big)$. Alors on peut voir facilement qu'elle est constante le long des lignes de flot de $S_\lambda v_\nu$. Par conséquent, elle vérifie l'équation

$$\begin{cases} \partial_t \Phi_{\lambda,\nu}(t,x) + S_\lambda v_\nu \cdot \nabla \Phi_{\lambda,\nu}(t,x) = 0 \\ \Phi_{\lambda,\nu}(0,x) = \exp(f_\lambda(x)). \end{cases}$$

Ainsi un calcul élémentaire montre que $a\Phi_{\lambda,\nu}$ vérifie l'équation suivante

$$\big(\partial_t + S_\lambda v_\nu \cdot \nabla - \nu\Delta\big)(a_\nu \Phi_{\lambda,\nu}) = \big((S_\lambda - \mathrm{Id})v_\nu \cdot \nabla a_\nu\big)\Phi_{\lambda,\nu} - \nu a_\nu \Delta \Phi_{\lambda,\nu} - 2\nu \nabla a_\nu \cdot \nabla \Phi_{\lambda,\nu}.$$

On fait le produit scalaire L^2 avec $a_\nu \Phi_{\lambda,\nu}|a_\nu \Phi_{\lambda,\nu}|^{p-2}$. Ensuite on recourt à des intégrations par parties utilisant div $S_\lambda v_\nu = 0$, et l'on obtient

$$\frac{1}{p}\frac{d}{dt}\|a_\nu \Phi_{\lambda,\nu}(t)\|^p_{L^p} + \nu(p-1)\big\|\nabla(a_\nu \Phi_{\lambda,\nu})|a_\nu \Phi_{\lambda,\nu}|^{\frac{p-2}{2}}\big\|^2_{L^2} = \sum_{j=1}^{3} I_j, \tag{3.15}$$

où l'on a posé

$$\begin{aligned} I_1 &= p^{-1}\int (S_\lambda v_\nu - v_\nu)\cdot \nabla\big(|a^p_\nu|\big)|\Phi_{\lambda,\nu}|^p dx, \\ I_2 &= -\nu \int |a_\nu|^p\, \Phi_{\lambda,\nu}|\Phi_{\lambda,\nu}|^{p-2}\Delta \Phi_{\lambda,\nu}\, dx, \\ I_3 &= -2\nu \int \nabla a_\nu \cdot \nabla \Phi_{\lambda,\nu}\;\; a_\nu \Phi_{\lambda,\nu}\big|a_\nu \Phi_{\lambda,\nu}\big|^{p-2}\, dx. \end{aligned}$$

En faisant une intégration par parties dans I_1 associée au fait que div $(S_\lambda - \mathrm{Id})v_\nu = 0$, on parvient alors à l'expression

$$I_1 = -\int (S_\lambda v_\nu - v_\nu)\cdot \nabla \Phi_{\lambda,\nu}\;\; \Phi_{\lambda,\nu}\big|\Phi_{\lambda,\nu}\big|^{p-2}|a_\nu|^p dx.$$

Ainsi le fait que $\nabla\Phi_{\lambda,\nu}(t,x) = \Phi_\lambda(t,x)\nabla\phi_{\lambda,\nu}(t,x)$, permet d'avoir

$$I_1 = -\int (S_\lambda v_\nu - v_\nu)\cdot\nabla\phi_{\lambda,\nu}|a_\nu\Phi_{\lambda,\nu}|^p dx. \tag{3.16}$$

En ce qui concerne le second terme I_2, on utilise l'identité

$$\Delta\Phi_{\lambda,\nu} = (\Delta\phi_{\lambda,\nu} + |\nabla\phi_{\lambda,\nu}|^2)\Phi_{\lambda,\nu},$$

qui entraîne

$$I_2 = -\nu\int |a_\nu\Phi_{\lambda,\nu}|^p(\Delta\phi_{\lambda,\nu} + |\nabla\phi_{\lambda,\nu}|^2)dx. \tag{3.17}$$

Pour évaluer I_3, on recourt dans une première étape à une simple intégration par parties et l'on trouve

$$I_3 = \frac{2\nu}{p}\int |a_\nu|^p \operatorname{div}(\nabla\phi_{\lambda,\nu}|\Phi_{\lambda,\nu}|^p)\, dx.$$

En développant un calcul simple, on parvient à l'identité

$$\operatorname{div}\big(\nabla\phi_{\lambda,\nu}|\Phi_{\lambda,\nu}|^p\big) = \big(\Delta\phi_{\lambda,\nu} + p|\nabla\phi_{\lambda,\nu}|^2\big)|\Phi_{\lambda,\nu}|^p.$$

Ce qui donne

$$I_3 = \frac{2\nu}{p}\int |a_\nu\Phi_{\lambda,\nu}|^p(\Delta\phi_{\lambda,\nu} + p|\nabla\phi_{\lambda,\nu}|^2)dx. \tag{3.18}$$

Si on reporte dans (3.15) les nouvelles expressions des I_j données par (3.16), (3.17) et (3.18), alors on aura

$$\begin{aligned}\frac{1}{p}\frac{d}{dt}\|a_\nu\Phi_{\lambda,\nu}(t)\|_{L^p}^p &+ \nu(p-1)\big\|\nabla(a_\nu\Phi_{\lambda,\nu})|a_\nu\Phi_{\lambda,\nu}|^{\frac{p-2}{2}}\big\|_{L^2}^2 = \\ &- \int (S_\lambda v_\nu - v_\nu)\cdot\nabla\phi_{\lambda,\nu}|a_\nu\Phi_{\lambda,\nu}|^p dx \\ &+ \nu\int |a_\nu\Phi_{\lambda,\nu}|^p\big((\frac{2}{p}-1)\Delta\phi_{\lambda,\nu} + |\nabla\phi_{\lambda,\nu}|^2\big)\, dx.\end{aligned}$$

Ainsi on en déduit l'estimation

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\|a_\nu\Phi_{\lambda,\nu}(t)\|_{L^p}^p \le p\Big(\|S_\lambda v_\nu(t) - v_\nu(t)\|_{L^\infty}\|\nabla\phi_{\lambda,\nu}(t)\|_{L^\infty} &+ \nu\big(\|\nabla\phi_\lambda(t)\|_{L^\infty}^2 + \|\Delta\phi_{\lambda,\nu}\|_{L^\infty}\big)\Big) \\ &\times \|a_\nu\Phi_{\lambda,\nu}(t)\|_{L^p}^p.\end{aligned} \tag{3.19}$$

Dans le but de pouvoir appliquer le lemme de Gronwall, nous allons fournir des estimations L^∞ de $\nabla\phi_{\lambda,\nu}$ et $\Delta\phi_{\lambda,\nu}$. Les lois de dérivations et d'estimations dans un produit de convolution et le fait que $\|\nabla g_\lambda\|_{L^\infty} \le \lambda$, permettent d'avoir

$$\begin{aligned}\|\nabla\phi_{\lambda,\nu}(t)\|_{L^\infty} &\le \|\nabla f_\lambda\|_{L^\infty}\|\nabla\psi_{\lambda,\nu}^{-1}(t)\|_{L^\infty}, \\ &\le \lambda\|\nabla\psi_{\lambda,\nu}^{-1}(t)\|_{L^\infty}.\end{aligned} \tag{3.20}$$

De même, on a l'estimation

$$\begin{aligned}\|\nabla^2\phi_{\lambda,\nu}\|_{L^\infty} &\le \|\nabla^2 f_\lambda\|_{L^\infty}\|\nabla\psi_{\lambda,\nu}^{-1}\|_{L^\infty}^2 + \|\nabla f_\lambda\|_{L^\infty}\|\nabla^2\psi_{\lambda,\nu}^{-1}\|_{L^\infty} \\ &\le \|\nabla g_\lambda\|_{L^\infty}\|\nabla\theta_\lambda\|_{L^1}\|\nabla\psi_{\lambda,\nu}^{-1}\|_{L^\infty}^2 + \lambda\|\nabla^2\psi_{\lambda,\nu}^{-1}\|_{L^\infty} \\ &\le C\lambda^2\|\nabla\psi_{\lambda,\nu}^{-1}\|_{L^\infty}^2 + \lambda\|\nabla^2\psi_{\lambda,\nu}^{-1}\|_{L^\infty}.\end{aligned} \tag{3.21}$$

Afin de parvenir à notre objectif, il nous reste d'établir des estimations sur les dérivées premières et secondes de l'inverse du flot. Le lemme 3.3.3 et le théorème 3.3.1 impliquent que pour tout temps positif t, on a

$$\begin{aligned}\|\nabla\psi_{\lambda,\nu}^{-1}(t)\|_{L^\infty} &\leq e^{\int_0^t \|\nabla S_\lambda v_\nu(s)\|_{L^\infty} ds}\\ &\leq (\lambda\ell)^{C_0 V_\nu(t)}.\end{aligned} \tag{3.22}$$

En conséquence des estimations (3.20) et (3.22), on a pour tout t positif

$$\|\nabla\phi_{\lambda,\nu}(t)\|_{L^\infty} \leq \lambda(\lambda\ell)^{C_0 V_\nu(t)}. \tag{3.23}$$

Concernant $\nabla^2\psi_{\lambda,\nu}^{-1}$, on dérive deux fois l'équation de transport qui régit $\psi_{\lambda,\nu}^{-1}$ et on applique la méthode des caractéristiques suivie du lemme de Gronwall et du lemme 3.3.3. On obtient alors que pour tout temps positif t

$$\|\nabla^2\psi_{\lambda,\nu}^{-1}(t)\|_{L^\infty} \leq 2\int_0^t \|\nabla S_\lambda v_\nu(s)\|_{L^\infty}\|\nabla^2\psi_{\lambda,\nu}^{-1}(s)\|_{L^\infty} ds + \int_0^t \|\nabla^2 S_\lambda v_\nu(s)\|_{L^\infty}\|\nabla\psi_{\lambda,\nu}^{-1}(s)\|_{L^\infty} ds, \tag{3.24}$$

ce qui permet d'obtenir, via l'inégalité (3.22) et les lemmes de Gronwall et Bernstein, l'estimation

$$\begin{aligned}\|\nabla^2\psi_{\lambda,\nu}^{-1}\|_{L^\infty} &\leq C\lambda(\lambda\ell)^{3C_0 V(t)}\int_0^t e^{-2\int_0^\tau \|\nabla S_\lambda v_\nu(\tau')\|_{L^\infty} d\tau'}\|\nabla S_\lambda v_\nu(\tau)\|_{L^\infty} d\tau\\ &\leq C\lambda(\lambda\ell)^{3C_0 V_\nu(t)}.\end{aligned} \tag{3.25}$$

Si on insère les inégalités (3.22) et (3.25) dans l'estimation (3.21), alors on aura

$$\|\nabla^2\phi_{\lambda,\nu}(t)\|_{L^\infty} \leq C\lambda^2(\lambda\ell)^{3C_0 V_\nu(t)}. \tag{3.26}$$

Ainsi l'inégalité différentielle (3.19) qui régit l'énergie L^p peut se réécrire, via (3.23) et (3.26), sous la forme

$$\frac{d}{dt}\|a_\nu\Phi_{\lambda,\nu}(t)\|_{L^p}^p \leq C\,p\Big(\|v_\nu(t)\|_{LL}(\lambda\ell)^{C_0 V_\nu(t)}\ln\lambda\ell + \nu\lambda^2(\lambda\ell)^{3C_0 V_\nu(t)}\Big)\|a\Phi_{\lambda,\nu}(t)\|_{L^p}^p.$$

Une application du Lemme de Gronwall associée à l'observation

$$C_0\log(\lambda\ell)\int_0^t \|v_\nu(t')\|_{LL}(\lambda\ell)^{C_0 V_\nu(t')}dt' = (\lambda\ell)^{C_0 V_\nu(t)} - 1,$$

permet d'établir le résultat qui suit

$$\|a_\nu\Phi_{\lambda,\nu}(t)\|_{L^p} \leq \|a^0 e^{f_\lambda}\|_{L^p}\exp C\Big((\lambda\ell)^{C_0 V_\nu(t)} + \nu t\lambda^2(\lambda\ell)^{3C_0 V_\nu(t)}\Big). \tag{3.27}$$

Au passage, on a utilisé le fait que $t \to \lambda^{\alpha V(t)}$ est croissante pour tout réel positif α et pour tout $\lambda \geq 1$. Dans une première étape, on va montrer l'existence d'une constante strictement positive, notée toujours C, telle qu'on ait

$$\sup_{\lambda>0}\|e^{f_\lambda}\|_{L^\infty(F_0)} \leq C. \tag{3.28}$$

Pour ce faire, il suffit de montrer que pour tout $\lambda > 0$,

$$\|g_\lambda * \theta_\lambda - g_\lambda\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)} \leq C. \tag{3.29}$$

Cette alternative est justifiée par le fait que la fonction g_λ est, par construction, nulle sur F_0. Pour prouver (3.29), on écrit la différence sous une forme intégrale et on se sert du fait que la fonction g_λ est $\lambda-$lipschitzienne :

$$\begin{aligned}\Big|f_\lambda(x) - g_\lambda(x)\Big| &= \Big|\int (g_\lambda(x-y) - g_\lambda(x))\theta_\lambda(y)dy\Big|\\ &\leq \lambda \int |y|\theta_\lambda(y)dy = \ell^{-1-d}\int |y|\theta(y)dy.\end{aligned}$$

Ainsi la preuve de (3.29) est achevée. En reportant (3.29) dans (3.27), on parvient à l'inégalité

$$\|a_\nu \Phi_{\lambda,\nu}(t)\|_{L^p(\psi_\nu(t,(F_0)^c_{\delta_\nu(t,h)}))} \leq C\|a^0\|_{L^p} \exp C\Big((\lambda\ell)^{C_0V_\nu(t)} + \nu t\lambda^2(\lambda\ell)^{3C_0V_\nu(t)}\Big). \tag{3.30}$$

À ce stade de la démonstration, il s'agit de minorer adéquatement $\Phi_{\lambda,\nu}(t,\cdot)$ uniformément sur l'ensemble $\psi_\nu\big(t,(F_0)^c_{\delta_\nu(t,h)}\big)$. Pour y parvenir, rappelons tout d'abord l'inclusion citée dans la partie 3. du lemme 3.4.1 et qui est donnée, sous les mêmes conditions sur ν et h, par

$$\psi^{-1}_{\lambda,\nu}(t) \circ \psi_\nu\big(t,(F_0)^c_{\delta_\nu(t,h)}\big) \subset (F_0)^c_{\delta_\nu(t,h)-\bar{\delta}_\nu(t,\lambda)}. \tag{3.31}$$

Par conséquent, pour tout x appartenant à l'ensemble $\psi_\nu\big(t,(F_0)^c_{\delta_\nu(t,h)}\big)$, on a

$$g_\lambda(\psi^{-1}_{\lambda,\nu}(t,x)) \geq \lambda(\delta_\nu(t,h) - \bar{\delta}_\nu(t,\lambda)). \tag{3.32}$$

Ainsi en combinant les inégalités (3.29) et (3.32), on trouve que pour tout $x \in \psi_\nu\big(t,(F_0)^c_{\delta_\nu(t,h)}\big)$

$$\Phi_{\lambda,\nu}(t,x) \geq e^{\lambda(\delta_\nu(t,h)-\bar{\delta}_\nu(t,\lambda))-C}. \tag{3.33}$$

En reportant (3.33) dans (3.30) et en utilisant l'inclusion $(F_{t,\nu})^c_h \subset \psi_\nu\big(t,(F_0)^c_{\delta_\nu(t,h)}\big)$, on aboutit à

$$\begin{aligned}\Big\|a_\nu(t)\Big\|_{L^p((F_{t,\nu})^c_h)} \leq\ & C\Big\|a^0\Big\|_{L^p} \exp\Bigg(C\lambda\ell\Big((\lambda\ell)^{(C_0V_\nu(t)-1)} + \frac{\nu t}{\ell^2}(\lambda\ell)^{1+3C_0V_\nu(t)} \\ &+ \frac{\bar{\delta}_\nu(t,\lambda) - \delta_\nu(t,h)}{C\ell}\Big)\Bigg).\end{aligned} \tag{3.34}$$

En contemplant l'expression (3.34) et essentiellement la quantité qui est à l'intérieure de l'exponentielle, on tire deux faits importants qui vont permettre d'établir un résultat local de décroissance exponentielle. Le premier fait concerne la possibilité d'avoir une puissance négative dans la quantité $(\lambda\ell)^{C_0V(t)-1}$ mais uniquement pour des temps proches de zéro. Alors que le second est relié à la présence d'une quantité négative de type $-\delta_\nu(t,h)$.
Ainsi, la contrainte $C_0V(t) < 1$ paraît inévitable pour assurer la décroissance. Désormais, on se restreint à des temps satisfaisant la condition qu'on vient de mentionner et on choisit λ de la manière suivante

$$\lambda\ell = \Big(\frac{\ell^2}{\nu t}\Big)^{\frac{1}{2+2C_0V_\nu(t)}}. \tag{3.35}$$

En injectant (3.35) dans (3.34), on obtient

$$\|a_\nu(t)\|_{L^p((F_{t,\nu})^c_h)} \leq C\|a^0\|_{L^p} \exp\left(\left(\frac{\ell^2}{\nu t}\right)^{\frac{1}{2+2C_0V_\nu(t)}}\left(C\left(\frac{\nu t}{\ell^2}\right)^{\frac{1-C_0V_\nu(t)}{2+2C_0V(t)}} + \frac{\bar{\delta_\nu}(t,\lambda) - \delta_\nu(t,h)}{\ell}\right)\right).$$

Si l'on impose successivement les conditions suivantes

$$\bar{\delta_\nu}(t,\lambda) \leq \frac{1}{2}\delta_\nu(t,h) \quad \text{et} \quad \left(\frac{\nu t}{\ell^2}\right)^{\frac{1-C_0V_\nu(t)}{4}} \leq \frac{\delta_\nu(t,h)}{4C\ell}, \tag{3.36}$$

alors on obtient l'estimation

$$\|a_\nu(t)\|_{L^p\left((F_{t,\nu})^c_h\right)} \leq \|a^0\|_{L^p} \exp\left(-\left(\frac{\ell^2}{\nu t}\right)^{\frac{1}{2+2C_0V(t)}}\frac{\delta_\nu(t,h)}{4\ell}\right). \tag{3.37}$$

Il suffit maintenant de remplacer $\delta_\nu(t,h)$ par son expression pour déduire l'estimation figurant dans le théorème 3.2.2. Occupons-nous dans cette phase ultime de la preuve des conditions que doivent satisfaire les paramètres ν, λ et h. Elles sont données par

$$C_0V_\nu(t)\frac{\log \lambda\ell}{\lambda\ell} \leq e^{1-\exp C_0V_\nu(t)}, \ \lambda\ell = \left(\frac{\ell^2}{\nu t}\right)^{\frac{1}{2+2C_0V_\nu(t)}} \geq e \quad \text{et} \quad (3.36). \tag{3.38}$$

On rappelle que la première condition est dictée par la partie 3. du lemme 3.4.1.
Sachant que pour tout x positif, on a

$$\log x \leq \sqrt{x},$$

alors la première condition mentionnée dans (3.38) est satisfaite du moment que

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda\ell}} \leq \frac{e^{1-\exp C_0V_\nu(t)}}{C_0V_\nu(t)}.$$

En remplaçant dans cette inégalité $\lambda\ell$ par son expression, on trouve que

$$0 \leq \frac{\nu t}{\ell^2} \leq \left(\frac{e^{1-e^{C_0V_\nu(t)}}}{C_0V_\nu(t)}\right)^{4+4C_0V_\nu(t)}.$$

Or $C_0V_\nu(t) \leq 1$. Donc en prenant l'infimum de la quantité de droite, on voit qu'il suffit de prendre ν tel que

$$0 \leq \frac{\nu t}{\ell^2} \leq e^{-8e} \quad \text{et} \quad t \in [0,T_\nu]. \tag{3.39}$$

D'un autre côté, la première condition figurant dans (3.36) est réalisée si l'on impose

$$\frac{\nu t}{\ell^2} \leq \left(\frac{\delta_\nu(t,h)}{4e\ell}\right)^{8e}.$$

Cette contrainte est moins forte que celle déduite à partir de la seconde condition mentionnée dans (3.36). Celle dont il s'agit est décrite par

$$\frac{\nu t}{\ell^2} \leq \left(\frac{\delta_\nu(t,h)}{C\ell}\right)^{\frac{C}{1-C_0V(t)}}. \tag{3.40}$$

Enfin quitte à prendre C suffisamment grande, la condition (3.39) devient alors une conséquence immédiate de (3.40). Ceci permet de retrouver la condition (3.2) mentionnée dans le théorème 3.2.2 et d'achever ainsi la preuve de la premième partie.

3.5.2 Estimation à l'intérieur du support $F_{t,\nu}$

Pour démontrer un résultat de décroissance à l'intérieur de l'ensemble $F_{t,\nu}$, nous allons suivre une démarche similaire à la preuve précédente. La seule importante modification à souligner concerne les fonctions de troncature. Nous devons tronquer les fonctions de localisation exponentielle par des fonctions supportées dans $F_{t,\nu}$. Ce qui sera à l'origine de nouveau termes qui ne vont pas heureusement nous gêner. Pour commencer, signalons que $\mathbf{1}_{F_{t,\nu}^{\lambda}} = \mathbf{1}_{\psi_{\lambda,\nu}(t,F_0)}$ est solution de l'équation de transport

$$\begin{cases} \partial_t u + S_\lambda v_\nu \cdot \nabla u = 0 \\ u_{|t=0} = \mathbf{1}_{F_0}. \end{cases}$$

On introduit les fonctions suivantes :

$$\Psi_\nu(t,x) = a_\nu(t,x) - \mathbf{1}_{F_{t,\nu}}, \; \Psi_{\lambda,\nu}(t,x) = a_\nu(t,x) - \mathbf{1}_{F_{t,\nu}^{\lambda}} \quad \text{et} \quad \Phi_{\lambda,\nu}(t,x) = \phi_\lambda(\psi_{\lambda,\nu}^{-1}(t,x)),$$

où $\psi_{\lambda,\nu}$ (à ne pas confondre avec les notations du lemme 3.4.1) désigne le flot associé au champ de vecteurs $S_\lambda v_\nu$ et ϕ_λ est donnée par

$$g_\lambda(x) = \lambda \min\left\{\ell, \operatorname{dist}(x, F_0^c)\right\} \quad \text{et} \quad \phi_\lambda = \chi \exp\left(g_\lambda * \theta_\lambda\right) = \chi \exp f_\lambda,$$

avec $(\theta_\lambda)_\lambda$ le noyau régularisant déjà introduit dans (3.14) et χ une fonction appartenant à l'espace $\mathcal{D}((F_0^c)_{h_0})$, à valeurs dans $[0,1]$ construite de la manière suivante :
Pour tout réel h_0 qui sera fixé ultérieurement en fonction des variables t, h et λ. On prend $\widetilde{\chi}$ une fonction de $\mathcal{D}(B(0,\frac{1}{2}))$ d'intégrale égale à 1 et on définit la fonction

$$\chi(x) = \frac{1}{h_0^d}\widetilde{\chi}(h_0^{-1}\cdot) * \mathbf{1}_{(F_0^c)_{\frac{3h_0}{2}}}(x).$$

Alors, en posant $C = \|\nabla\widetilde{\chi}\|_{L^1}$, on constate que la fonction χ vérifie $\chi \equiv 1$ sur $(F_0^c)_{2h_0}$ et

$$\|\nabla\chi\|_{L^\infty} \leq Ch_0^{-1}, \; \|\nabla^2\chi\|_{L^\infty} \leq Ch_0^{-2}.$$

Nous allons désormais travailler sous les conditions suivantes :

$$2h_0 \leq \delta_\nu(t,h) - \bar{\delta_\nu}(t,\lambda) \quad \text{et} \quad \frac{1}{\lambda} \leq Ch_0. \tag{3.41}$$

On verra au fil des pages suivantes les véritables raisons qui sont à la base de ces choix. Pour faciliter la manipulation, on introduit les notations :

$$\chi_{\lambda,\nu}(t) = \chi(\psi_{\lambda,\nu}^{-1}(t)) \quad \text{et} \quad \phi_{\lambda,\nu}(t) = f_\lambda(\psi_{\lambda,\nu}^{-1}(t)).$$

Comme le support de ϕ_λ est inclus dans l'intérieur de F_0, alors le support de $\Phi_{\lambda,\nu}(t)$ est inclus dans l'intérieur de $F_{t,\nu}^{\lambda}$. Donc

$$\Phi_{\lambda,\nu}\Delta\Psi_{\lambda,\nu} = \Phi_{\lambda,\nu}\Delta a_\nu \quad \text{et} \quad \Phi_{\lambda,\nu}\nabla\Psi_{\lambda,\nu} = \Phi_{\lambda,\nu}\nabla a_\nu.$$

Or la fonction $\Phi_{\lambda,\nu}$ est conservée le long des lignes de flot $\psi_{\lambda,\nu}$. Donc elle vérifie l'équation de transport

$$\partial_t\Phi_{\lambda,\nu} + S_\lambda v_\nu \cdot \nabla\Phi_{\lambda,\nu} = 0.$$

Il s'ensuit que l'équation vérifi ee par $\Phi_\lambda \Psi_{\lambda,\nu}$ est donnée par

$$(\partial_t + S_\lambda v_\nu \cdot \nabla - \nu\Delta)(\Phi_{\lambda,\nu}\Psi_{\lambda,\nu}) = ((S_\lambda v_\nu - v_\nu)\cdot \nabla\Psi_{\lambda,\nu})\Phi_{\lambda,\nu} - 2\nu\nabla\Phi_{\lambda,\nu}\cdot\nabla\Psi_{\lambda,\nu} - \nu\Psi_{\lambda,\nu}\Delta\Phi_{\lambda,\nu}.$$

En faisant une estimation d'énergie de type L^p, analogue à celle utilisée dans la première partie, on aboutit à l'inégalité

$$\frac{1}{p}\frac{d}{dt}\|\Phi_{\lambda,\nu}\Psi_{\lambda,\nu}(t)\|_{L^p}^p \leq \|S_\lambda v_\nu(t) - v_\nu(t)\|_{L^\infty} I_1(t) + 2\nu p^{-1} I_2(t) + \nu I_3(t), \tag{3.42}$$

avec

$$\begin{aligned} I_1(t) &= \int_{\mathbb{R}^d} |\Psi_{\lambda,\nu}(t,x)|^p |\Phi_{\lambda,\nu}|^{p-1}|\nabla\Phi_{\lambda,\nu}(t,x)|dx,\\ I_2(t) &= \int_{\mathbb{R}^d} |\Psi_{\lambda,\nu}(t,x)|^p \ \ |\mathrm{div}\ (\Phi_{\lambda,\nu}|\Phi_{\lambda,\nu}|^{p-2}\nabla\Phi_{\lambda,\nu})|dx,\\ I_3(t) &= \int_{\mathbb{R}^d} |\Psi_{\lambda,\nu}(t,x)|^p |\Phi_{\lambda,\nu}^{p-1}\Delta\Phi_{\lambda,\nu}(t,x)|dx. \end{aligned}$$

Estimation de $I_1(t)$.

En revenant à l'expression de $\Phi_{\lambda,\nu}$ et en développant son gradient, on obtient suite à quelques majorations élémentaires

$$\begin{aligned} I_1(t) \leq\ & \|\nabla\psi_{\lambda,\nu}^{-1}\|_{L^\infty}\Big(\int_{\mathbb{R}^d}|\Psi_{\lambda,\nu}(t,x)|^p|\Phi_{\lambda,\nu}(t,x)|^{p-1}|\nabla\chi(\psi_{\lambda,\nu}^{-1}(t,x))|e^{f_\lambda(\psi_{\lambda,\nu}^{-1}(t,x))}dx + \\ & +\|\nabla f_\lambda\|_{L^\infty}\|\Psi_{\lambda,\nu}\Phi_{\lambda,\nu}(t)\|_{L^p}^p\Big). \end{aligned} \tag{3.43}$$

En faisant le changement de variable $x \to \psi_{\lambda,\nu}(t,x)$ qui préserve la mesure et en tenant compte du fait que $\nabla\chi$ est nul à une distance de ∂F_0 supérieure à $2h_0$, alors la première intégrale majorant $I_1(t)$ peut être dominée par

$$Ch_0^{-1}\|\phi_\lambda^{p-1}e^{f_\lambda}\|_{L^\infty((\partial F_0^c)_{2h_0})}\|\Psi_{\lambda,\nu}(t)\|_{L^p}^p. \tag{3.44}$$

Or, on établit d'une manière similaire à (3.29) que $\|e^{f_\lambda - g_\lambda}\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)} \leq C$. Il s'ensuit que

$$\|\phi_\lambda^{p-1}e^{f_\lambda}\|_{L^\infty((\partial F_0^c)_{2h_0})} \leq C^p e^{2p\lambda h_0}. \tag{3.45}$$

D'autre part, une estimation d'énergie L^p permet d'avoir

$$\|\Psi_{\lambda,\nu}(t)\|_{L^p} \leq 2\|a^0\|_{L^p}. \tag{3.46}$$

Ainsi en reportant les inégalités (3.44), (3.45 et (3.46) dans l'estimation (3.43), on obtient

$$\begin{aligned} I_1(t) &\leq \lambda(\lambda\ell)^{C_0V_\nu(t)}\|\Phi_{\lambda,\nu}\Psi_{\lambda,\nu}(t)\|_{L^p}^p + C^p h_0^{-1}(\lambda\ell)^{C_0V_\nu(t)}e^{2p\lambda h_0}\|a^0\|_{L^p}^p\\ &\leq (\lambda\ell)^{1+C_0V_\nu(t)}\Big(\|\Phi_{\lambda,\nu}\Psi_{\lambda,\nu}(t)\|_{L^p}^p + e^{Cp\lambda h_0}\|a^0\|_{L^p}^p\Big), \quad \text{grâce à (3.41)}. \end{aligned} \tag{3.47}$$

Estimation de $I_2(t)$.

Pour estimer convenablement I_2, on utilise les identités suivantes qui se démontrent sans aucune peine.

$$\operatorname{div}\left(\Phi_{\lambda,\nu}|\Phi_{\lambda,\nu}|^{p-2}\nabla\Phi_{\lambda,\nu}\right) = \Phi_{\lambda,\nu}|\Phi_{\lambda,\nu}|^{p-2}\Delta\Phi_{\lambda,\nu} + (p-1)|\Phi_{\lambda,\nu}|^{p-2}|\nabla\Phi_{\lambda,\nu}|^2, \tag{3.48}$$
$$\nabla\Phi_{\lambda,\nu}(t) = e^{\phi_{\lambda,\nu}(t)}\nabla\chi_{\lambda,\nu}(t) + \Phi_{\lambda,\nu}\nabla\phi_{\lambda,\nu}(t),$$
$$\Delta\Phi_{\lambda,\nu}(t) = \Phi_{\lambda,\nu}\big(\Delta\phi_{\lambda,\nu}(t) + |\nabla\phi_{\lambda,\nu}(t)|^2\big) + e^{\phi_{\lambda,\nu}(t)}\Delta\chi_{\lambda,\nu}(t) + 2e^{\phi_{\lambda,\nu}(t)}\nabla\chi_{\lambda,\nu}(t)\cdot\nabla\phi_{\lambda,\nu}(t).$$

Ainsi, en combinant ces inégalités et en se servant du fait que la fonction $\chi_{\lambda,\nu}$ est bornée par 1, alors on parvient à la majoration

$$|\operatorname{div}\left(\Phi_{\lambda,\nu}|\Phi_{\lambda,\nu}|^{p-2}\nabla\Phi_{\lambda,\nu}\right)| \leq 2p\bigg(|\Phi_{\lambda,\nu}(t)|^p\Big(|\Delta\phi_{\lambda,\nu}(t)| + |\nabla\phi_{\lambda,\nu}(t)|^2\Big)$$
$$+|\Phi_{\lambda,\nu}|^{p-2}e^{2\phi_{\lambda,\nu}(t)}\Big(|\Delta\chi_{\lambda,\nu}(t)| + |\nabla\chi_{\lambda,\nu}(t)|^2 + |\nabla\chi_{\lambda,\nu}\cdot\nabla\phi_{\lambda,\nu}(t)|\Big)\bigg).$$

Or grâce aux l'inégalités (3.23) et (3.26), on a

$$|\Delta\phi_{\lambda,\nu}(t)| + |\nabla\phi_{\lambda,\nu}(t)|^2 \leq C\lambda^2(\lambda\ell)^{3C_0V_\nu(t)}. \tag{3.49}$$

D'autre part, en imitant les estimations de $\phi_{\lambda,\nu}$ décrites par (3.23) et (3.26) et en utilisant (3.41), on trouve

$$\begin{aligned}|\Delta\chi_{\lambda,\nu}(t)| + |\nabla\chi_{\lambda,\nu}(t)|^2 + |\nabla\chi_{\lambda,\nu}\cdot\nabla\phi_{\lambda,\nu}(t)| &\leq C\Big(\frac{1+\lambda h_0}{h_0^2}\Big)(\lambda\ell)^{3C_0V_\nu(t)}\\ &\leq C\lambda^2(\lambda\ell)^{3C_0V_\nu(t)}.\end{aligned} \tag{3.50}$$

En méditant les identités (3.48), on constate que les dérivations de $\chi_{\lambda,\nu}$ sont toujours associées à des quantités de type $e^{\phi_{\lambda,\nu}}$. Ce fait permet de reproduire les arguments qu'on a utilisés dans le passage (3.43) à (3.44). Ce qui permet d'obtenir, via les inégalités (3.49) et (3.50), l'estimation qui suit :

$$I_2 \leq C\,p\,\lambda^2(\lambda\ell)^{3C_0V_\nu(t)}\Big(\|\Psi_{\lambda,\nu}\Phi_{\lambda,\nu}(t)\|_{L^p}^p + e^{Cp\lambda h_0}\|a^0\|_{L^p}^p\Big).\blacksquare \tag{3.51}$$

Concernant l'intégrale $I_3(t)$, elle se majore exactement comme I_2 et du coup en reportant les inégalités (3.47) et (3.51) dans (3.42), on aboutit à l'inégalité différentielle

$$\frac{d}{dt}\|\Psi_{\lambda,\nu}\Phi_{\lambda,\nu}(t)\|_{L^p}^p \leq \alpha_{\lambda,\nu}(t)\|\Psi_{\lambda,\nu}\Phi_{\lambda,\nu}(t)\|_{L^p}^p + \alpha_{\lambda,\nu}(t)e^{Cp\lambda h_0}\|a^0\|_{L^p}^p, \tag{3.52}$$

où l'on a posé

$$\alpha_{\lambda,\nu} = Cp\big(\|v_\nu(t)\|_{LL}(\lambda\ell)^{C_0V_\nu(t)}\ln\lambda\ell + \nu\lambda^2(\lambda\ell)^{3C_0V_\nu(t)}\big).$$

Il suffit à ce stade d'appliquer le lemme de Gronwall à (3.52) et d'utiliser le fait que $\Psi_{\lambda,\nu}(0,x) = 0$, pour déduire enfin que

$$\|\Phi_\lambda \Psi_\lambda(t)\|_{L^p}^p \leq e^{C\,p\lambda h_0}\ \|a^0\|_{L^p}^p\ e^{\int_0^t \alpha_{\lambda,\nu}(s)ds}.$$

Donc, après un calcul élémentaire, nous trouvons

$$\|\Phi_{\lambda,\nu}\Psi_{\lambda,\nu}(t)\|_{L^p\big((F^c_{t,\nu})_h\big)} \leq \|a^0\|_{L^p} \exp C\Big((\lambda\ell)^{C_0V_\nu(t)} + \nu t\lambda^2(\lambda\ell)^{3C_0V_\nu(t)} + \lambda h_0\Big). \tag{3.53}$$

Il s'agit maintenant de se procurer une minoration de la quantité de gauche dans (3.53). Pour ce faire, nous allons établir que pour tout x pris dans l'ensemble $(F^c_{t,\nu})_h$, on a

$$\Phi_{\lambda,\nu}(t,x) \geq ce^{\lambda(\delta_\nu(t,h)-\bar{\delta_\nu}(t,\lambda))}. \tag{3.54}$$

En effet, en revenant à la partie 1. du lemme 3.4.1, on récupère l'inclusion suivante :

$$(F^c_{t,\nu})_h = (F^c_{t,\nu})^c_{\tilde{h}} \subset \psi_\nu(t,(F^c_0)^c_{\delta_\nu(t,h)}) = \psi_\nu(t,(F^c_0)_{\delta_\nu(t,h)}). \tag{3.55}$$

Ainsi donc pour avoir (3.54) il suffit de la vérifier pour les éléments x appartenant à $\psi_\nu\big(t,(F^c_0)_{\delta_\nu(t,h)}\big)$. Pour cela, nous allons commencer par la constatation suivante et qui était l'objet de la partie 3. du lemme 3.4.1 :

$$\psi^{-1}_{\lambda,\nu}(t) \circ \psi_\nu(t,(F^c_0)_{\delta_\nu(t,h)}) \subset (F^c_0)_{\delta_\nu(t,h)-\bar{\delta_\nu}(t,\lambda)}. \tag{3.56}$$

Ainsi pour tout x appartenant à $\psi_\nu\big(t,(F^c_0)_{\delta_\nu(t,h)}\big)$, on a

$$g_\lambda\big(\psi^{-1}_{\lambda,\nu}(t,x)\big) \geq \lambda\big(\delta_\nu(t,h) - \bar{\delta_\nu}(t,\lambda)\big). \tag{3.57}$$

D'autre part, la condition (3.41) combinée avec (3.56) montre que pour tout élément x choisi dans l'ensemble $\psi_\nu\big(t,(F^c_0)_{\delta_\nu(t,h)}\big)$, on a

$$\chi_{\lambda,\nu}(t,x) = 1. \tag{3.58}$$

Par suite, l'estimation (3.54) devient une conséquence directe de (3.29), (3.57) et (3.58).
Faisons maintenant le choix suivant :

$$h_0 = \frac{\delta_\nu(t,h) - \bar{\delta}_\nu(t,\lambda)}{2C}. \tag{3.59}$$

Il s'ensuit que la combinaison des inégalités (3.53) et (3.54) permet de tirer la conclusion ci-après.

$$\|\Psi_{\lambda,\nu}(t)\|_{L^p((F^c_{t,\nu})_h)} \leq \|a^0\|_{L^p} \exp\left(C\lambda\ell\Big((\lambda\ell)^{C_0V_\nu(t)-1} + \frac{\nu t}{\ell^2}(\lambda\ell)^{1+3C_0V_\nu(t)} - \frac{\delta_\nu(t,h) - \bar{\delta_\nu}(t,\lambda)}{2\ell}\Big)\right). \tag{3.60}$$

Choisissons maintenant λ de la manière suivante :

$$\lambda\ell = \big(\frac{\nu t}{\ell^2}\big)^{\frac{-1}{2+2C_0V_\nu(t)}}. \tag{3.61}$$

Ensuite on reporte cette expression dans (3.60) et on achève la preuve d'une manière similaire à la finition de la première partie, et l'on trouve que sous la même condition (3.40) imposée à ν et h, on a

$$\big\|a_\nu(t) - \mathbf{1}_{F^\lambda_{t,\nu}}\big\|_{L^p((F^c_{t,\nu})_h)} \leq \|a^0\|_{L^p} \exp\Big(-\big(\frac{\ell^2}{\nu t}\big)^{\frac{1}{2+2C_0V(t)}}\frac{\delta_\nu(t,h)}{4\ell}\Big). \tag{3.62}$$

L'estimation (3.62) n'est pas encore sous la forme souhaitée. Nous devons trouver un moyen qui nous permet de se débarrasser du λ résiduel. Ce que nous allons montrer est la chose suivante : sous des conditions supplémentaires sur λ, donc sur ν, on peut remplacer dans l'estimation précédente $\mathbf{1}_{F_{t,\nu}^{\lambda}}$ par $\mathbf{1}_{F_{t,\nu}}$. Plus précisément, on va établir que, pour tout λ grand devant h^{-1}, on a

$$(F_{t,\nu}^{c})_h \subset F_{t,\nu}^{\lambda}. \tag{3.63}$$

Pour ce faire, on utilise principalement la convergence uniforme du flot régularisé $\psi_{\lambda,\nu}(t)$ vers le flot $\psi_\nu(t)$. En effet, un calcul simple mène à l'inclusion

$$(F_{t,\nu}^{c})_h \subset ((F_{t,\nu}^{\lambda})^c)_{h-\|\psi_{\lambda,\nu}(t)-\psi_\nu(t)\|_{L^\infty}}.$$

Or d'après (3.7), on sait que si

$$C_0 V_\nu(t)\frac{\log\lambda\ell}{\lambda\ell} \leq e^{-e^{V_\nu(t)}},$$

alors

$$\|\psi_{\lambda,\nu}(t)-\psi_\nu(t)\|_{L^\infty} \leq Ce\ell\Big(\frac{\log\lambda\ell}{\lambda\ell}\Big)^{e^{-V_\nu(t)}}.$$

Ainsi (3.63) a lieu si

$$\frac{\log\lambda\ell}{\lambda\ell} \leq e^{-\exp\frac{1}{C_0}} \quad \text{et} \quad Ce\ell\Big(\frac{\log\lambda\ell}{\lambda\ell}\Big)^{\exp -V_\nu(t)} \leq h.$$

En utilisant (3.61), on constate que les conditions ci-dessus sont réalisées si

$$\frac{\nu t}{\ell^2} \leq \Big(\frac{h}{C\ell}\Big)^C, \tag{3.64}$$

où l'on désigne par C une constante suffisamment grande. La condition (3.64) est plus faible que (3.2). Donc on peut l'ignorer.

3.6 Limite non visqueuse en temps petit

Il s'agit de déduire à partir du théorème précédent le corollaire 3.2.1. La preuve consiste, d'une part, à trouver un moyen par lequel on peut remplacer dans les estimations du théorème 3.2.2 $F_{t,\nu}$ par F_t et d'autre part à analyser ce qui peut se passer autour de la frontière ∂F_t. L'information cruciale qui permettra de régler ces questions est la convergence uniforme des flots (ψ_ν) vers ψ. Pour l'établir, on écrit par l'intermédiaire de l'inégalité triangulaire :

$$|\psi_\nu(t,x)-\psi(t,x)| \leq \int_0^t \|v_\nu(s)-v(s)\|_{L^\infty}ds + \int_0^t |v(s,\psi_\nu(s,x))-v(s,\psi(s,x))|ds.$$

En appliquant le lemme d'Osgood, on aboutit au fait suivant : si

$$\|v_\nu - v\|_{L^1([0,t];L^\infty)} \leq \ell e^{1-\exp V(t)},$$

alors

$$\|\psi_\nu(t)-\psi(t)\|_{L^\infty} \leq e\ell\Big(\frac{1}{e\ell}\|v_\nu - v\|_{L^1([0,t];L^\infty)}\Big)^{\exp -V(t)} \overset{déf}{=} r_\nu(t).$$

Par un calcul simple, on trouve

$$(F_t)^c_{h+r_\nu(t)} \subset (F_{t,\nu})^c_h \quad \text{et} \quad (F_t^c)_{h+r_\nu(t)} \subset (F^c_{t,\nu})_h \subset (F_t^c)_{h-r_\nu(t)}.$$

Ceci permet de remplacer dans le théorème 3.2.2, $F_{t,\nu}$ par F_t, dès qu'on prend $r_\nu \leq \frac{h}{2}$. Nous nous intéressons maintenant à ce qui se passe autour de ∂F_t et précisément nous allons contrôler les solutions dans cette région. Or le principe du maximum montre que la norme L^∞ de toute solution a_ν de l'équation (TD_ν) est majorée par sa valeur à l'instant initial. Donc il nous suffit d'estimer la surface du voisinage $\mathcal{T}_{t,h}$ qu'on définit par :

$$\mathcal{T}_{t,h} = \Big\{x \in \mathbb{R}^2,\ \mathrm{dist}(x, \partial F_t) \leq h\Big\}.$$

Pour mesurer des surfaces tubulaires, on dispose d'une estimation qui fait intervenir la courbure, la longueur et l'épaississement h. Il s'avère qu'on ne peut pas l'appliquer dans notre cas, vu qu'on ne sait rien sur la régularité de la frontière ∂F_t et si même elle a une longueur finie. Néanmoins, on dispose d'une estimation grossière de cette surface qui fait appel uniquement à la longueur et à l'épaississement. Pour pouvoir l'appliquer dans notre situation, on montre tout d'abord que le tube $\mathcal{T}_{t,h}$ est l'image, par le flot $\psi(t)$, d'un certain tube $\mathcal{T}_{0,h_1}$ qui s'organise autour de ∂F_0, dont on sait calculer la surface. Ensuite on utilise le fait que le flot préserve la mesure. Avant d'expliciter la surface voulue, on commence par

Définition 3.6.1. *Soient γ une courbe de $\mathbb{R}^2$ et r un réel positif. On note $\mathcal{T}_r$ le voisinage tubulaire de γ, d'épaississement r, par*

$$\mathcal{T}_r = \Big\{x \in \mathbb{R}^2 \ ;\ \mathrm{dist}(x,\gamma) \leq r\Big\}.$$

Dans le cas des courbes rectifiables, on dispose du lemme suivant

Lemme 3.6.1. *Soit $\sigma \mapsto \gamma(\sigma)$ une courbe simple rectifiable définie de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}^2$, ayant pour longueur L. Alors pour tout $r \geq 0$*

$$|\mathcal{T}_r| \leq 4\pi(Lr + r^2).$$

Démonstration

Soit $(\gamma_i)_{0 \leq i \leq n}$ une subdivision de la courbe γ, telle que $\gamma_0 = \gamma(0)$, $\gamma_n = \gamma(1)$, de sorte que la longueur de l'arc $[\gamma_i, \gamma_{i+1}]$ vaut r pour tout $0 \leq i \leq n-2$ et inférieure à r si $i = n-1$. Considérons maintenant les disques $D_{i,2r}$ centrés au points $\gamma_i, 0 \leq i \leq n-1$ et ayant pour rayon $2r$. Un résultat classique montre que pour tout i

$$[\gamma_i, \gamma_{i+1}] \subset D_{i,r}.$$

Ceci conduit à la constatation suivante

$$\mathcal{T}_r \subset \cup_{i=0}^{n-1} D_{i,2r}.$$

Car si on prend $x \in \mathcal{T}_r$ alors il existe $x_1 \in \gamma$ tel que $d(x, x_1) \leq r$. D'autre part, il existe un certain j tel que $x \in [\gamma_j, \gamma_{j+1}]$. Il ne reste qu'appliquer l'inégalité triangulaire et le constat cidessus. Ainsi

$$|\mathcal{T}_r| \leq 4n\pi r^2.$$

Or $n \leq [\frac{L}{r}] + 1$. Donc en le reportant dans l'inégalité de dessus on trouve le contrôle souhaité.■

Posons

$$h_1 = e\ell\Big(\frac{h}{e\ell}\Big)^{\exp -V(t)}.$$

Alors, d'après la partie 2. du lemme 3.4.1, on a

$$\psi(t,(F_0)^c_{h_1}) \subset (F_t)^c_h \quad \text{et} \quad \psi(t,(F^c_0)_{h_1}) \subset (F^c_t)_h. \tag{3.65}$$

En posant

$$\mathcal{T}_{0,h_1} = \{x \in \mathbb{R}^2, \operatorname{dist}(x, \partial F_0) \leq h_1\},$$

Donc, les inclusions (3.65) entraînent, via la bijectivité du flot, que

$$\mathcal{T}_{t,h} \subset \psi(t, \mathcal{T}_{0,h_1}).$$

Il suffit maintenant d'appliquer le lemme précédent et la propriété de conservation de la mesure par le flot, pour enfin déduire

$$|\mathcal{T}_{t,h}| \leq 4\pi(L_0 h_1 + h_1^2).$$

Ainsi, la majoration

$$\|a_\nu(t)\|_{L^\infty} \leq \|a^0\|_{L^\infty},$$

permet d'avoir, pour tout $p \in [1,+\infty[$,

$$\|a_\nu(t) - \mathbf{1}_{F_t}\|^p_{L^p(\mathcal{T}_{t,h})} \leq 4\pi e^2 2^p \|a^0\|^p_{L^\infty}(L_0\ell + \ell^2)\Big(\frac{h}{e\ell}\Big)^{\exp -V(t)},$$

sous réserve que $r_\nu(t) \leq \frac{h}{2}$. Pour déduire la convergence visqueuse L^p, il suffit de faire un passage à la limite successivement en ν et h. Concernant la norme L^∞, on fixe h petit et on fait tendre p vers l'infini. Ce qui permet de récupérer des estimations $L^\infty(\mathcal{T}^c_{t,h})$. Ensuite, on passe à la limite quand ν tend vers zéro.

3.7 Décroissance polynomiale en temps grand

Nous allons dans ce qui suit fournir la preuve du théorème 3.2.3. Désormais, les fonctions qui interviennent ne sont pas indexées par ν afin d'alléger les notations.
Pour montrer un résultat de décroissance par rapport à la viscosité, global en temps, avec la seule hypothèse que v est localement intégrable en temps et à valeurs dans C_{LL}, on partage l'intervalle de temps $[0,T]$ en une subdivision $((T_i)_{i=0}^N)$, qui sera définie ultérieurement et dont le pas est indépendant des variables du problème. Dans chaque sous-intervalle on développe des estimations L^2 dont on abandonne la localisation exponentielle. Ce qui est gênant avec cette localisation est que le terme initial $a(T_i)e^{\phi_\lambda(T_i,\cdot)}$ ne peut pas être petit sur $\psi(T_i,F_0)^c_h$ à cause de l'étalement du support de $a(T_i)$. Dans l'intervalle $[0,T_1]$, nous n'avons pas ce problème car a^0 est supportée dans F_0, où la localisation exponentielle ne contribue qu'avec la constante 1. Dans chaque intervalle de temps de la forme $[T_i,T_{i+1}]$, on construit une troncature initiale en faisant appel à l'ensemble $\psi(T_i,F_0)$. Ensuite, on tronque la solution par le propagé de cette troncature par le flot régularisé $\psi_{T_i,\lambda}(t)$, noté aussi $\psi_{i,\lambda}$ et qui désigne dans ce cas le flot associé à $S_\lambda v$, fixant les points de l'espace à l'instant T_i. Après, on fait des estimations d'énergie L^2. Pour aboutir à une estimation locale souhaitée, on a besoin, pour le contrôle de certaines quantités, de décrire la dynamique du support initial F_0 à travers les flots mis en jeu. À cet effet, le lemme 3.4.1 est d'une importance majeure.

On souligne que la relation de récurrence qu'on établit est de type arithmético-géométrique. Ce qui permet d'avoir une forme explicite de la suite. L'examen de cette formule montre que la décroissance globale à bien lieu, non pas sous une forme exponentielle, mais plutôt polynomiale en ν.
Pour ce faire, on fixe un temps T strictement positif et on choisit un réel $\alpha \in]0,1[$. Ensuite, on partage l'intervalle $[0,T]$ en une subdivision $(T_i)_{i=0}^{N}$, qui vérifie

$$T_0 = 0 < T_1 < \dots < T_N = T \quad \text{et} \quad V(T_i,T_{i+1}) \simeq \frac{1-\alpha}{C_0(1+\alpha)}, \forall\, i \in [\![0, N-1]\!].$$

Nous rappelons que $V(T_i,T_{i+1}) = \displaystyle\int_{T_i}^{T_{i+1}} \|v(\tau)\|_{LL} d\tau$. Ainsi en sommant sur i ces quantités, on trouve $N \simeq \frac{C_0(1+\alpha)V(T)}{1-\alpha}$. Notons :

$$\delta_T(h) = e\ell\Big(\frac{h}{e\ell}\Big)^{\exp V(T)} \quad \text{et} \quad \delta_t^{(i)}(h) = \underbrace{\delta(t) \circ \cdots \circ \delta(t)}_{i \text{ fois}}(h).$$

Alors un calcul simple donne

$$\delta_t^{(i)}(h) = e\ell\Big(\frac{h}{e\ell}\Big)^{\exp iV(t)}.$$

Introduisons pour tout entier $i \in [\![0, N]\!]$ les fonctions suivantes :

$$f_i(x) = \frac{1}{\ell} \min\Big\{\ell,\ \mathrm{dist}\Big(x, F_{i;\frac{\delta_T^{(2)}(h)}{2}}\Big)\Big\} \quad \text{et} \quad \phi_{i,\lambda}(t,x) = f_i(\psi_{T_i,\lambda}^{-1}(t,x)),$$

où l'on désigne

$$F_{i;h} = \Big(\psi(T_i,F_0)_h^c\Big)^c = \Big\{x \in \mathbb{R}^d,\ \mathrm{dist}(x, \psi(T_i,F_0)) \le h\Big\} \quad \text{et} \quad F_i = \psi(T_i,F_0).$$

On note aussi $\psi_{i,\lambda} = \psi_{T_i,\lambda}$. La fonction $\phi_{i,\lambda}$ est lipschitzienne et vérifie, en particulier, pour tout réel $t \ge T_i$ les contrôles

$$\|\phi_{i,\lambda}(t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)} \le 1 \quad \text{et} \quad \|\nabla\phi_{i,\lambda}(t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)} \le \frac{1}{\ell}(\lambda\ell)^{C_0 V(T_i,t)}. \tag{3.66}$$

Cette dernière estimation découle de la suivante :

$$\begin{aligned} \|\nabla\psi_{i,\lambda}^{-1}(t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)} &\le e^{\int_{T_i}^t \|\nabla S_\lambda v(s)\|_{L^\infty} ds} \\ &\le e^{C_0 \log(\lambda\ell) \int_{T_i}^t \|v(s)\|_{LL} ds} \\ &\le (\lambda\ell)^{C_0 V(T_i,t)}. \end{aligned}$$

La fonction $\phi_{i,\lambda}$ n'est pas dérivable dans tout l'espace. Donc, pour accorder un sens classique au calcul qui suivra, il convient de régulariser $\phi_{i,\lambda}$ par une approximation de l'identité comme on l'a déjà fait pour la preuve du deuxième théorème. Ici, on ne le fait pas par souci de simplification, mais on signale que les estimations importantes sont stables par passage à la limite.
La fonction $a\phi_{i,\lambda}$ satisfait l'équation suivante

$$\partial_t(a\phi_{i,\lambda}) + S_\lambda v \cdot \nabla(a\phi_{i,\lambda}) - \nu\Delta(a\phi_{i,\lambda}) = ((S_\lambda v - v)\cdot\nabla a)\phi_{i,\lambda} - \nu a\Delta\phi_{i,\lambda} - 2\nu\nabla a \cdot \nabla\phi_{i,\lambda}. \tag{3.67}$$

En faisant le produit scalaire L^2 avec $a\phi_{i,\lambda}$, accompagné de quelques intégrations par parties, on obtient

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|a\phi_{i,\lambda}(t)\|_{L^2}^2 + \nu\|\nabla(a\phi_{i,\lambda})\|_{L^2}^2 = \int |(S_\lambda v - v)\cdot\nabla\phi_{i,\lambda}(t,x)||a^2\phi_{i,\lambda}(t,x)|dx + \nu\|a\nabla\phi_{i,\lambda}(t)\|_{L^2}^2.$$

Ainsi le lemme 3.3.3 et l'inégalité (3.66) auxquels on associe l'inégalité d'énergie

$$\forall t\in\mathbb{R}_+,\quad \|a(t)\|_{L^2}\leq\|a^0\|_{L^2},$$

permettent d'avoir

$$\frac{d}{dt}\|a\phi_{i,\lambda}(t)\|_{L^2}^2 \leq 2\|a_0\|_{L^2}^2\Big(C_0\|v(t)\|_{LL}(\lambda\ell)^{C_0V(T_i,t)-1}\log(\lambda\ell)+\frac{\nu}{\ell^2}(\lambda\ell)^{2C_0V(T_i,t)}\Big). \tag{3.68}$$

En intégrant cette inégalité entre les instants T_i et t, on trouve que pour tout $\lambda\ell\geq e$,

$$\|a\phi_{i,\lambda}(t)\|_{L^2}^2 \leq \|a\phi_{i,\lambda}(T_i)\|_{L^2}^2 + 2\|a_0\|_{L^2}^2\Big((\lambda\ell)^{C_0V(T_i,t)-1}+\frac{\nu(t-T_i)}{\ell^2}(\lambda\ell)^{2C_0V(T_i,t)}\Big). \tag{3.69}$$

Si on prend $t\in[T_i,T_{i+1}]$, alors l'estimation ci-dessus devient, via le choix de $V(T_i,T_{i+1})$,

$$\|a\phi_{i,\lambda}(t)\|_{L^2}^2 \leq \|a\phi_{i,\lambda}(T_i)\|_{L^2}^2 + 2\|a_0\|_{L^2}^2\Big((\lambda\ell)^{\frac{-2\alpha}{1+\alpha}}+\frac{\nu T}{\ell^2}(\lambda\ell)^{2\frac{1-\alpha}{1+\alpha}}\Big). \tag{3.70}$$

Ainsi, en faisant le choix $\lambda\ell=(\frac{\ell^2}{\nu T})^{\frac{1+\alpha}{2}}$, l'estimation (3.70) se transforme en

$$\|a\phi_{i,\lambda}(t)\|_{L^2}^2 \leq \|a\phi_{i,\lambda}(T_i)\|_{L^2}^2 + 4\|a_0\|_{L^2}^2\Big(\frac{\nu T}{\ell^2}\Big)^{\alpha}. \tag{3.71}$$

D'une part, en posant $\beta(T,h)=\dfrac{\delta_T^{(2)}(h)}{4}$ et en revenant à l'expression de $\phi_{i,\lambda}(t)$, on constate que le support de $\phi_{i,\lambda}(T_i)$ est inclus dans l'ensemble $(F_i)^c_{\beta(T,h)}$. Ce qui entraîne grâce à (3.66) que

$$\|a\phi_{i,\lambda}(T_i)\|_{L^2}\leq\|a(T_i)\|_{L^2((F_i)^c_{\beta(T,h)})}.$$

D'autre part, la partie 3. du lemme 3.4.1 implique que pour tout temps t dans $[T_i,T_{i+1}]$, on a

$$\psi_{i,\lambda}^{-1}(t)\circ\psi\Big(t,(F_0)^c_{\delta(t,h)}\Big)\subset\Big(\psi(T_i,F_0)\Big)^c_{\delta_t^{(2)}(h)-\bar\delta(t,\lambda)}\subset\Big(F_{i;\delta_T^{(2)}(h)/2}\Big)^c_{\beta(T,h)}, \tag{3.72}$$

du moment que

$$\bar\delta(T,\lambda)\leq\beta(T,h)\quad\text{ et }\quad C_0V(T)(\lambda\ell)^{-1}\log\lambda\ell\leq e^{1-\exp C_0V(T)}.$$

Il découle de (3.72) que pour tout $t\in[T_i,T_{i+1}]$ et pour tout $x\in\psi\big(t,(F_0)^c_{\delta(t,h)}\big)$, on a

$$\beta(T,h)\leq|\phi_{i,\lambda}(t,x)|.$$

Par conséquent, il vient que

$$\beta(T,h)\left\|a(t)\right\|_{L^2(\psi(t,\,(F_0)^c_{\bar\delta(t,h)}))} \leq \left\|a\phi_{i,\lambda}(t)\right\|_{L^2\left(\psi(t,\,(F_0)^c_{\bar\delta(t,h)})\right)}.$$

En combinant ces résultats avec la partie 1. du lemme 3.4.1, l'inégalité (3.71) devient

$$\forall t \in [T_i, T_{i+1}],\quad \left\|a(t)\right\|_{L^2((F_t)^c_h)} \leq \frac{\ell}{\beta(T,h)}\Big(\left\|a(T_i)\right\|_{L^2((F_i)^c_{\beta(T,h)})} + 4\Big(\frac{\nu T}{\ell^2}\Big)^{\frac{\alpha}{2}}\left\|a_0\right\|_{L^2}\Big), \tag{3.73}$$

sous réserve que

$$\bar\delta(T,\lambda) \leq \beta(T,h) \quad \text{et} \quad \frac{\nu T}{\ell^2} \leq \Big(\frac{e^{1-\exp C_0 V(T)}}{C_0 V(T)}\Big)^{\frac{4}{1+\alpha}}. \tag{3.74}$$

Rappelons que notre objectif de départ est d'établir une relation de récurrence qui permet d'accéder de proche en proche aux contrôles des quantités qui nous intéressent. Or, en méditant la relation (3.73), il s'avère qu'elle est une bonne candidate pour nous guider vers l'élaboration d'un résultat de décroissance polynômiale. L'indice qui nous rassure dans (3.73) est que le terme qu'on voudrait contrôler à l'instant T_{i+1} est lui même dominé modulo une constante multiplicative en h, ce qui n'est pas embarrassant, par son contrôle à l'instant T_i auquel on rajoute un terme qui est en puissance de ν. Or, on part initialement d'une quantité nulle. Par conséquent, cette petitesse en ν peut se propager jusqu'à tout temps. Voyons de près ce qui se passe.
On pose pour tout entier i dans $[\![0, N-1]\!]$

$$a_i(h) = \|a(T_i)\|_{L^2((F_i)^c_h)}.$$

Alors l'inégalité (3.73) donne pour tout h satisfaisant $\bar\delta(T,\lambda) \leq \beta(T,h)$,

$$\forall\, i \in [\![0, N-1]\!],\quad a_{i+1}(h) \leq \frac{\ell}{\beta(T,h)}\Big(a_i(\beta(T,h)) + 4\Big(\frac{\nu T}{\ell^2}\Big)^{\frac{\alpha}{2}}\left\|a_0\right\|_{L^2}\Big).$$

Notons

$$\beta^{(j)}(T,h) = \underbrace{\beta \circ \cdots \circ \beta}_{j \text{ fois}}(T,h).$$

Comme $a_0(\bar h) = 0$, pour tout $\bar h > 0$, alors on peut démontrer par un argument de récurrence que, pour tout $n \in [\![1, N]\!]$ et pour tout réel positif h vérifiant $\bar\delta(T,\lambda) \leq \beta^{(n)}(T,h)$,

$$a_n(h) \leq 4\Big(\frac{\nu T}{\ell^2}\Big)^{\frac{\alpha}{2}}\left\|a_0\right\|_{L^2}\sum_{k=1}^{n}\prod_{j=1}^{k}\frac{\ell}{\beta^{(j)}(T,h)}.$$

En développant le calcul, on trouve que

$$\beta^{(j)}(T,h) = \big(\frac{1}{4}\big)^{\sum_{m=0}^{j-1} e^{2mV(T)}}\, e\ell\big(\frac{h}{e\ell}\big)^{\exp 2jV(T)}.$$

Or l'inégalité $\sum_{j=1}^{N} a^j \leq N a^N$, qui a lieu pour tout $a \geq 1$ permet d'avoir

$$\begin{aligned}
\prod_{j=1}^{k} \frac{\ell}{\beta^{(j)}(T,h)} &= e^{-k} 4^{\sum_{j=1}^{k} \sum_{m=0}^{j-1} e^{2mV(T)}} \Big(\frac{e\ell}{h}\Big)^{\sum_{j=1}^{k} e^{2jV(T)}} \\
&\leq e^{-k} \Big(\frac{4e\ell}{h}\Big)^{k^2 e^{2kV(T)}}.
\end{aligned}$$

Ainsi en sommant sur les indices k allant de 1 jusqu'à n, on trouve

$$\sum_{k=1}^{n} \prod_{j=1}^{k} \frac{\ell}{\beta^{(j)}(T,h)} \leq \Big(\frac{4e\ell}{h}\Big)^{n^2 e^{2nV(T)}}.$$

D'où on aboutit, pour tout temps $t \in [0,T]$, à l'estimation

$$\big\|a(t)\big\|_{L^2((F_t)_h^c)} \leq 4\Big(\frac{\nu T}{\ell^2}\Big)^{\frac{\alpha}{2}} \Big(\frac{4e\ell}{h}\Big)^{N^2 e^{2NV(T)}} \big\|a_0\big\|_{L^2}, \tag{3.75}$$

qui a eu lieu si $\bar{\delta}(T,\lambda) \leq \beta^{(N)}(T,h)$. Sachant que $N \simeq \frac{C_0 V(T)(1+\alpha)}{1-\alpha}$, alors on déduit finalement à partir de (3.75) que pour tout $t \in [0,T]$,

$$\big\|a(t)\big\|_{L^2((F_t)_h^c)} \leq C\Big(\frac{\nu T}{\ell^2}\Big)^{\frac{\alpha}{2}} \Big(\frac{4e\ell}{h}\Big)^{\exp C\left(\frac{V(T)}{1-\alpha}\right)^2} \big\|a_0\big\|_{L^2}.$$

On va maintenant expliciter les conditions que doit vérifier ν. Nous venons de voir que

$$\begin{aligned}
\beta^{(N)}(T,h) &= (4)^{-\sum_{j=0}^{N-1} e^{2jV(T)}} e\ell\Big(\frac{h}{e\ell}\Big)^{\exp 2NV(T)} \\
&\geq 4^{-Ne^{2NV(T)}} e\ell\Big(\frac{h}{4e\ell}\Big)^{\exp \frac{CV(T)^2}{1-\alpha}}.
\end{aligned}$$

Or, on vérifie facilement que $4^{-Ne^{2NV(T)}} \geq 4^{-\exp C\left(\frac{V(T)}{1-\alpha}\right)^2}$. Ce qui implique que

$$\beta^{(N)}(T,h) \geq e\ell\Big(\frac{h}{16e\ell}\Big)^{\exp C\left(\frac{V(T)}{1-\alpha}\right)^2}.$$

D'autre part, on peut écrire via l'inégalité $\log x \leq \sqrt{x}, \forall x \in \mathbb{R}_+$, que

$$\begin{aligned}
\bar{\delta}(T,\lambda) &= 2e\ell\Big(\frac{\log \lambda\ell}{\lambda\ell}\Big)^{\exp -C_0 V(T)} \\
&\leq 2e\ell(\lambda\ell)^{-\frac{1}{2}\exp -C_0 V(T)}.
\end{aligned}$$

Ainsi, en remplaçant λ par sa valeur, on constate qu'on peut choisir ν de manière à ce que

$$\frac{\nu T}{\ell^2} \leq \Big(\frac{h}{32e\ell}\Big)^{C\exp C\left(\frac{V(T)}{1-\alpha}\right)^2}. \tag{3.76}$$

En fait, il y a une autre condition imposée à ν provenant de (3.74). Elle est donnée par

$$\frac{\nu T}{\ell^2} \leq \Big(\frac{e^{1-\exp C_0 V(T)}}{C_0 V(T)}\Big)^{\frac{4}{1+\alpha}}. \tag{3.77}$$

Ainsi en associant (3.76) et (3.77), on retrouve la condition (3.4).■

La preuve de la deuxième partie est identique à la première partie modulo quelques modifications qui portent essentiellement sur les troncatures qui sont choisies de manière à ce qu'elles détectent localement en temps des informations sur la solution au sein du support F_t. Ensuite on adapte, sans avoir de complications supplémentaires, la méthode utilisée dans la première partie. On pose comme dans la démonstration du théorème 3.2.2 :

$$\Psi(t,x) = a(t,x) - \mathbf{1}_{F_t}(x), \Psi_\lambda(t,x) = a(t,x) - \mathbf{1}_{F_{t,\lambda}}(x) \quad \text{et} \quad F^c_{i;h} = \Big\{x \in \mathbb{R}^d,\, \mathrm{dist}(x, F^c_i) \leq h\Big\}.$$

On considère le découpage en temps précédent et on pose pour tout entier i appartenant à $[\![0,N]\!]$

$$f_i(x) = \frac{1}{\ell}\min\Big\{\ell,\, \mathrm{dist}\Big(x, F^c_{i;\frac{\delta^{(2)}_T(h)}{2}}\Big)\Big\} \quad \text{et} \quad \phi_{i,\lambda}(t,x) = f_i(\psi^{-1}_{T_i,\lambda}(t,x)).$$

Alors

$$\mathrm{supp}\, f_i \subset (F^c_i)^c_{\frac{\delta^{(2)}_T(h)}{2}} \quad \text{et} \quad \mathrm{supp}\, \phi_{i,\lambda}(t) \subset \psi_{T_i,\lambda}\Big(t, (F^c_i)^c_{\frac{\delta^{(2)}_T(h)}{2}}\Big). \tag{3.78}$$

Or d'après la partie 4. du lemme 3.4.1, pour tout t appartenant à $[T_i,T_{i+1}]$ et pour tout λ vérifiant

$$\bar{\delta}(t,\lambda) \leq \frac{1}{2}\delta^{(2)}_T\big(\frac{1}{2}\delta^{(2)}_T(h)\big) = R_T(h),$$

on a

$$\begin{aligned}\psi_{T_i,\lambda}\Big(t, (F^c_i)^c_{\frac{\delta^{(2)}_T(h)}{2}}\Big) &= \psi_{T_i,\lambda}\Big(t, \big(\psi(T_i, F^c_0)\big)^c_{\frac{\delta^{(2)}_T(h)}{2}}\Big) \\ &\subset \Big(\psi_\lambda(t, F^c_0)\Big)^c_{2\big(R_T(h) - \bar{\delta}(T,\lambda)\big)} \subset\subset F_{t,\lambda}.\end{aligned}$$

On tire de ce dernier fait ainsi que de la dernière inclusion dans (3.78) les conséquences suivantes :

$$\phi_{i,\lambda}\Delta\Psi_\lambda = \phi_{i,\lambda}\Delta a \quad \text{et} \quad \phi_{i,\lambda}\nabla\Psi_\lambda = \phi_{i,\lambda}\nabla a.$$

Donc, en développant le calcul, on montre que $\Psi_\lambda\phi_{i,\lambda}$ vérifie l'équation suivante

$$\partial_t(\Psi_\lambda\phi_{i,\lambda}) + S_\lambda v \cdot \nabla(\Psi_\lambda\phi_{i,\lambda}) - \nu\Delta(\Psi_\lambda\phi_{i,\lambda}) = ((S_\lambda v - v)\cdot\nabla\Psi_\lambda)\phi_{i,\lambda} - \nu\Psi_\lambda\Delta\phi_{i,\lambda} - 2\nu\nabla\Psi_\lambda\cdot\nabla\phi_{i,\lambda}.$$

Faisons le produit scalaire L^2 de cette équation avec $\Psi_\lambda\phi_{i,\lambda}$. Alors, en procédant à des intégrations par parties auxquelles on associe le fait que v est à divergence nulle, on parvient à

$$\frac{d}{dt}\|\Psi_\lambda\phi_{i,\lambda}(t)\|^2_{L^2} \leq 2\int\Big|(S_\lambda v - v)\cdot\nabla\phi_{i,\lambda}(t,x)\Psi^2_\lambda\phi_{i,\lambda}(t,x)\Big|dx + 2\nu\int\Psi^2_\lambda(t,x)|\nabla\phi_{i,\lambda}(t,x)|^2 dx.$$

D'un autre côté, on se sert d'une façon cruciale de l'inégalité $\|\Psi_\lambda(t)\|_{L^2}^2 \leq 2\|a_0\|_{L^2}^2$ et des estimations du lemme 3.3.3 pour déduire, suite à une intégration en temps, que

$$\left\|\Psi_\lambda \phi_{i,\lambda}(t)\right\|_{L^2}^2 \leq \left\|\Psi_\lambda \phi_{i,\lambda}(T_i)\right\|_{L^2}^2 + 4\left\|a_0\right\|_{L^2}^2 \Big((\lambda\ell)^{C_0 V(T_i,t)-1} + \frac{\nu|t-T_i|}{\ell^2}(\lambda\ell)^{2C_0 V(T_i,t)}\Big). \quad (3.79)$$

Or
$$\operatorname{supp}\, \phi_{i,\lambda}(T_i) \subset (F^c_{i;\delta_T^2(h)/2})^c \subset (F_i^c)_{\beta(T,h)}.$$

Ce qui implique, grâce à une estimation analogue à (3.66), que

$$\left\|\Psi_\lambda \phi_{i,\lambda}(T_i)\right\|_{L^2} \leq \left\|\Psi_\lambda(T_i)\right\|_{L^2\left((F_i^c)_{\beta(T,h)}\right)}.$$

En remplaçant F_0 par F_0^c dans (3.72), alors on obtient pour tout temps t de $[T_i, T_{i+1}]$ et pour tout λ tel que $\bar{\delta}(T,\lambda) \leq \beta(T,h)$

$$\psi_{i,\lambda}^{-1}(t) \circ \psi\Big(t, (F_0^c)^c_{\bar{\delta}(t,h)}\Big) \subset \Big(\psi(T_i, F_0)^c\Big)^c_{\delta_T^{(2)}(h)-\bar{\delta}(T,\lambda)} \subset \Big(F^c_{i;\delta_T^{(2)}(h)/2}\Big)^c_{\beta(T,h)}.$$

Ensuite, on imite la fin de la preuve de la première partie et l'on trouve, pour tout $t \in [0,T]$

$$\left\|\Psi_{\lambda_\nu}(t)\right\|_{L^2((F_t)^c_h)} \leq C\Big(\frac{\nu T}{\ell^2}\Big)^{\frac{\alpha}{2}} \Big(\frac{4e\ell}{h}\Big)^{\exp C\left(\frac{V(T)}{1-\alpha}\right)^2} \left\|a_0\right\|_{L^2},$$

avec $\lambda_\nu \ell = \Big(\dfrac{\ell^2}{\nu T}\Big)^{\frac{1+\alpha}{2}}$. Signalons que ν satisfait les mêmes conditions (3.76) et (3.77). En fait, on doit changer dans (3.76) la constante C par une qui soit plus grande. Maintenant, on a envie de remplacer $F_{t,\lambda}$ dans l'estimation de $\|a(t) - \mathbf{1}_{F_{t,\lambda}}\|_{L^2((F_t^c)_h)}$ par F_t. Pour ce faire, il nous suffit de montrer que pour des réels λ suffisamment grand, on a

$$(F_t^c)_h \subset F_{t,\lambda}. \quad (3.80)$$

Or, on peut montrer par le biais d'un calcul élémentaire que

$$(F_t^c)_h \subset (F_{t,\lambda}^c)_{h - \|\psi_\lambda(t) - \psi(t)\|_{L^\infty}}.$$

En combinant cette inclusion avec l'estimation (3.7), on constate que (3.80) a lieu dès que λ satisfait

$$\bar{\delta}(T,\lambda) \leq h.$$

Pour enfin conclure et achever ainsi la preuve du théorème, il ne reste que fournir la liste des conditions que doivent satisfaire les paramètres ν et h.

$$(3.76), (3.77), \lambda\ell = \Big(\frac{\ell^2}{\nu T}\Big)^{\frac{1+\alpha}{2}} \quad \text{et} \quad \bar{\delta}(T,\lambda) \leq h.$$

La dernière condition est réalisée si

$$\frac{\nu T}{\ell^2} \leq \Big(\frac{h}{2e\ell}\Big)^{\frac{4}{1+\alpha}\exp C_0 V(T)}.$$

C'est une condition plus faible que (3.76). Donc on ne la retient pas. Par conséquent, on retrouve la condition (3.4). Ceci achève la preuve du théorème.

3.8 Convergence de ω_ν vers ω

Nous allons aborder successivement la preuve du corollaire 3.2.2 et du corollaire 3.2.3. Elles sont basées essentiellement sur une estimation de $\|\psi_\nu(t,.) - \psi(t,.)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^2)}$. À cet effet, on aura besoin d'une estimation $L^\infty(\mathbb{R}^2)$ de $v_\nu - v$. Pour ce faire, on va rappeler un résultat de limite non visqueuse, dû à J.-Y. Chemin, voir [7].

Théorème 3.8.1. *Soit v^0 un champ de vecteurs de $\mathbb{R}^2$ à tourbillon $\omega^0 \in L^1 \cap L^\infty$. Notons respectivement par v_ν et v les solutions de (NS_ν) et (E) associées à la même donnée initiale v^0. Alors,*

$$\lim_{\nu\to 0} \|v_\nu - v\|_{L^\infty_{loc}(\mathbb{R}_+;L^2)} = 0.$$

Plus précisément, pour tout temps T positif, si

$$\nu \leq \frac{\ell^2}{4T} e^{2-2\exp(CT\|\omega^0\|_{L^1\cap L^\infty})},$$

alors, on aura

$$\|v_\nu - v\|^2_{L^\infty([0,T];L^2)} \leq C\ell^2\Big(\frac{\nu T}{\ell^2}\Big)^{\exp(-C\|\omega^0\|_{L^1\cap L^\infty}T)}\|\omega^0\|^2_{L^1\cap L^\infty}.$$

Dans le contexte de ce théorème, les solutions v_ν et v sont uniformément bornées, par rapport à la viscosité et par rapport au temps, dans l'espace C^1_* et à fortiori dans l'espace C_{LL}. La description précise de ce résultat est fournie par le lemme suivant.

Lemme 3.8.1. *Soient v_ν et v respectivement les solutions de (NS_ν) et de (E) associées à une même donnée initiale v^0 de tourbillon $\omega^0 \in L^1 \cap L^\infty$. Alors, on a l'estimation*

$$\|(v_\nu; v)\|_{L^\infty(\mathbb{R}_+;C^1_*)} \leq C\ell\|\omega^0\|_{L^1\cap L^\infty}.$$

Démonstration

Pour contrôler les hautes fréquences, on utilise principalement l'équation elliptique qui lie la vitesse au tourbillon. On obtient l'estimation suivante

$$\begin{aligned}\forall q \geq 0, \quad \|\Delta_q v_\nu(t)\|_{L^\infty} &\leq C\ell 2^{-q}\|\omega_\nu(t)\|_{L^\infty},\\ &\leq C\ell 2^{-q}\|\omega^0\|_{L^\infty}.\end{aligned} \tag{3.81}$$

La dernière inégalité (3.81) provient d'une application du principe du maximum. Concernant l'estimation de $\|\Delta_{-1}v_\nu\|_{L^\infty}$, on utilise le fait suivant

$$\|\Delta_{-1}v_\nu\|_{L^\infty} \leq C\|v_\nu\|_{L^\infty}.$$

Ensuite, on se sert de la loi de Biot-Savart et de l'inégalité de Hölder qui permettent d'avoir

$$\begin{aligned}|v_\nu(t,x)| &\leq \int_{|x-y|\leq\ell} \frac{|\omega_\nu(t,y)|}{|x-y|}dy + \int_{|x-y|\geq\ell}\frac{|\omega_\nu(t,y)|}{|x-y|}dy\\ &\leq C\big(\ell\|\omega_\nu(t)\|_{L^\infty} + \ell^{-1}\|\omega_\nu(t)\|_{L^1}\big).\end{aligned}$$

Il ne reste qu'appliquer la majoration

$$\|\omega_\nu(t)\|_{L^r} \leq \|\omega^0\|_{L^r}, \forall r \in [1,+\infty]. \tag{3.82}$$

La même méthode est applicable dans le cas eulérien, vu que l'estimation (3.82) est vérifiée grâce à la méthode des caractéristiques et à la conservation de la mesure par le flot.■

Le théorème 3.8.1 et le lemme 3.8.1 permettent, via le résultat d'interpolation suivant

$$\|u\|_{L^\infty}^2 \leq C\|u\|_{L^2}\|u\|_{C^1_*},$$

de montrer la convergence des solutions (v_ν) vers v dans l'espace $L^\infty_{loc}(\mathbb{R}_+;\, L^\infty(\mathbb{R}^2))$. Ayant ce résultat, on peut montrer, grâce au lemme d'Osgood, que le flot ψ_ν converge vers ψ dans ce même espace. Voici ce dont il s'agit :

Proposition 3.8.1. *Soit v^0 une donnée initiale à tourbillon ω^0 dans $L^1 \cap L^\infty$. Alors*

$$\lim_{\nu \to 0} \|v_\nu - v\|_{L^\infty_{loc}(\mathbb{R}_+;\, L^\infty(\mathbb{R}^2))} = 0.$$

Plus précisément, pour tout T positif, si

$$\nu \leq \frac{\ell^2}{4T} e^{2-2\exp(CT\|\omega^0\|_{L^1\cap L^\infty})},$$

alors, on aura

$$\|v_\nu - v\|^2_{L^\infty([0,T];\, L^\infty(\mathbb{R}^2))} \leq C\ell^2 \Big(\frac{\nu T}{\ell^2}\Big)^{\frac{1}{2}\exp(-C\|\omega^0\|_{L^1\cap L^\infty} T)} \|\omega^0\|^2_{L^1\cap L^\infty}.$$

De plus, il existe une fonction f de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}_+^*$ décroissante vers zéro, telle que si

$$\nu \in [0, f(T\|\omega^0\|_{L^1\cap L^\infty})],$$

alors on aura

$$\big\|\psi_\nu - \psi\big\|_{L^\infty([0,T];\, L^\infty(\mathbb{R}^2))} \leq C\ell \Big(\frac{\nu T}{\ell^2}\Big)^{\frac{1}{4}\exp(-CT\|\omega^0\|_{L^1\cap L^\infty})} \overset{déf}{=} r_{\nu,T}.$$

La preuve du corollaire 3.2.2 est une application du théorème 3.2.3. La seule vérification qui reste à faire est de pouvoir remplacer dans les estimations $F_{t,\nu}$ par F_t. Pour cela, on se sert essentiellement de la convergence uniforme du flot visqueux ψ_ν vers le flot eulérien ψ. Un tel résultat permet de montrer d'une manière simple que pour tout ν vérifiant

$$\nu \in [0, f(T\|\omega^0\|_{L^1\cap L^\infty})], \tag{3.83}$$

tel que

$$r_{\nu,T} \leq \frac{h}{2}, \tag{3.84}$$

alors pour tout temps t choisi dans l'intervalle $[0,T]$, on a

$$(F_t)^c_h \subset (F_{t,\nu})^c_{\frac{h}{2}} \quad \text{et} \quad (F^c_t)_h \subset (F^c_{t,\nu})_{\frac{h}{2}} \subset (F^c_t)_{\frac{h}{4}}. \tag{3.85}$$

Ce qui permet de conclure.

Ayant établi le corollaire 3.2.2, alors la preuve des résultats de limite non visqueuse mentionnés dans le corollaire 3.2.3 devient presque immédiate. La seule information qui reste à fournir concerne l'estimation de la quantité

$$\|\omega_\nu(t) - \mathbf{1}_{F_t}\|_{L^2(\mathcal{T}_{t,h})}. \tag{3.86}$$

Pour enfin conclure, il suffit d'ajuster les paramètres ν et h. Comme les tourbillons sont bornés, alors l'estimation de (3.86) peut se ramener à une mesure de la surface tubulaire $\mathcal{T}_{t,h}$ sur laquelle on intègre. Or, en imitant la preuve du corollaire 3.2.1, on parvient à établir que

$$\mathcal{T}_{t,h} \subset \psi_\nu(t, \mathcal{T}_{0,h_1}), \tag{3.87}$$

où l'on désigne

$$\mathcal{T}_{0,h_1} = \{x,\ \mathrm{dist}(x, \partial F_0) \leq h_1\} \quad \text{et} \quad h_1 = e\ell\big(\frac{h}{e\ell}\big)^{\exp -C\|\omega^0\|_{L^1\cap L^\infty} T}.$$

En utilisant (3.87) et la conservation de la mesure par le flot ainsi que le lemme 3.6.1, on obtient

$$\|\omega_\nu(t) - \mathbf{1}_{F_t}\|^2_{L^2(\mathcal{T}_{t,h})} \leq C\|\omega^0\|^2_{L^\infty}(L_0\ell + \ell^2)\big(\frac{h}{e\ell}\big)^{\exp(-C\|\omega^0\|_{L^1\cap L^\infty} T)}. \tag{3.88}$$

Voyons enfin les conditions imposées sur ν et h. Elles sont données par (3.4), (3.83) et (3.84). Prenons une constante C suffisamment grande et imposons la condition

$$\frac{\nu T}{\ell^2} = \big(\frac{h}{C\ell}\big)^{C\exp\left(C\|\omega^0\|^2_{L^1\cap L^\infty} T^2\right)}. \tag{3.89}$$

Alors, nous constatons que les conditions que nous venons de lister sont satisfaites du moment que (3.89) et (3.83) sont réalisées. En reportant (3.89) dans l'inégalité (3.88) ainsi que dans les estimatons dictées par le théorème 3.2.3, on s'aperçoit que $\|\omega_\nu(t) - \mathbf{1}_{F_t}\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}$ est dominée par le terme correspondant à l'inégalité (3.88). Ainsi donc, pour tout réel ν vérifiant (3.83), on a

$$\|\omega_\nu(t) - \mathbf{1}_{F_t}\|^2_{L^2(\mathbb{R}^2)} \leq C\|\omega^0\|^2_{L^1\cap L^\infty}(L_0\ell + \ell^2)\Big(\frac{\nu T}{\ell^2}\Big)^{C^{-1}\exp(-CT^2\|\omega^0\|^2_{L^1\cap L^\infty})}.$$

Ceci achève la preuve du corollaire 3.2.3. ∎

Chapitre 4

Poches de tourbillon singulières dans un fluide faiblement visqueux

Résumé. Dans ce chapitre, nous étudions les poches de toubillon singulières dans les équations de Navier-Stokes incompressibles bidimensionnelles. Nous montrons, en particulier, que si la poche initiale est de classe C^{1+s} en dehors d'un ensemble singulier Σ, alors la vitesse est pour tout temps lipschitzienne en dehors du transporté de Σ par le flot visqueux. De plus, le contrôle Lipschitz correspondant est uniforme par rapport à la viscosité. Ceci nous permet d'établir des résultats de convergence non visqueuse des structures géométriques.

4.1 Introduction

Dans les pages suivantes, nous allons fournir quelques résultats concernant l'évolution d'une poche de tourbillon singulière dans le système de Navier-Stokes incompressible gouvernant le mouvement plan d'un fluide visqueux. Les équations décrivant l'évolution du champ de vitesse $v_\nu(t,x)$, avec $(t,x) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^2$, sont données par

$$(NS_\nu) \begin{cases} \partial_t v_\nu + v_\nu \cdot \nabla v_\nu - \nu \Delta v_\nu = -\nabla p_\nu \\ \operatorname{div} v_\nu = 0 \\ v_{\nu|t=0} = v^0, \end{cases}$$

où ν est un paramètre positif désignant la viscosité du fluide et p_ν un scalaire qui représente la pression. Signalons que le système d'Euler incompressible (E) correspondant à une viscosité nulle, et que l'on note parfois (NS_0), est décrit par

$$(E) \begin{cases} \partial_t v + v \cdot \nabla v = -\nabla p \\ \operatorname{div} v = 0 \\ v_{|t=0} = v^0. \end{cases}$$

Le tourbillon ω d'un champ de vecteurs $v = (v^1,v^2)$ est défini par $\omega = \partial_1 v^2 - \partial_2 v^1$. Il vérifie dans le cas d'un fluide incompressible bidimensionnel l'équation de transport-diffusion

$$\partial_t \omega_\nu + v_\nu \cdot \nabla \omega_\nu - \nu \Delta \omega_\nu = 0.$$

Nous savons depuis les travaux de M. Yudovich [40] que si le tourbillon initial est dans $L^1 \cap L^\infty$, alors les systèmes (NS_ν) et (E) sont globalement bien posés. Comme conséquence, si le tourbillon initial est une poche de tourbillon, i.e., $\omega^0 = 1_\Omega$ avec Ω un domaine borné, alors le tourbillon eulérien est en tout temps l'indicatrice du transporté de Ω par le flot eulérien $\psi(t)$ que l'on définit par

$$\psi(t,x) = x + \int_0^t v(\tau,\psi(\tau,x))d\tau.$$

La loi de Biot-Savart nous renseigne que la connaissance du tourbillon permet d'accéder au champs de vitesse. Dans le cas des poches de tourbillon à bord régulier, la vitesse est complètement déterminée par la dynamique du bord $\partial\Omega(t)$ comme l'indique la formule de Green

$$v(t,x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log|x-\gamma_t(\sigma)|\partial_\sigma\gamma_t(\sigma)d\sigma,$$

où γ_t est une paramétrisation régulière du bord $\partial\Omega(t)$. Ainsi, et motivé par plusieurs enjeux, la question de la régularité du bord est devenue d'actualité. C'est qu'à partir de la fin des années quatre-vingt que la question est de nouveau relancée avec le travail de Majda [30]. Il conjecture l'explosion en temps fini, dans certain cas, de la géométrie du bord. Cependant, J.-Y. Chemin montre dans [6] qu'un bord initial de classe C^{1+s}, avec $s\in]0,1[$, préserve en tout temps cette régularité. Il obtient même un résultat plus précis en montrant que la partie régulière du bord initial Ω se propage avec la même régularité alors que la partie singulière reste tout le temps singulière. Il prouve aussi que la vitesse est lipschitzienne en dehors des singularités et que son gradient a un comportement explosif près de cet ensemble. En fait, le taux d'explosion en un point x croît à l'approche d'un point singulier moins vite que le logarithme de la distance séparant les deux points. Ce résultat a été ensuite généralisé par R. Danchin à des poches de classe C^{k+s} (voir [14]). La nature de la singularité est sans doute un facteur déterminant dans le comportement du champ de vitesse: si l'on prend par exemple un coin alors on sait que l'explosion logarithmique est inévitable. Par contre dans le cas d'un *cusp* on sait grâce aux travaux de R. Danchin [15] que la vitesse est lipschitzienne dans l'espace tout entier. Notons que l'étude du comportement de l'ensemble singulier est d'un point de vue mathématique loin d'être bien élucidé.

Concernant le système de Navier-Stokes incompressible on peut aussi tenter de résoudre les mêmes problèmes de poches de tourbillon, mais comme le terme visqueux a tendance à étaler tout ce qui est confiné, alors la formulation qui semble intéressante est la suivante: il s'agit de décrire la régularité du transporté du bord initial par le flot visqueux et d'établir des résultats de convergence non visqueuse de cette structure géométrique. Pour réaliser un tel objectif, il apparaît qu'un contrôle uniforme par rapport à ν du gradient de la vitesse est fortement recommandé. C'est là effectivement toute la difficulté, et tous les problèmes sont quasiment centrés autour de ce point délicat. Les premiers éléments de réponse élaborés dans cette direction sont dûs à R. Danchin. Il montre dans [13] que si la poche initiale est l'indicatrice d'un domaine borné de classe C^{1+s}, alors le transporté du bord initial par le flot visqueux est de classe $C^{1+s'}$, pour tout $s'<s$. Il obtient le résultat d'uniformité requis pour la convergence non visqueuse. Mais la méthode qu'il utilise ne lui permet pas de prouver la persistance de la régularité. En fait, la perte de la régularité est artificielle : nous avons montré dans un travail récent [24] que le bord préserve la régularité initiale. Lorsque le bord de la poche est singulier, alors il y aura des complications techniques supplémentaires dûes au fait que le champ de vitesse n'est pas en général lipschitzien.

Les premiers résultats de limite non visqueuse dans le cas des solutions de Yudovich remontent à J.-Y. Chemin. Il établit dans [7] la convergence de $v_\nu - v$ vers zéro dans $L^\infty_{loc}(\mathbb{R}_+; L^p(\mathbb{R}^2))$, pour tout $2 \leq p \leq +\infty$. Par contre, en ce qui concerne la convergence L^p du tourbillon visqueux ω_ν vers ω, on peut se référer à [11] où les auteurs montrent que sous l'hypothèse d'un tourbillon initial dans $L^1 \cap L^\infty \cap B^s_{2,\infty}$, pour un certain $s \in]0,1[$, alors on a la convergence, qui n'est assurée que sur un petit intervalle de temps. Dans le chapitre précédent, nous avons démontré, dans le cas des poches de tourbillon à bord de mesure nulle, la convergence L^p globalement en temps. Ceci nous permet dans ce contexte d'obtenir la convergence de v_ν vers v dans l'espace $W^{1,p}$ pour tout p fini et supérieur ou égal à 2.

Ici, nous nous occupons encore du cas où le bord initial est singulier et nous tâcherons de préciser la convergence non visqueuse du tourbillon : nous montrerons des résultats globaux de convergence des structures géométriques. Le point le plus important sur lequel reposent ces résultats est l'uniformité par rapport à ν du contrôle Lipschitz de la vitesse v_ν en dehors du transporté de l'ensemble singulier par le flot visqueux $\psi_\nu(t)$. Notre premier résultat est le suivant.

Théorème 4.1.1. *Soit Ω un domaine borné de $\mathbb{R}^2$ et s un réel appartenant à $]0,1[$. On suppose que le bord $\partial\Omega$ est de classe C^{1+s} en dehors d'un ensemble fermé Σ. Posons $\omega^0 = \mathbf{1}_\Omega$ et désignons par v_ν la solution de Yudovich du système (NS_ν) correspondant à un champ de vecteurs v^0, de divergence nulle et dont le rotationnel vaut ω^0. Soit $\psi_\nu(t)$ le flot associé au champ de vecteurs $v_\nu(t)$. Notons pour tout $h > 0$,*

$$\Omega_\nu(t) = \psi_\nu(t,\Omega),\ \Sigma_\nu(t) = \psi_\nu(t,\Sigma) \quad \text{et} \quad \big(\Sigma_\nu(t)\big)^c_h = \Big\{x \in \mathbb{R}^2\ ; \mathrm{dist}\big(x,\psi_\nu(t,\Sigma)\big) \geq h\Big\}.$$

Alors il existe une constante C dépendant seulement de s et de ω^0, telle que pour tout $t \in \mathbb{R}_+$,

$$\sup_{h\in]0,e^{-1}]} \frac{\|\nabla v_\nu(t)\|_{L^\infty((\Sigma_\nu(t))^c_h)}}{-\log h} \leq C(1+\nu t)^{\frac{16}{s}} e^{e^{Ct}}.$$

Désignons par ψ le flot eulérien correspondant au tourbillon initial ω^0. Alors $\partial\Omega_\nu(t)\backslash\Sigma_\nu(t)$ est une courbe de classe $C^{1+s'}, \forall s' < s$. De plus, pour tout $h > 0$, $\partial\Omega_\nu(t) \cap (\Sigma_\nu(t))^c_h$ converge au sens de la distance de Hausdorff vers la courbe $\psi(t,\partial\Omega) \cap \psi(t,\Sigma)^c_h$ dans $\mathbb{R}^2 \times \mathbf{S}^1$. Nous signalons qu'on a identifié un point de la partie régulière de la courbe avec un point de $\mathbb{R}^2 \times \mathbf{S}^1$, la deuxième composante donne la direction de la tangente à la courbe en ce point.

La preuve de ce résultat est basée sur le contrôle de la régularité tangentielle du tourbillon mesurée par rapport à une famille adéquate de champs de vecteurs. Nous utilisons également une version Besov de la théorie de Littlewood-Paley pseudo-locale qui exploite l'information d'un champ de vitesse qui est supposé logarithmiquement lipschitzien et lipschitzien en dehors d'un ensemble donné. Cependant, il y a deux principales informations clé qui nous permettront d'aboutir à des estimations uniformes en ν. La première est un effet régularisant dû à l'intégration en temps du tourbillon. Tandis que la seconde est un résultat de propagation de la régularité Besov dans les équations de transport-diffusion. D'abord, nous savons que le tourbillon visqueux $\omega_\nu \overset{déf}{=} \partial_1 v^2_\nu - \partial_2 v^1_\nu$ d'un fluide bidimensionnel satisfait l'équation de transport-diffusion suivante

$$\begin{cases} \partial_t\omega_\nu + v_\nu \cdot \nabla\omega_\nu - \nu\Delta\omega_\nu = 0 \\ \omega_{\nu|t=0} = \omega^0. \end{cases}$$

Nous montrerons, en particulier, que pour tout $\epsilon \in]0,1[$ et pour tout $t > 0$, on a

$$\nu\,\epsilon \Big\| \int_0^t \omega_\nu(\tau,x)d\tau \Big\|_{C^{2-\epsilon}} \leq C(t), \text{ uniformément en } \nu \text{ et } \epsilon, \tag{4.1}$$

où l'on désigne par C^r l'espace de Hölder que l'on définit, pour r non entier, à travers la décomposition de Littlewood-Paley, comme étant l'ensemble des distributions tempérées u vérifiant,

$$\|u\|_{C^r} \stackrel{déf}{=} \sup_q 2^{qr}\|\Delta_q u\|_{L^\infty} < +\infty, \tag{4.2}$$

où Δ_q désigne l'opérateur de localisation en fréquences dont la construction repose sur une partition de l'unité : il existe deux fonctions positives et régulières χ et φ qui sont supportées respectivement dans une boule et une couronne, telles que pour tout $\xi \in \mathbb{R}^d$,

$$\chi(\xi) + \sum_{q\geq 0}\varphi(2^{-q}\xi) = 1 \quad \text{et} \quad \frac{1}{3} \leq \chi^2(\xi) + \sum_{q\geq 0}\varphi^2(2^{-q}\xi) \leq 1.$$

On pose alors pour toute distribution tempérée u

$$\Delta_{-1}u = \mathcal{F}^{-1}\big(\chi(\xi)\widehat{u}(\xi)\big)\ ;\ \forall\, q \in \mathbb{N},\, \Delta_q u = \mathcal{F}^{-1}\big(\varphi(2^{-q}\xi)\widehat{u}(\xi)\big) \quad \text{et} \quad S_q u = \sum_{-1\leq p\leq q-1}\Delta_p u.$$

Nous verrons plus de précision sur ces fonctions de troncatures dans la proposition 4.2.1.
Notation : Lorsque r est un entier alors l'espace défini par (4.2) sera noté C^r_*.
Voici maintenant le résultat précisant (4.1) et qui sera généralisé dans la proposition 4.3.1.
Proposition 4.1.1. *Soit ω_ν le tourbillon visqueux du système (NS_ν) correspondant à un tourbillon initial $\omega^0 \in L^1 \cap L^\infty$. Alors il existe une constante absolue C telle que pour tout $t > 0$, pour ν positif et pour tout $q \geq 0$*

$$\nu\frac{2^{2q}}{q+2}\int_0^t \|\Delta_q\omega_\nu(\tau)\|_{L^\infty}d\tau \leq C\|\omega^0\|_{L^\infty}\Big(1 + t\|\omega^0\|_{L^1\cap L^\infty}\Big).$$

Nous avons établi dans un travail antérieur [24] que si la vitesse v_ν est lipschitzienne, qui est le cas par exemple lorsque le tourbillon initial est une poche régulière, alors nous n'avons pas une perte logarithmique de la fréquence. Manifestement cette perte est reliée à la faible régularité de la solution de Yudovich qui n'est pas mieux en général que C^1_*.

4.2 Autour de la théorie de Littlewood-Paley

Cette partie est consacrée à quelques rappels sur la théorie de Littlewood-Paley, essentiellement les opérateurs de localisation en fréquences. Nous donnons une description fréquencielle des fonctions quasi-lipschitziennes, dites aussi logarithmiquement lipschitziennes. L'introduction de ces espaces semble tout à fait naturel dans la mécanique des fluides bidimensionnels : en fait les solutions de type Yudovich sont dans cet espace.
Proposition 4.2.1. *Il existe deux fonctions χ et ϕ appartenant respectivement aux espaces $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ et $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d\backslash\{0\})$ telles que,*

$$\chi(\xi) + \sum_{q\geq 0}\varphi(2^{-q}\xi) = 1, \quad \frac{1}{3} \leq \chi^2(\xi) + \sum_{q\geq 0}\varphi^2(2^{-q}\xi) \leq 1,$$
$$|p-q| \geq 2 \Rightarrow \operatorname{supp}\,\varphi(2^{-p}\cdot) \cap \operatorname{supp}\,\varphi(2^{-q}\cdot) = \varnothing,$$

$$q \geq 1 \Rightarrow \operatorname{supp}\,\chi \cap \operatorname{supp}\,\varphi(2^{-q}) = \varnothing.$$

On note

$$\Delta_{-1}v = \mathcal{F}^{-1}(\chi(\xi)\widehat{v}(\xi)), \quad \Delta_q v = \mathcal{F}^{-1}(\varphi(2^{-q}\xi)\widehat{v}(\xi)) \text{ si } q \in \mathbb{N}.$$

$$\forall q \leq -2, \quad \Delta_q v = 0 \quad \text{ et pour tout } q \in \mathbb{Z}, \dot{S}_q v = \sum_{p \leq q-1} \Delta_p v.$$

Le calcul paradifférentiel introduit par J.-M. Bony dans [4] est basé sur la décomposition, dite de Bony, qui reconnaît dans un produit uv trois parties: deux termes de paraproduits correspondant à une domination fréquencielle de l'une par rapport à l'autre et un terme de reste où les fréquences sont de même taille. Plus précisément, nous avons la définition suivante

Définition 4.2.1. *On appelle paraproduit de v par u et on note $T_u v$ l'opérateur*

$$T_u v = \sum_q S_{q-1} u \Delta_q v.$$

On appelle reste du produit uv et on note $R(u,v)$ l'opérateur bilinéaire symétrique suivant:

$$R(u,v) = \sum_{|q'-q| \leq 1} \Delta_q u \Delta_{q'} v.$$

Ainsi le produit uv s'écrit formellement

$$uv = T_u v + T_v u + R(u,v).$$

Nous définissons les espaces de Besov B^s_p, avec $p \in [1, +\infty]$ et $s \in \mathbb{R}$ comme étant l'ensemble des distributions tempérées u vérifiant

$$\|u\|_{B^s_p} \overset{déf}{=} \sup_q 2^{qs} \|\Delta_q u\|_{L^p} < +\infty.$$

Il est clair que pour s non entier $B^s_\infty = C^s$.

Définition 4.2.2. *Soit d un entier supérieur où égal à 2. Nous désignons par C_{LL} l'espace des fonctions log-lipschitziennes, c'est-à-dire, l'ensemble des fonctions bornées v de $\mathbb{R}^d$ satisfaisant*

$$\|v\|_{LL} \overset{déf}{=} \|v\|_{L^\infty} + \sup_{0 < |x-x'| \leq e^{-1}} \frac{|v(x) - v(x')|}{|x - x'| \log(\frac{1}{|x-x'|})} < +\infty.$$

La proposition qui va suivre est une caractérisation dyadique des éléments de l'espace C_{LL}. Pour la preuve, voir par exemple [1].

Proposition 4.2.2. *Il existe une constante $C > 0$ telle que pour toute fonction $v \in C_{LL}$ on ait:*

$$C^{-1}\|v\|_{LL} \leq \|\Delta_{-1}v\|_{L^\infty} + \sup_q \frac{\|\nabla S_q v\|_{L^\infty}}{2+q} \leq C\|v\|_{LL},$$

$$\|\Delta_q v\|_{L^\infty} \leq C\|v\|_{LL}(2+q)2^{-q}.$$

Nous savons grâce au lemme d'Osgood qu'un champ de vecteurs v appartenant à C_{LL} possède globalement un unique flot $\psi(t,x)$ dans la classe des fonctions continues dans les deux variables d'espace et de temps, voir par exemple [6]. En outre, le flot est d'une régularité höldérienne qui se dégrade avec le temps, essentiellement dans un espace $C^{e^{-\alpha t}}$. La question à laquelle on va répondre concerne la dynamique d'un ensemble donné à travers un flot correspondant à un champ logarithmiquement lipschitzien. Nous allons nous contenter de l'énoncé d'un tel résultat qui a été démontré dans [6].

Lemme 4.2.1. *Soit F_0 un ensemble de $\mathbb{R}^d$. On se donne un champ de vecteurs v appartenant à l'espace $L^1_{loc}(\mathbb{R}_+ ; C_{LL})$. Désignons par $\psi(t)$ le flot associé à ce champ de vecteurs. Alors, en posant $F_t = \psi(t,F_0)$, on aura les inclusions*

$$\psi(t,F_h^c) \subset (F_t)^c_{\delta(t,h)}, \quad \text{avec} \quad \delta(t,h) = h^{\exp\left(\int_0^t \|v(\tau)\|_{LL} d\tau\right)}.$$

Pour tout $0 \leq \tau \leq t$,

$$\psi(\tau,\psi^{-1}(t,(F_t)^c_h)) \subset (F_\tau)^c_{\delta(\tau,t,h)}, \quad \text{avec} \quad \delta(\tau,t,h) = h^{\exp\left(\int_\tau^t \|v(\tau)\|_{LL} d\tau\right)}.$$

Voici maintenant un lemme qui sera d'un apport considérable dans notre travail. C'est une sorte d'inégalité de Poincaré. La preuve est attribuée à R. Danchin [14] lorsque $p > 2$. Ensuite elle a été généralisée par le même auteur [15] pour le cas des réels $p \in]1,2[$.

Lemme 4.2.2. *Soit d un entier ≥ 2. Il existe une constante strictement positive C_d telle que, si a est une fonction dont le support de sa transformée de Fourier est inclus dans une couronne $\mathcal{C}$. Alors pour tout $p \in]1, +\infty[$, on a*

$$C_d \frac{1}{p^2} \int_{\mathbb{R}^d} |a(x)|^p dx \leq \int_{\mathbb{R}^d} |\nabla a|^2 |a|^{p-2} = -\frac{1}{p-1} \int_{\mathbb{R}^d} a|a(x)|^{p-2} \Delta a \, dx.$$

Le résultat ci-dessus est trivialement vérifié pour $p = 2$: c'est le lemme de Plancherel. Par contre, il n'y a rien d'évident dans le cas $p \neq 2$, vu qu'il y a un mélange de fréquences qui empèche la fonction $|\nabla a|^2 |a|^{p-2}$ d'être supportée dans une couronne. En fait il y a une démonstration simple suggérée par F. Planchon dans [32].

Il est bien connu que l'équation de la chaleur joue ponctuellement en temps un rôle régularisant de la donnée initiale dès qu'on décolle de l'instant $t = 0$. Cet aspect est décrit par le lemme ci-après qui est démontré par exemple dans [8].

Lemme 4.2.3. *Soit $\mathcal{C}$ une couronne. Il existe deux constantes positives c et C telles que, pour tout couple (t,λ) de réels positifs, pour tout $p \in [1,+\infty]$ et pour tout $a \in L^p$, on aura l'implication :*

$$\text{Supp}\, \widehat{a} \subset \lambda \mathcal{C} \Rightarrow \|e^{t\Delta} a\|_{L^p} \leq C e^{-ct\lambda^2} \|a\|_{L^p}.$$

Rappelons maintenant un résultat très utile et qui est une pierre fondatrice de la preuve de l'effet régularisant. Il a été établi par M. Vishik dans [36].

Lemme 4.2.4. *Soit d un entier supérieur ou égal à 2. Il existe une constante positive C ne dépendant que de d telle que, pour toute fonction a de la classe de Schwartz et pour tout difféomorphisme ψ de $\mathbb{R}^d$ préservant la mesure de Lebesgue, on aura pour tout $p \in [1, +\infty]$, pour tout $k \in \mathbb{N}$ et pour tous les $j,q \geq -1$,*

$$\|\Delta_j(\Delta_q a \circ \psi)\|_{L^p} \leq C 2^{-|j-q|} \|\nabla \psi^{\alpha(j,q)}\|_{L^\infty} \|\Delta_q a\|_{L^p},$$

où l'on a posé

$$\alpha(j,q) = \begin{cases} \frac{j-q}{|j-q|}, & \text{si } j \neq q, \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

Nous convenons que $\psi^0 = \text{Id}$.

Pour finir cette section nous allons donner, dans un cadre restreint, une sorte de réciproque de l'injection de Sobolev $B^s_p \hookrightarrow C^{s-2/p}$. Nous fournirons la preuve pour la commodité du lecteur.

Lemme 4.2.5. *Soient s un réel strictement positif, $p \in [1, +\infty]$ et K un compact de $\mathbb{R}^d$, avec $d \geq 2$. Alors il existe une constante C_K telle que, pour toute distribution tempérée u, supportée dans K et appartenant à B^s_∞, on a*

$$\|u\|_{B^s_p} \leq C_K \|u\|_{B^s_\infty}.$$

Preuve : Nous ferons usage de la décomposition de Bony. Soit ϕ une fonction de la classe de Schwartz, valant 1 dans un voisinage de K. Alors on a : $u = \phi u$. Ainsi on peut écrire

$$u = T_\phi u + T_u \phi + R(u,\phi).$$

Concernant le premier terme, on le majore facilement comme suit

$$\begin{aligned}\|\Delta_q(T_\phi u)\|_{L^p} &\leq \sum_{|q'-q|\leq N_0} \|S_{q'-1}\phi\|_{L^p}\|\Delta_{q'}u\|_{L^\infty}\\ &\leq C2^{-qs}\|\phi\|_{L^p}\|u\|_{C^s}.\end{aligned}$$

De la même manière, on établit que

$$\|\Delta_q(T_u\phi)\|_{L^p} \leq C2^{-qs}\|u\|_{L^\infty}\|\phi\|_{B^s_p}.$$

Pour le terme de reste, on écrit grâce à la stricte positivité de s

$$\begin{aligned}\|\Delta_q R(u,\phi)\|_{L^p} &\leq \sum_{\substack{q'\geq q-N_0\\ i\in\{\mp 1,0\}}} \|\Delta_{q'+i}\phi\|_{L^p}\|\Delta_{q'}u\|_{L^\infty}\\ &\leq C2^{-qs}\|\phi\|_{L^p}\|u\|_{C^s}.\end{aligned}$$

Ainsi la preuve du lemme est achevée.

4.3 Un effet régularisant

Il s'agit dans ce paragraphe de décrire un effet régularisant constaté dans les équations de transport-diffusion (TD_ν) correspondant à un champ de vecteurs logarithmiquement lipschitzien et de divergence nulle. Nous en déduirons le cas particulier discuté dans la proposition 4.1.1. L'équation dont il s'agit est donnée par :

$$(TD_\nu)\begin{cases}\partial_t a + v\cdot\nabla a - \nu\Delta a = 0\\ a_{|t=0} = a^0.\end{cases}$$

Nous montrerons qu'en particulier si $a^0 \in L^\infty$, alors pour tout temps positif t

$$\nu\int_0^t a(\tau,x)d\tau \in C^1_{LL} \overset{déf}{=} \Big\{u \in L^\infty\,; \nabla u \in C_{LL}\Big\}.$$

En outre, son contrôle est indépendant de la viscosité lorsque cette dernière est bornée. D'une manière plus précise, nous obtenons ce qui suit.

Proposition 4.3.1. *Soit v est un champ de vecteurs de $\mathbb{R}^d$ appartenant à $L^1_{loc}(\mathbb{R}_+\,;\,C_{LL})$ et à divergence nulle. Il existe une constante absolue C telle que, si a est une solution associée à la donnée initiale $a^0 \in L^p$, avec $p \in [1,+\infty]$, alors, on aura pour tout $r \in [1,+\infty]$ et pour tout $T > 0$*

$$(\nu 2^{2q})^{\frac{1}{r}}\|\Delta_q a\|_{L^r_T L^p} \leq C\|a^0\|_{L^p}\Big(1+\nu T+(q+2)\int_0^T \|v(\tau)\|_{LL}d\tau\Big)^{\frac{1}{r}}.$$

Remarque: Le terme en νT figurant dans le membre de droite de l'inégalité ci-avant est dû au basses fréquences. Il disparaît quand $q \in \mathbb{N}$. D'un autre côté, cette proposition permet de retrouver le résultat mentionné dans la proposition 4.1.1. En effet, si $\omega^0 \in L^1 \cap L^\infty$, alors on a pour tout $t \in \mathbb{R}_+$ l'estimation classique

$$\|v_\nu(t)\|_{LL} \leq C\|v_\nu(t)\|_{B^1_\infty} \leq C\|\omega^0\|_{L^1\cap L^\infty}.$$

4.3.1 Démonstration de la proposition 4.3.1

La preuve ressemble à celle que nous avons utilisée dans [24] pour démontrer un résultat similaire pour les équations (TD_ν) mais pour un champ de vecteurs lipschitzien. Dans ce cas, nous n'avons pas cette perte logarithmique de la fréquence. L'idée qu'on va développer consiste à localiser l'équation (TD_ν) sur des couronnes dyadiques de taille 2^q et d'utiliser un changement de variables lagrangien. Alors, pour une fréquence fixée de taille 2^q nous parvenons à boucler nos estimations mais sur un intervalle de temps dont la taille est de l'ordre de l'inverse du logarithme de la fréquence, i.e., $\frac{1}{q}$. Donc nous serons amenés à utiliser un argument de proche en proche, mais ce qui est capital dans cette manœuvre est le fait que a est en tout temps borné (ce qui s'obtient via le principe du maximum). Ceci empèche heureusement d'autres pertes en q, qui peuvent avoir des répercussions néfastes. Dans la suite, on pose $a_q = \Delta_q a$. Alors en appliquant l'opérateur Δ_q à l'équation régissant a, on trouve

$$\begin{aligned}\partial_t a_q + S_{q-1}v\cdot\nabla a_q - \nu\Delta a_q &= S_{q-1}v\cdot\nabla a_q - \Delta_q(v\cdot\nabla a),\\ &\stackrel{\text{déf}}{=} \mathcal{R}_q(v,a) = \mathcal{R}_q.\end{aligned} \tag{4.3}$$

L'estimation du second membre $\mathcal{R}_q$ est l'objet du lemme suivant, qu'on démontrera à la fin de ce paragraphe.

Lemme 4.3.1. *Soit v un champ de vecteurs de $\mathbb{R}^d$, à divergence nulle et appartenant à C_{LL}. On se donne un élément a de L^p, avec $p \in [1,+\infty]$. Alors, il existe une constante absolue C telle que, pour tout $q \geq -1$*

$$\|\mathcal{R}_q\|_{L^p} \leq C\|v\|_{LL}\sum_{j\geq -1} 2^{-|j-q|}\big(\max\{j,q\}+2\big)\|\Delta_j a\|_{L^p}.$$

En particulier, pour tout $s \in]-1,1[$

$$\|\mathcal{R}_q\|_{L^p} \leq C\Big(\frac{1}{1-s}+\frac{1}{(1+s)^2}\Big)\|v\|_{LL}(q+2)2^{-qs}\|a\|_{B^s_p}.$$

Dans le cas particulier où $d = 2$ et $a = \text{rot}\, v$, il existe un entier absolu M_0 tel qu'on ait pour tout $q \geq -1$

$$\|\mathcal{R}_q\|_{L^p} \leq C\|v\|_{LL}\sum_{j\geq q-M_0}(j+2)2^{q-j}\|\Delta_j a\|_{L^p}.$$

Désignons par $\psi_q(t)$ le flot correspondant à la vitesse régularisée $S_{q-1}v$, et que l'on définit par l'équation intégrale

$$\psi_q(t,x) = x + \int_0^t S_{q-1}v\big(\tau,\psi_q(\tau,x)\big)d\tau.$$

Nous avons par la proposition 4.2.2

$$\int_0^t \|\nabla S_{q-1}v(\tau)\|_{L^\infty} d\tau \leq C(q+2)\int_0^t \|v(\tau)\|_{LL} d\tau \stackrel{déf}{=} V_q(t).$$

Ainsi un calcul classique montre que le flot et son inverse jouissent des estimations suivantes

$$\|\nabla\psi_q^{\pm 1}(t)\|_{L^\infty} \leq e^{V_q(t)} \quad \text{et} \quad \|\nabla^2\psi_q^{\pm 1}(t)\|_{L^\infty} \leq C2^q V_q(t)\, e^{V_q(t)}, \tag{4.4}$$

où l'on note $\psi_q^1(t,x) = \psi_q(t,x)$. Posons maintenant

$$\bar{a}_q(t,x) = a_q\big(t,\psi_q(t,x)\big) \quad \text{et} \quad \bar{\mathcal{R}}_q(t,x) = \mathcal{R}_q\big((t,\psi_q(t,x)\big).$$

En effectuant un calcul simple, nous parvenons à établir l'identité :

$$\begin{aligned}\Delta a_q(t)\circ\psi_q(t,x) &= \sum_{i=1}^d \Big\langle \nabla^2\bar{a}_q(t,x)\cdot(\partial^i\psi_q^{-1})(t,\psi_q(t,x)),(\partial^i\psi_q^{-1})(t,\psi_q(t,x))\Big\rangle \\ &+ \nabla\bar{a}_q(t,x)\cdot(\Delta\psi_q^{-1})(t,\psi_q(t,x)).\end{aligned} \tag{4.5}$$

D'une autre part, en dérivant l'équation intégrale vérifiée par l'inverse du flot et en recourant à quelques estimations élémentaires, nous parvenons à établir

$$(\partial^i\psi_q^{-1})(t,\psi_q(t,x)) = e_i + g_q^i(t,x), \tag{4.6}$$

avec g_q^i une fonction qui s'estime dans la classe des fonctions bornées de la manière suivante

$$\|g_q^i(t)\|_{L^\infty} \leq V_q(t)\, e^{V_q(t)} \stackrel{déf}{=} g_q(t). \tag{4.7}$$

Donc, on trouve grâce à (4.6) et (4.5) que $\bar{a}_q$ satisfait l'équation parabolique ci-après

$$\begin{aligned}(\partial_t - \nu\Delta)\bar{a}_q(t,x) &= \nu\sum_{i=1}^d \langle\nabla^2\bar{a}_q(t,x)g_q^i,g_q^i(t,x)\rangle + 2\nu\sum_{i=1}^d\langle\nabla^2\bar{a}_q(t,x)e_i,g_q^i(t,x)\rangle \\ &+ \nu\nabla\bar{a}_q(t,x)\cdot(\Delta\psi_q^{-1})(t,\psi_q(t,x)) + \bar{\mathcal{R}}_q(t,x).\end{aligned} \tag{4.8}$$

Comme le spectre fréquenciel de la fonction $\bar{a}_q$ n'est pas nécessairement localisé, alors pour qu'on puisse appliquer le lemme 4.2.3, nous devons relocaliser de nouveau sur des couronnes dyadiques à l'aide de l'opérateur Δ_j, avec $j \in \mathbb{N}$. Ainsi donc, en appliquant le lemme 4.2.3, on trouve

$$\begin{aligned}\|\Delta_j\bar{a}_q(t)\|_{L^p} \leq Ce^{-c\nu t2^{2j}}\|\Delta_j a_q(0)\|_{L^p} &+ C\nu\big(g_q(t)+g_q^2(t)\big)\int_0^t e^{-c\nu(t-\tau)2^{2j}}\|\nabla^2\bar{a}_q(\tau)\|_{L^p}d\tau \\ &+ C\nu 2^q g_q(t)\int_0^t e^{-c\nu(t-\tau)2^{2j}}\|\nabla\bar{a}_q(\tau)\|_{L^p}d\tau \\ &+ C\int_0^t e^{-c\nu(t-\tau)2^{2j}}\|\Delta_j\bar{\mathcal{R}}_q(\tau)\|_{L^p}d\tau.\end{aligned}$$

Pour majorer le dernier terme qui figure dans le second membre de l'inégalité ci-dessus, on applique l'inégalité de Bernstein qui entraîne

$$\begin{aligned}\|\Delta_j\bar{\mathcal{R}}_q(t)\|_{L^p} &\leq C2^{-j}\|\nabla(\mathcal{R}_q\circ\psi_q(t))\|_{L^\infty},\\ &\leq C2^{q-j}\|\nabla\psi_q(t)\|_{L^\infty}\|\mathcal{R}_q(t)\|_{L^p}.\end{aligned}$$

Par conséquent, la combinaison du lemme 4.3.1 avec l'estimation (4.4) et l'inégalité

$$\|a(t)\|_{L^p}\leq\|a^0\|_{L^p},\,\forall\,t\in\mathbb{R}_+$$

permet d'avoir

$$\begin{aligned}\|\Delta_j\bar{a}_q(t)\|_{L^p}\leq Ce^{-c\nu t2^{2j}}\|\Delta_j a_q(0)\|_{L^p} &+ C\nu\big(g_q(t)+g_q^2(t)\big)\int_0^t e^{-c\nu(t-\tau)2^{2j}}\|\nabla^2\bar{a}_q(\tau)\|_{L^p}d\tau\\ &+ C\nu 2^q g_q(t)\int_0^t e^{-c\nu(t-\tau)2^{2j}}\|\nabla\bar{a}_q(\tau)\|_{L^p}d\tau \qquad (4.9)\\ &+ C(q+2)2^{q-j}\|a^0\|_{L^p}\int_0^t e^{-c\nu(t-\tau)2^{2j}}\|v(\tau)\|_{LL}e^{V_q(\tau)}d\tau.\end{aligned}$$

Prenons la norme L^r des deux côtés dans l'estimation (4.9) et utilisons les inégalités de convolution. Alors nous en déduisons à l'aide de la monotonie de g_q que

$$\begin{aligned}\|\Delta_j\bar{a}_q(t)\|_{L^r([0,t];L^p)}\leq C(\nu 2^{2j})^{\frac{-1}{r}}\|\Delta_j a_q(0)\|_{L^p} &+ C\big(g_q(t)+g_g^2(t)\big)2^{-2j}\|\nabla^2\bar{a}_q\|_{L^r([0,t];L^p)}\\ &+ Cg_q(t)2^q 2^{-2j}\|\nabla\bar{a}_q\|_{L^r([0,t];L^p)}\\ &+ C2^{q-j}\|a^0\|_{L^p}(\nu 2^{2j})^{\frac{-1}{r}}\big(e^{V_q(t)}-1\big). \quad (4.10)\end{aligned}$$

D'une autre part, en se servant de (4.4), il vient d'après la préservation de la mesure par le flot $\psi_q(t)$,

$$\begin{aligned}\|\nabla\bar{a}_q(t)\|_{L^p} &\leq C2^q e^{V_q(t)}\|a_q(t)\|_{L^p}, &(4.11)\\ \|\nabla^2\bar{a}_q(t)\|_{L^p} &\leq C2^{2q}e^{CV_q(t)}\|a_q(t)\|_{L^p}. &(4.12)\end{aligned}$$

Ainsi, en reportant ces estimations dans (4.10) et en sommant sur les j supérieur à $q-N_0$, on trouve

$$\begin{aligned}(\nu 2^{2q})^{\frac{1}{r}}\sum_{j\geq q-N_0}\|\Delta_j\bar{a}_q\|_{L^r([0,t];L^p)}\leq C\|a^0\|_{L^p} &+ 2^{2N_0}h_q(t)(\nu 2^{2q})^{\frac{1}{r}}\|a_q\|_{L^r([0,t];L^p)} \quad (4.13)\\ &+ C2^{N_0(1+\frac{2}{r})}\|a^0\|_{L^p}\big(e^{V_q(t)}-1\big),\end{aligned}$$

où l'on a posé $h_q(t)=CV_q(t)\,e^{CV_q(t)}$. En ce qui concerne les basses fréquences, nous utilisons le lemme 4.2.4, qui implique

$$\sum_{j\leq q-N_0}\|\Delta_j\bar{a}_q\|_{L_t^rL^p}\leq C2^{-N_0}e^{V_q(t)}\|a_q\|_{L_t^rL^p}. \qquad (4.14)$$

Donc, en combinant (4.13) et (4.14), on parvient à

$$
\begin{aligned}
(\nu 2^{2q})^{\frac{1}{r}}\|a_q\|_{L^r([0,t];L^p)} \leq C\|a^0\|_{L^p} &+ 2^{2N_0}h_q(t)(\nu 2^{2q})^{\frac{1}{r}}\|a_q\|_{L^r([0,t];L^p)}\\
&+ C(\nu 2^{2q})^{\frac{1}{r}}\|a_q\|_{L^r([0,t];L^p)}2^{-N_0}e^{V_q(t)}\\
&+ C2^{3N_0}\big(e^{V_q(t)}-1\big)\|a^0\|_{L^p}.
\end{aligned}
$$

En conséquence, si l'on impose à t et N_0 les deux conditions suivantes

$$2^{2N_0}h_q(t) \leq \frac{1}{4} \quad \text{et} \quad C2^{-N_0}e^{V_q(t)} \leq \frac{1}{4}, \tag{4.15}$$

alors nous aurons pour tout $q \geq N_0$

$$(\nu 2^{2q})^{\frac{1}{r}}\|a_q\|_{L^r_t L^p} \leq C2^{4N_0}\|a^0\|_{L^p} \tag{4.16}$$

En fait, les conditions données par (4.15) sont satisfaites dès qu'on se place sous l'hypothèse

$$(q+2)\int_0^t \|v(\tau)\|_{LL}d\tau \leq C_0, \tag{4.17}$$

La constante C_0 est absolue, et *a fortiori* N_0, dont le choix ne dépend pas de q. Pour s'en rendre compte, on prend d'abord $V_q(t) \leq 1$ et on choisit N_0 pour que $2^{-N_0} \leq \frac{1}{4eC}$, puis quitte à diminuer encore $V_q(t)$, on trouve $C2^{2N_0}h_q(t) \leq \frac{1}{4}$, ce qui est faisable car la fonction xe^x tend vers zéro quand x tend vers zéro. Enfin nous établissons l'existence d'un entier N_0 tel que, pour tout t vérifiant (4.17) et pour tout $q \geq N_0$, on ait

$$(\nu 2^{2q})^{\frac{1}{r}}\|a_q\|_{L^r([0,t];L^p)} \leq C\|a^0\|_{L^p}.$$

Nous allons dans ce qui suit étendre l'estimation du dessus à n'importe quel temps arbitraire T. Pour un tel objectif, on se donne un entier q supérieur à N_0 et on découpe l'intervalle de temps $[0,T]$ de la manière suivante :

$$T_0 < T_1 < \ldots < T_N \quad \text{et} \quad (q+2)\int_{T_i}^{T_{i+1}} \|v(\tau)\|_{LL}d\tau \simeq C_0, \forall i \in [\![0,N-1]\!].$$

Alors en reproduisant la démarche précédente tout en manœuvrant avec le flot valant l'identité à l'instant T_i, on parvient à établir que pour tout $q \geq N_0$

$$(\nu 2^{2q})^{\frac{1}{r}}\|a_q\|_{L^r([T_i,T_{i+1}];L^p)} \leq C\|a^0\|_{L^p}.$$

Ainsi en recollant les morceaux et en se servant du fait que

$$N \leq C\Big(1+(q+2)\int_0^T \|v(\tau)\|_{LL}d\tau\Big),$$

on trouve pour tout $q \geq N_0$

$$\nu 2^{2q}\|a_q\|^r_{L^r([0,T];L^p)} \leq C^r N\|a^0\|^r_{L^p}. \tag{4.18}$$

Concernant les basses fréquences, on écrit

$$(\nu 2^{2q})^{\frac{1}{r}}\|a_q\|_{L^r([0,T];L^p)} \leq C(\nu T)^{\frac{1}{r}}\|a^0\|_{L^p}. \tag{4.19}$$

Finalement, en combinant (4.18) et (4.19) on trouve l'estimation énoncée dans le lemme.

4.3.2 Preuve du lemme de commutation

L'objet de ce paragraphe est de démontrer le lemme 4.3.1. A cette fin, nous allons nous servir de la décomposition de Bony. Tout d'abord nous rappelons que le terme $\mathcal{R}_q(v,a)$ est donné par la relation

$$\Delta_q(v \cdot \nabla a) = S_{q-1}v \cdot \nabla a_q + \mathcal{R}_q(v,a). \tag{4.20}$$

D'une manière plus précise, il se décompose comme suit (voir la preuve du lemme 2.4.1 du deuxième chapitre).

$$\mathcal{R}_q(v,a) = \sum_{l=1}^{4} \mathcal{R}_q^l(v,a),$$

où l'on a posé

$$\begin{aligned}
R_q^1(v,a) &= \sum_{k=1}^{d} \Delta_q(T_{\partial_k a} v^k),\\
R_q^2(v,a) &= -\sum_{k=1}^{d} [T_{v^k}\partial_k, \Delta_q]a,\\
R_q^3(v,a) &= \sum_{k=1}^{d} T_{(v^k - S_{q-1}v^k)}\partial_k \Delta_q a,\\
R_q^4(v,a) &= \sum_{k=1}^{d} \Delta_q R(v^k, \partial_k a) - R(S_{q-1}v^k, \Delta_q \partial_k a).
\end{aligned}$$

Estimation de $R_q^1(v,a)$: Comme la transformée de Fourier de $S_{q'-1}\partial_k a \Delta_{q'} v^k$ est supportée dans une couronne de taille $2^{q'}$, alors on ne tiendra compte dans la décomposition de $R_q^1(v,a)$ que d'un nombre fini de termes et l'on écrit

$$R_q^1(v,a) = \sum_{k=1}^{d} \sum_{|q'-q| \le M_0} \Delta_q\big(S_{q'-1}\partial_k a\, \Delta_{q'} v^k\big).$$

Nous signalons que cette somme porte sur les entiers q' positif, sinon $S_{q'-1}$ est nul. Ceci permet grâce au lemme de Bernstein et la proposition 4.2.2 d'avoir

$$\|S_{q'-1}\partial_k a\, \Delta_{q'} v^k\|_{L^p} \le C 2^{-q'}(q'+2)\|v\|_{LL} \sum_{j \le q'-2} 2^j \|\Delta_j a\|_{L^p}. \tag{4.21}$$

Ainsi, comme $|q - q'| \le M_0$, alors on aura pour tout entier $q \ge -1$

$$\|R_q^1(v,a)\|_{L^p} \le C\|v\|_{LL}(q+2) \sum_{j \ge -1} 2^{-|j-q|} \|\Delta_j a\|_{L^p}.$$

ESTIMATION DE $R_q^2(v,a)$: Nous avons par définition du paraproduit et grâce à la commutation des opérateurs Δ_q entre eux

$$\begin{aligned}
R_q^2(v,a) &= \sum_{k=1}^{d}\sum_{q'}[S_{q'-1}v^k\partial_k\Delta_{q'},\Delta_q]a,\\
&= \sum_{k=1}^{d}\sum_{q'}[S_{q'-1}v^k\partial_k,\Delta_q]\Delta_{q'}a.
\end{aligned}$$

La somme est en fait finie. Elle ne concerne que les indices q' vérifiant $|q'-q|\le M_0$. Ceci est dû, d'une part, à la localisation du support de la transformée de Fourier de $S_{q'-1}v^k\Delta_{q'}\partial_k a$ dans une couronne de taille $2^{q'}$ et d'autre part au fait que $\Delta_q\Delta_{q'}\equiv 0$, si $|q'-q|\ge 2$. Maintenant occupons-nous de la majoration du commutateur. Pour cela, nous écrivons l'opérateur Δ_q comme une intégrale de convolution :

$$\begin{aligned}
\big\|[S_{q'-1}v^k\partial_k,\Delta_q]\Delta_{q'}a\big\|_{L^p} &= 2^{qd}\Big\|\int\tilde h(2^q(x-y))(S_{q'-1}v^k(x)-S_{q'-1}v^k(y))\Delta_{q'}\partial_k a(y)dy\Big\|_{L^p}\\
&\le C2^{-q}\|\nabla S_{q'-1}v\|_{L^\infty}\|\Delta_{q'}\partial_k a\|_{L^p},\\
&\le C\|v\|_{LL}2^{q'-q}(q'+2)\|\Delta_{q'}a\|_{L^p}.
\end{aligned}$$

En conséquence, nous aurons l'estimation

$$\|R_q^2(v,a)\|_{L^p}\le C\|v\|_{LL}(q+2)\sum_{|q'-q|\le M_0}2^{-|q'-q|}\|\Delta_{q'}a\|_{L^p}.$$

ESTIMATION DE $R_q^3(v,a)$: Par définition du paraproduit, nous avons

$$R_q^3(v,a)=\sum_{k=1}^{d}\sum_{|q'-q|\le 1}S_{q'-1}(v^k-S_{q-1}v^k)\Delta_{q'}\partial_k\Delta_q a.$$

En revenant à la proposition 4.2.2 et en utilisant les inégalités de Bernstein, on aura

$$\begin{aligned}
\|S_{q'-1}(v^k-S_{q-1}v^k)\|_{L^\infty} &\le \sum_{j\ge q-1}\|\Delta_j v\|_{L^\infty},\\
&\le C\|v\|_{LL}\sum_{j\ge q-1}2^{-j}(j+2),\\
&\le C\|v\|_{LL}2^{-q}(q+2).
\end{aligned}$$

Ce qui nous assure dans ce cas la majoration souhaitée.

ESTIMATION DE $R_q^4(v,a)$: Nous commençons par décomposer ce terme en deux parties

$$R_q^4(v,a)=R_q^{4,1}(v,a)+R_q^{4,2}(v,a),$$

avec

$$\begin{aligned}
R_q^{4,1}(v,a) &= \sum_{k=1}^{d}\Delta_q R(v^k-S_{q-1}v^k,\partial_k a),\\
R_q^{4,2}(v,a) &= \sum_{k=1}^{d}\Delta_q R(S_{q-1}v^k,\partial_k a)-R(S_{q-1}v^k,\Delta_q\partial_k a).
\end{aligned}$$

Par définition du reste et grâce à la condition de divergence nulle du champ de vecteurs v, nous pouvons écrire

$$R_q^{4,1}(v,a)=\sum_{k=1}^{d}\Delta_q\partial_k\sum_{\substack{q'\geq q-M_0\\ i\in\{\mp1,0\}}}\Delta_{q'}(\mathrm{Id}-S_{q-1})v^k\Delta_{q'+i}a. \tag{4.22}$$

En appliquant le lemme de Bernstein et la caractérisation dyadique des éléments de C_{LL}, nous en déduisons que

$$\begin{aligned}\|\Delta_{q'}(\mathrm{Id}-S_{q-1})v^k\|_{L^\infty} &= \Big\|\sum_{\substack{|q'-j|\leq 1\\ j\geq q-1}}\Delta_{q'}\Delta_j v^k\Big\|_{L^\infty},\\ &\leq C\|v\|_{LL}2^{-q'}(q'+2).\end{aligned}$$

En reportant cett inégalité dans (4.22), nous obtenons suite à une estimation L^p

$$\|R_q^{4,1}(v,a)\|_{L^p}\leq C\|v\|_{LL}2^q\sum_{q'\geq q-M_0}2^{-q'}(q'+2)\|\Delta_{q'}a\|_{L^p}.$$

Concernant le terme $R_q^{4,2}(v,a)$, il sera traité comme le terme $R_q^2(v,a)$ et nous obtenons grâce à la condition div $S_{q-1}v=0$,

$$\begin{aligned}R_q^{4,2}(v,a) &= \sum_{\substack{q'\geq q-M_0\\ i\in\{\mp1,0\}}}[\Delta_q,\Delta_{q'}S_{q-1}v^k]\Delta_{q'+i}\partial_k a=R_{q,1}^{4,2}(v,a)+R_{q,2}^{4,2}(v,a),\\ &= \sum_{\substack{|q'-q|\leq M_0\\ i\in\{\mp1,0\}}}[\Delta_q,\Delta_{q'}S_{q-1}v^k]\Delta_{q'+i}\partial_k a+\sum_{\substack{q'>q+M_0\\ i\in\{\mp1,0\}}}\Delta_q\partial_k(\Delta_{q'}S_{q-1}v^k\Delta_{q'+i}a).\end{aligned}$$

Signalons que la condition $\Delta_q\Delta_{q'+i}a=0$ si $|q'-q|\geq 3$ justifie bien l'expression figurant dans la dernière somme. En utilisant une démarche analogue à celle qu'on a employée dans l'estimation de R_q^2, on obtient

$$\|R_{q,1}^{4,2}(v,a)\|_{L^p}\leq C\|v\|_{LL}(q+2)\sum_{\substack{|q'-q|\leq M_0\\ i\in\{\mp1,0\}}}2^{q'-q}\|\Delta_{q'+i}a\|_{L^p}.$$

La deuxième somme se majore comme suit

$$\begin{aligned}\|R_{q,2}^{4,2}(v,a)\|_{L^p} &\leq C2^q\sum_{\substack{q'>q+M_0\\ i\in\{\mp1,0\}}}\|\Delta_{q'}v\|_{L^p}\|\Delta_{q'+i}a\|_{L^p},\\ &\leq C\|v\|_{LL}\sum_{q'\geq q+M_0-1}2^{q-q'}(q'+2)\|\Delta_{q'}a\|_{L^p}.\end{aligned}$$

Ceci permet d'achever la preuve de la première partie du lemme 4.3.1. La deuxième est une simple déduction de la première tandis que dans le cas où $a=\mathrm{rot}v$, il suffit de montrer que le terme R_q^1 est majoré par la quantité souhaitable. Pour ce faire, on remplace l'estimation (4.21) par

$$\begin{aligned}\|S_{q'-1}\partial_k a\,\Delta_{q'}v^k\|_{L^p} &\leq \|S_{q'-1}\partial_k a\|_{L^\infty}\|\Delta_{q'}v^k\|_{L^p}\\ &\leq C2^{q'}\|S_{q'-1}\nabla v\|_{L^\infty}\|\Delta_{q'}v^k\|_{L^p}\\ &\leq C(q'+2)\|v\|_{LL}\|\Delta_{q'}a\|_{L^p}.\end{aligned}$$

4.4 Propagation dans les espaces de Besov

Ce paragraphe est consacré à l'étude de la régularité dans les équations de transport-diffusion avec un second membre, où l'on suppose que la vitesse est lipschitzienne dans le support de la solution. L'équation considérée est

$$(TD_\nu)\begin{cases} \partial_t a + v\cdot\nabla a - \nu\Delta a = f + \nu g \\ a_{|t=0} = a^0. \end{cases}$$

Le résultat de propagation que nous allons démontrer est seulement prouvé dans les espaces de Besov B^s_p, avec p fini. Il s'avère que les espaces de Hölder ne sont pas bien adaptés et la méthode qu'on a utilisée dans [24] pour propager la régularité höldérienne dans le cas d'un champ lipschitzien est difficile à mettre en œuvre lorsque le champ de vecteurs est seulement log-lipschitz. Avant de fournir le résultat en question, nous allons introduire quelques espaces fonctionnels qui s'avèrent commodes pour la description de nos résultats. Soit $t > 0$, $s \in \mathbb{R}$ et $(r,p) \in [1, +\infty]^2$. Alors on note par $\widetilde{L^r_t}B^s_p$ l'espace des fonctions u vérifiant

$$\|u\|_{\widetilde{L^r_t}B^s_p} \stackrel{déf}{=} \sup_q 2^{qs}\|\Delta_q u\|_{L^r([0,t];L^p)} < +\infty.$$

Définition 4.4.1. *Soit a un nombre réel ≥ 1. On note par L (pour alléger la notation, on omet sa dépendance par rapport à a) l'espace des fonctions u satisfaisant*

$$\|u\|_L \stackrel{déf}{=} \sup_{b\geq a}\frac{\|u\|_{L^b}}{b} < +\infty.$$

Soit Σ un ensemble fermé de $\mathbb{R}^2$. On note $L(\Sigma)$ l'espace des fonctions u vérifiant

$$\|u\|_{L(\Sigma)} \stackrel{déf}{=} \sup_{0<h\leq e^{-1}}\frac{\|u\|_{L^\infty(\Sigma^c_h)}}{-\log h} < +\infty.$$

On note aussi $LL(\Sigma)$ l'espace $L\cap L(\Sigma)$ muni de norme

$$\|u\|_{LL(\Sigma)} = \|u\|_L + \|u\|_{L(\Sigma)}.$$

Finalement, on définit l'espace $LL^0(\Sigma) = LL(\Sigma)\cap C^0_*$ que l'on munit de la norme

$$\|u\|_{LL^0(\Sigma)} = \|u\|_{LL(\Sigma)} + \|u\|_{C^0_*}.$$

Remarque : Dans le cadre du système de Navier-Stokes bidimensionnel incompressible, si l'on part d'une donnée initiale à tourbillon ω^0 dans $L^1\cap L^\infty$, alors on a une unique solution globale v_ν vérifiant les estimations suivantes uniformément en ν.

$$\|v_\nu(t)\|_{LL} \leq C\|v_\nu(t)\|_{C^1_*} \leq C\|\omega^0\|_{L^1\cap L^\infty}. \tag{4.23}$$

Nous avons aussi

$$\|\nabla v_\nu(t)\|_{L^p} \leq C\frac{p^2}{p-1}\|\omega^0\|_{L^1\cap L^\infty} \tag{4.24}$$

En fait la première estimation de (4.23) n'est autre que l'inclusion continue de l'espace C^1_* dans C_{LL}, tandis que l'autre provient tout simplement du lemme de Bernstein et la loi de Biot-Savart décrivant la vitesse à partir du tourbillon. Par contre l'estimation (4.24) est plus délicate.

L'une de ses preuves est fondée sur la décomposition de Caldéron-Zygmund et sur un lemme d'interpolation. Pour plus de détails, on peut consulter par exemple [6].
Voilà maintenant le résultat de propagation que l'on va démontrer.

Proposition 4.4.1. *Il existe une constante C telle qu'on ait la propriété suivante. Soient s un nombre appartenant à $]-1,1[$, $r \in [1,+\infty]$ et $p > 1$. Soit v un champ de vecteurs infiniment dérivable. On se donne une solution $a(t)$ de (TD_ν) telle que son support est inclus dans l'ensemble $(\Sigma_t)^c_{\delta(t,h)}$. On suppose que*

$$\sup_{t\in[0,T]} \|a(t)\|_{B^s_p} < +\infty, \quad \sup_{t\in[0,T]} \|f\|_{\widetilde{L}^r_t B^{s-2/\bar{r}}_p} \quad et \quad \sup_{t\in[0,T]} \|g\|_{\widetilde{L}^\infty_t B^{s-2}_p} < +\infty.$$

Alors on aura pour tout $t \in \mathbb{R}_+$,

$$\|a(t)\|_{B^s_p} \leq C h^{-C_s \int_0^t W_1(\tau)d\tau} \Big(\|a^0\|_{B^s_p} + \big(\nu^{\frac{-1}{\bar{r}}} + t^{\frac{1}{\bar{r}}}\big) \|f\|_{\widetilde{L}^r_t B^{s-2/\bar{r}}_p} + \Big(C_p + \nu t\Big) \|g\|_{\widetilde{L}^\infty_t B^{s-2}_p} \Big).$$

Si $\nu = 0$ et $g \equiv 0$, alors on aura

$$\|a(t)\|_{B^s_p} \leq C h^{-C_s \int_0^t W_1(\tau)d\tau} \Big(\|a^0\|_{B^s_p} + \|f\|_{\widetilde{L}^1_t B^s_p} \Big),$$

où l'on a posé,

$$W_1(\tau) = \|\nabla v(t)\|_{LL^0(\Sigma_t)} e^{\int_0^t \|v(\tau)\|_{LL} d\tau}, \quad \delta(t,h) = h^{\exp\left(\int_0^t \|v(\tau)\|_{LL} d\tau\right)}$$

et $\bar{r}$ l'exposant conjugué de r.

Remarque : Les constantes C_s et C_p figurant dans la proposition ci-dessus sont de la forme

$$C_s = \frac{C}{1-s^2} \quad \text{et} \quad C_p = \frac{p^2}{p-1}.$$

Preuve

La méthode qu'on adoptera est de type énergie. Elle est basée sur une régularisation de l'équation (TD_ν) et l'utilisation de l'incompressibilité du flot. Notre outil principal est le lemme 4.2.2 et le corollaire 4.6.1 de l'appendice. Nous commençons par localiser en fréquences l'équation en a. Alors en posant

$$a_q = \Delta_q a, \quad f_q = \Delta_q f \quad \text{et} \quad g_q = \Delta_q g$$

nous obtenons l'équation :

$$\begin{aligned} \big(\partial_t + v\cdot\nabla - \nu\Delta\big) a_q &= -[\Delta_q, v\cdot\nabla]a + f_q + \nu g_q \\ &\overset{déf}{=} \mathcal{R}_q(v,a) + f_q + \nu g_q. \end{aligned}$$

Soit $p > 1$. Multiplions cette équation par $a_q|a_q|^{p-2}$ et faisons quelques intégrations par parties utilisant la divergence nulle du champ de vecteurs $S_{q-1}v$. Alors le lemme 4.2.2 et l'inégalité de Hölder nous assurent que pour tout $q \in \mathbb{N}$

$$\frac{d}{dt}\|a_q(t)\|^p_{L^p} + c\frac{p-1}{p}\nu 2^{2q}\|a_q(t)\|^p_{L^p} \leq p\Big(\|f_q\|_{L^p} + \nu\|g_q(t)\|_{L^p} + \|\mathcal{R}_q(t)\|_{L^p}\Big)\|a_q\|^{p-1}_{L^p}. \quad (4.25)$$

Ainsi, nous en déduisons que

$$\|a_q(t)\|_{L^p} \leq e^{-c\frac{p-1}{p^2}\nu t 2^{2q}}\|a_q(0)\|_{L^p} + \int_0^t e^{-c\frac{p-1}{p^2}\nu(t-\tau)2^{2q}}\Big(\|f_q(\tau)\|_{L^p} + \nu\|g_q(\tau)\|_{L^p} + \|\mathcal{R}_q(t)\|_{L^p}\Big)d\tau.$$

Par conséquent, il vient, en vertu de l'inégalité de Young et du corollaire 4.6.1, que pour tout $q \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}\|a_q(t)\|_{L^p} &\leq \|a_q(0)\|_{L^p} + C\frac{p^2}{p-1}2^{-2q}\sup_{0\leq\tau\leq t}\|g_q(\tau)\|_{L^p}\\ &+ \nu^{\frac{-1}{\bar{r}}}2^{\frac{-2q}{\bar{r}}}\|f_q\|_{L^{\bar{r}}_t L^p} + C2^{-qs}(-\log h)\int_0^t W_1(\tau)\|a(\tau)\|_{B^s_p}d\tau. \qquad (4.26)\end{aligned}$$

Concernant les basses fréquences, nous n'avons pas besoin de gagner deux dérivées par l'intermédiaire du laplacien. Nous avons uniquement besoin d'un signe positif qui est assuré aussi par le lemme 4.2.2 qui nous permet d'avoir

$$\begin{aligned}\|a_{-1}(t)\|_{L^p} &\leq \|a^0_{-1}\|_{L^p} + \int_0^t (\|f_{-1}(\tau)\|_{L^p} + \nu\|g_{-1}(\tau)\|_{L^p} + \|\mathcal{R}_{-1}(t)\|_{L^p})d\tau\\ &\leq \|a^0_{-1}\|_{L^p} + \nu t\sup_{\tau\in[0,t]}\|g_{-1}(\tau)\|_{L^p} + t^{\frac{1}{\bar{r}}}\|f_{-1}\|_{L^{\bar{r}}_t L^p}\\ &+ C(-\log h)\int_0^t W_1(\tau)\|a(\tau)\|_{B^s_p}d\tau. \qquad (4.27)\end{aligned}$$

Donc en combinant (4.26) et (4.27), nous obtenons, pour tout $q \geq -1$,

$$\begin{aligned}\|a_q(t)\|_{L^p} &\leq \|a_q(0)\|_{L^p} + C\Big(\frac{p^2}{p-1} + \nu t\Big)2^{-2q}\sup_{0\leq\tau\leq t}\|g_q(\tau)\|_{L^p} \qquad (4.28)\\ &+ \nu^{\frac{-1}{\bar{r}}}(1 + (\nu t)^{\frac{1}{\bar{r}}})2^{\frac{-2q}{\bar{r}}}\|f_q\|_{L^{\bar{r}}_t L^p} + C2^{-qs}(-\log h)\int_0^t W_1(\tau)\|a(\tau)\|_{B^s_p}d\tau.\end{aligned}$$

En multipliant des deux côtés par 2^{qs} et en prenant le supremum en q, on trouve

$$\begin{aligned}\|a(t)\|_{B^s_p} \leq \|a^0\|_{B^s_p} + C\Big(\frac{p^2}{p-1} + \nu t\Big)\|g\|_{\widetilde{L^\infty_t}B^{s-2}_p} &+ \nu^{\frac{-1}{\bar{r}}}(1 + (\nu t)^{\frac{1}{\bar{r}}})\|f\|_{\widetilde{L^{\bar{r}}_t}B^{s-2/\bar{r}}_p}\\ &+ C(-\log h)\int_0^t W_1(\tau)\|a(\tau)\|_{B^s_p}d\tau.\end{aligned}$$

Il suffit à ce stade d'appliquer le lemme de Gronwall pour obtenir le résultat désiré.

4.5 Etude des poches singulières

Dans cette dernière section nous allons généraliser le théorème 4.1.1 pour des poches de tourbillon dites généralisées. Mais avant de donner l'énoncé dans toute sa généralité, nous aurons besoin d'introduire quelques concepts fondamentaux.

4.5.1 Résultat principal

Afin d'étendre le résultat énoncé dans l'introduction à des géométries diverses, nous allons introduire quelques notations et définitions.

Notations. Pour un champ de vecteurs X régulier, nous définissons son action sur les fonctions bornées u par

$$X(x,D)u \stackrel{déf}{=} \operatorname{div}(Xu) = u \operatorname{div}X.$$

Soit F une partie de $\mathbb{R}^d$ et h un réel positif. Alors on définit les ensembles,

$$F_h^c = \left\{x \in \mathbb{R}^d \ ; \ \text{dist}\ (x,F) \geq h\right\} \quad \text{et} \quad F_h = \left\{x \in \mathbb{R}^d \ ; \ \text{dist}\ (x,F) \leq h\right\}.$$

Définition 4.5.1. *Soit Σ un fermé de $\mathbb{R}^2$ et $\Xi = (\alpha,\beta,\gamma)$ un triplet de nombres réels. On considère une famille $\mathcal{X} = (X_{\lambda,h})_{(\lambda,h)\in\Lambda\times]0,e^{-1}]}$ de champs de vecteurs appartenant avec leur divergence à B_p^s, avec $p \in [1,+\infty]$ et $s \in]-1,1[$. On définit $\mathcal{X}_h = (X_{\lambda,h})_{\lambda\in\Lambda}$.*
La famille $(\mathcal{X})$ est dite $\Sigma-$admissible d'ordre Ξ si et seulement si les conditions suivantes sont remplies :

$$\forall(\lambda,h) \in \Lambda\times]0,e^{-1}], \text{supp}\ X_{\lambda,h} \subset \Sigma_{h^\alpha}^c,$$

$$\mathcal{I}_\gamma(\Sigma,\mathcal{X}) \stackrel{déf}{=} \inf_{h\in]0,e^{-1}]} h^\gamma I(\Sigma_h,\mathcal{X}_h) > 0,$$

$$\mathcal{N}_\epsilon(\mathcal{X}) \stackrel{déf}{=} \sup_{h\in]0,e^{-1}]} h^{-\beta} N_\epsilon(\Sigma_h,\mathcal{X}_h) < +\infty, \quad \text{avec}$$

$$I(\Sigma_h,\mathcal{X}_h) = \inf_{x\notin\Sigma_h} \sup_{\lambda\in\Lambda} |X_{\lambda,h}(x)| \quad \text{et}$$

$$N_\epsilon(\Sigma_h,\mathcal{X}_h) = \frac{1}{\epsilon} \sup_{\lambda\in\Lambda} \frac{\|X_{\lambda,h}\|_{B_p^s} + \|\operatorname{div}X_{\lambda,h}\|_{B_p^s}}{I(\Sigma_h,\mathcal{X}_h)} \stackrel{déf}{=} \frac{1}{\epsilon} \sup_{\lambda\in\Lambda} \frac{\|\widetilde{X_{\lambda,h}}\|_{B_p^s}}{I(\Sigma_h,\mathcal{X}_h)}.$$

Remarque : Pour des raisons de nature géométrique et relatives à l'annulation de la famille de champs de vecteurs $\mathcal{X}$ près de l'ensemble singulier, le réel γ sera pris strictement négatif.
Introduisons maintenant les espaces de Besov anisotropes.

Définition 4.5.2. *Soit Σ un fermé de $\mathbb{R}^2$ et $\mathcal{X}$ une famille $\Sigma-$admissible d'ordre $\Xi = (\alpha,\beta,\gamma)$. Alors on définit l'espace $B_{\Sigma,\mathcal{X}}^{\epsilon,p,\beta}$ comme étant l'ensemble des fonctions bornées u satisfaisant*

$$\|u\|_{\Sigma,\mathcal{X}}^{s,p,\beta} \stackrel{déf}{=} \sup_{h\in]0,e^{-1}]} h^{-\beta} \|u\|_{\Sigma_h,\mathcal{X}_h}^{s,p} < +\infty, \quad \textit{avec}$$

$$\|u\|_{\Sigma_h,\mathcal{X}_h}^{s,p} = N_\epsilon(\Sigma_h,\mathcal{X}_h)\|u\|_{L^\infty} + \sup_{\lambda\in\Lambda} \frac{\|X_{\lambda,h}(x,D)u\|_{B_p^{s-1}}}{I(\Sigma_h,\mathcal{X}_h)}.$$

Lorsque $\|u\|_{\Sigma_h,\mathcal{X}_h}^{s,p} < +\infty$, alors nous dirons que $u \in B_p^s(\Sigma_h)$

Le théorème suivant est une généralisation du théorème 4.1.1.

Théorème 4.5.1. *Soient $s \in]0,1[$, $\epsilon \in]0,\frac{s}{2}[$ et $p > \frac{1}{\frac{s}{2}-\epsilon}$. Alors il existe une constante C vérifiant les propriétés suivantes. Soient Σ_0 un ensemble fermé de $\mathbb{R}^2$ et v^0 un champ de vecteurs de divergence nulle et dont le tourbillon ω^0 est borné et supporté dans un compact K. Désignons par v_ν la solution de Yudovich du système de Navier-Stokes et $\psi_\nu(t)$ son flot. Posons $\Sigma_\nu(t) = \psi_\nu(t,\Sigma_0)$.*

Considérons une famille $\mathcal{X}_0$ de champs de vecteurs tels qu'ils appartiennent avec leur divergence à B_p^s. On suppose que cette famille est Σ_0-admissible d'ordre $\Xi_0 = (\alpha_0,\beta_0,\gamma_0)$ et que

$$\omega^0 \in B^{s,p,\beta_0}_{\Sigma_0,\mathcal{X}_0}.$$

Soit T un réel positif. On définit la quantité

$$\sigma_t = s\Big(1 - \frac{\epsilon t}{sT}\Big) - \epsilon - 1.$$

Alors il existe une famille $\mathcal{X}_\nu(t) = (X^\nu_{\lambda,h}(t))_{(\lambda,h)\in\Lambda\times]0,e^{-1}]}$ de champs de vecteurs appartenant avec leur divergence à $B_p^{1+\sigma_t}, \forall t \in [0,T]$. De plus, cette famille est $\Sigma_\nu(t)-$admissible et l'on a pour tout $\eta > 0$

$$\omega_\nu(t) \in B^{1+\sigma_t,p,\beta_0(t)-\eta}_{\Sigma_\nu(t),\mathcal{X}_\nu(t)},$$

où l'on a posé

$$\beta_0(t) = \Big(\beta_0 - C_1\, t\Big) e^{Ct\|\omega^0\|_{L^1\cap L^\infty}},$$

avec C_1 une constante dépendant de $s, p, \epsilon,\alpha_0, \beta_0$ et ω^0. De plus, la vitesse v_ν est lipschitzienne en dehors de $\Sigma_\nu(t)$. Plus précisément, pour $t \in \mathbb{R}_+$,

$$\sup_{h\in]0,e^{-1}]} \frac{\|\nabla v_\nu(t)\|_{L^\infty((\Sigma_\nu(t))^c_h)}}{-\log h} \leq C(1+\nu t)^{\frac{16}{s}} e^{e^{Ct}}.$$

Enfin, en désignant par ψ le flot correspondant à la solution de Yudovich du système d'Euler, alors si

$$I^0(\Sigma_0,\mathcal{X}_0) \overset{déf}{=} \sup_{h\in]0,e^{-1}]} I\big((\Sigma_0)_h,(\mathcal{X}_0)_h\big) < +\infty, \tag{4.29}$$

on aura pour tout $t \in [0,T]$ et pour tout $(h,\lambda) \in]0,e^{-1}] \times \Lambda$,

$$\lim_{\nu\to 0^+} \Big(\|X_{0,\lambda,h}(\cdot,D)\psi_\nu(t,\cdot) - X_{0,\lambda,h}(\cdot,D)\psi(t,\cdot)\|_{C^{1+\sigma_t-\frac{2}{p}-\eta}} + \|X^\nu_{t,\lambda,h} - X_{t,\lambda,h}\widetilde{\|}_{C^{1+\sigma_t-\frac{2}{p}-\eta}}\Big) = 0.$$

On a encore pour tout $(h,\lambda) \in]0,e^{-1}] \times \Lambda$,

$$\lim_{\nu\to 0^+} \|X_{0,\lambda,h}(\cdot,D)\psi_\nu - X_{0,\lambda,h}(\cdot,D)\psi\|_{L^\infty([0,T]\times\mathbb{R}^2)} = 0.$$

La preuve de ce théorème est fondée essentiellement sur l'effet régularisant et la propagation de la régularité Besov dans les équations de transport-diffusion relativement à un champ de vecteurs lipschitzien dans le support de la solution , qui ont fait l'objet des sections antérieures. Ces résultats sont mis en place afin de contrôler convenablement la régularité conormale du tourbillon dans un espace de Besov d'indice strictement négatif. L'utilité d'une telle estimation apparaît sans doute dans l'estimation logarithmique du gradient d'un champ de vecteurs. Ce que nous allons fournir à ce propos est une version Besov du théorème 3.3.2 de [6]. Elle s'obtient à partir de ce théorème simplement à l'aide de l'injection $B_p^s \hookrightarrow C^{s-2/p}$.

Théorème 4.5.2. *Il existe une constante C telle que, pour tout réel $a \geq 1$, pour tout $s \in]\frac{2}{a},1[$ et pour tout ensemble fermé Σ de $\mathbb{R}^2$, nous aurons la propriété suivante.*
Soit $\mathcal{X} = (X_{\lambda,h})_{(\lambda,h)\in\Lambda\times]0,e^{-1}]} = (\mathcal{X}_h)_{h\in]0,e^{-1}]}$ une famille de champs de vecteurs tels qu'ils sont

ainsi que leur divergence dans B^s_p. Alors on considère une fonction $\omega \in B^s_p(\Sigma_h) \cap L^a$. Si v est un champ de vecteurs de divergence nulle tel que $\nabla v \in L^a$ et $\operatorname{rot} v = \omega$, alors le gradient de v est borné et nous avons

$$\|\nabla v\|_{L^\infty(\Sigma_h^c)} \leq Ca\|\omega\|_{L^a} + \frac{C}{s-2/p}\|\omega\|_{L^\infty} \log\left(e + \frac{\|\omega\|^{s,p}_{\Sigma_h,\mathcal{X}_h}}{\|\omega\|_{L^\infty}}\right).$$

4.5.2 Démonstration du théorème 4.1.1

Le bord de Ω peut s'écrire sous la forme

$$\partial\Omega = \{x \in V \ ; f_0(x) = 0\},$$

avec V un voisinage de $\partial\Omega$ et f_0 une fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$, de classe $C^{1+\epsilon}$ et à support compact. L'ensemble singulier du bord n'est autre que

$$\Sigma = \Big\{x \in V; f_0(x) = \nabla f_0(x) = 0\Big\}.$$

Pour faciliter le raisonnement nous supposons que le bord est connexe. Nous supposons également qu'il existe un nombre négatif γ_0 tel que pour tout $x \in V$,

$$|\nabla f_0(x)| \geq \operatorname{dist}(x,\Sigma)^{-\gamma_0}.$$

Cette hypothèse veut dire que les parties régulières du bord ne s'intersectent pas avec un ordre infini. Soit $(\theta_h)_{h\in]0,e^{-1}]}$ une famille de fonctions infiniment dérivables, valant 1 dans Σ_h^c, supportées dans $\Sigma^c_{h^{\alpha_0}}$ (avec $\alpha > 0$) et vérifiant pour tout réel strictement positif r

$$\|\theta_h\|_{C^r} \leq C_r h^{-r}.$$

Considérons une fonction $\tilde{\theta}$ infiniment dérivable, valant 1 dans V. Posons

$$X_{0,-1,h} = \theta_h(1-\tilde{\theta})e_1 \quad \text{et} \quad X_{0,0,h} = \nabla^\perp(\theta_h f_0).$$

Alors nous avons par le lemme 4.2.5 que $X_{0,0,h} \in B^s_p$. Par contre le champ de vecteurs $X_{0,-1,h}$ appartient à $C^s, \forall s \in \mathbb{R}$, mais il n'est pas dans B^s_p, pour tout $s > 0$. Donc nous allons faire usage de la partition de l'unité pour construire à partir de ces champs une famille $\Sigma-$admissible.

Lemme 4.5.1. *Soit $d \in \mathbb{N}^*$. Alors il existe une partition $(O_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de $\mathbb{R}^d$ et une suite de fonctions régulières positives $(\psi_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, telles que :*

$$\operatorname{supp} \psi_n \subset O_n \ ; \ |O_n| \leq 1$$
$$\forall x \in \mathbb{R}^d, \ \sum_{n\in\mathbb{N}^*} \psi_n(x) = 1 \quad \text{et}$$
$$\exists N_d \in \mathbb{N}, \text{ tel que}, \ \forall x \in \mathbb{R}^d, \ \sharp\{n \in \mathbb{N}^* \ ; x \in O_n\} \leq N_d.$$

Posons pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$$X_{0,n,h}(x) = \psi_n(x) X_{0,-1,h}(x).$$

Donc, d'après le lemme 4.2.5, il est clair que ces champs sont dans B^s_p. De plus, le lemme ci-dessus nous assure que la famille $\mathcal{X}_0 = (X_{0,n,h})_{(n,h)\in\mathbb{N}\times]0,e^{-1}]}$ est $\Sigma-$admissible. Un calcul simple montre aussi que la quantité définie par (4.29) est finie. Ainsi les hypothèse du théorème 4.5.1 sont satisfaites. Posons

$$\Omega_\nu(t) = \psi_\nu(t,\Omega), \Sigma_\nu(t) = \psi_\nu(t,\Sigma), \Omega(t) = \psi(t,\Omega) \quad \text{et} \quad \Sigma(t) = \psi(t,\Sigma).$$

Soit $h \in]0,e^{-1}]$. Comme le champ de vecteurs $X_{0,0,\delta(t,h)}$ est non nul dans $V \cap \Sigma^c_{\delta(t,h)}$, alors nous déduisons à partir de l'identité (4.64) qu'il existe un voisinage $V(t)$ de $\Omega(t)$ tel que,

$$\forall\, x \in V(t) \cap (\Sigma(t))^c_h, X_{t,0,h}(x) \neq 0.$$

Or la divergence de $X_{t,0,h}$ (noté aussi $X_{t,h}$) est nulle, car elle vérifie une équation de transport linéaire. Donc, il existe une fonction $f_{t,h} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ vérifiant

$$\nabla^\perp f_{t,h} = X_{t,h}.$$

Le support de $X_{t,h}$ est un compact, ce qui entraîne que $f_{t,h} \in C^{1+s'}, \forall s' < s$. Nous n'avons pas en fait une perte de la régularité du bord dans le cas eulérien, d'après [6]. L'ensemble $\partial\Omega(t)$ est une ligne de niveau pour $f_{t,h}$. Donc, quitte à retrancher la constante correspondante on peut supposer que c'est un ensemble de zéros de cette fonction. Considérons un point $x_0 = (x_{0,1},x_{0,2})$ de l'ensemble $\partial\Omega(t)\backslash\Sigma(t)_h$. Alors le champ $X_{t,h}$, et *a fortiori* le gradient de $f_{t,h}$, ne dégénère pas dans un voisinage V_{x_0} de ce point . On peut alors supposer que la première composante de $X_{t,h}$ est non nulle. Ainsi, ceci permet d'assurer, d'après le théorème des fonctions implicites, l'existence d'un intervalle $I_{x_{0,1}}$ contenant $x_{0,1}$ et une fonction $\phi : I_{x_{0,1}} \to \mathbb{R}$ de classe $C^{1+s'}$ tels que l'ensemble $\{(x_1,\phi(x_1))\ ; x_1 \in I_{x_{0,1}}\}$ soit le graphe de l'unique branche du bord contenue dans un petit voisinage de x_0, noté encore V_{x_0}. Maintenant nous allons montrer que pour ν assez petit il n'y a dans ce voisinage de x_0 qu'une seule branche connexe du bord de $\partial\Omega_\nu(t)$ et qui soit le graphe d'une fonction définie sur le même intervalle $I_{x_{0,1}}$, même plus petit mais dont la taille est indépendante de ν. D'abord nous allons comme dans le cas eulérien donner une équation cartésienne de $\Omega_\nu(t)$. La description est la même : on construit une fonction $f^\nu_{t,h} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ telle que,

$$\nabla^\perp f^\nu_{t,h} = X^\nu_{t,h}.$$

D'après le théorème 4.5.1, le champ de vecteurs $X^\nu_{t,h}$ converge vers $X_{t,h}$ dans C^1, quand ν tend vers zéro. Donc cela permet de déduire l'existence d'un réel ν_0 tel que pour tout $\nu \leq \nu_0$, le champ de vecteurs $X^\nu_{t,h}$ ne s'annule pas dans V_{x_0}. D'un autre côté, il s'ensuit grâce à la convergence uniforme du flot $\psi_\nu(t)$ vers $\psi(t)$ qu'il existe au moins une branche connexe de $\partial\Omega_\nu(t)$, confinée dans V_{x_0} et dont la projection sur l'axe des abscisses est l'intervalle $I_{x_{0,1}}$. En fait, c'est la seule branche connexe se trouvant dans le voisinage de x_0, car sinon, il y aura aussi une autre branche eulérienne. En se servant du fait que la composante $X^{\nu,1}_{t,h}$ est d'un module strictement positif dans V_{x_0} alors on peut déduire, d'une manière strictement analogue au cas d'Euler, l'existence d'une paramétrisation cartésienne de cette branche $\phi_\nu : I_{x_{0,1}} \to \mathbb{R}$, qui est de classe $C^{1+\sigma_t - 2/p}$. Le premier résultat qu'on va discuter est que ϕ_ν converge uniformément vers ϕ. En effet, la convergence uniforme du flot visqueux vers ψ nous informe que le graphe de ϕ_ν se trouve dans une surface tubulaire dressée autour du graphe de ϕ et dont le rayon ρ_ν tend vers zéro. Donc en désignant par $\alpha(x_1)$ l'angle que fait la droite verticale passant par le point $(x_1,0)$ avec la tangente à la courbe $\Omega(t)$ au point $(x_1,\phi(x_1))$, on trouve que

$$|\phi_\nu(x_1) - \phi(x_1)| \leq \frac{\rho_\nu}{\sin\alpha(x_1)}.$$

Or la minoration uniforme $|X^2_{t,h}(x)| \geq c > 0$, sur V_{x_0} permet d'assurer la minoration uniforme du sinus. Ce qui permet de montrer la convergence uniforme de ϕ_ν vers ϕ. Comme conséquence on a la convergence au sens de la distance de Hausdorff. Il reste à vérifier la convergence pour les tangentes unitaires. Posons

$$\tau_\nu(x_1) = \frac{X^\nu_{t,h}}{|X^\nu_{t,h}|}(x_1,\phi_\nu(x_1)) \quad \text{et} \quad \tau(x_1) = \frac{X_{t,h}}{|X_{t,h}|}(x_1,\phi(x_1)).$$

Alors un calcul élémentaire, utilisant les inégalités triangulaires, permet d'avoir

$$|\tau_\nu(x_1) - \tau(x_1)| \leq 2\frac{\left|X^\nu_{t,h}(x_1,\phi_\nu(x_1)) - X_{t,h}(x_1,\phi(x_1))\right|}{\left|X^\nu_{t,h}(x_1,\phi_\nu(x_1))\right|}.$$

Or le champ $X^\nu_{t,h}$ est de module uniformément minoré sur V_{x_0} par une constante strictement positive. Il s'ensuit alors que

$$|\tau_\nu(x_1) - \tau(x_1)| \leq C\Big(\|X^\nu_{t,h} - X_{t,h}\|_{L^\infty(V_{x_0})} + \|X_{t,h}(\cdot,\phi_\nu(\cdot)) - X_{t,h}(\cdot,\phi(\cdot))\|_{L^\infty(I_{x_{0,1}})}\Big).$$

Ainsi le théorème 4.5.1 et la convergence uniforme de ϕ_ν vers ϕ donnent le résultat désiré.

4.5.3 Dynamique des poches singulières

Cette section est dévolue à l'étude de la régularité stratifiée du tourbillon ω relativement à une famille donnée de champs de vecteurs. Nous partons d'abord d'un modèle de champs de vecteurs et nous verrons à la fin une application pour une famille adéquate de champs de vecteurs $\mathcal{X}_t = (X_{t,\lambda,h})$ qui tient compte de la structure singulière de la poche initiale.

Etude d'un modèle

Soit $v(t,x)$ un champ de vitesse infiniment différentiable et de divergence nulle. On se donne dans le plan un ensemble fermé Σ_0 suffisamment régulier et supporté dans $(\Sigma_0)^c_h$, où h est un paramètre appartenant à $]0,e^{-1}]$. Considérons l'équation

$$(TG)\left\{\begin{array}{l} \partial_t X + v\cdot\nabla X = X(x,D)v \\ X_{|t=0} = X_0. \end{array}\right.$$

Une telle équation possède une unique solution X_t qui satisfait en outre l'identité

$$X_t(\psi(t,x)) = X_0(x,D)\psi(t,x) \tag{4.30}$$

avec $\psi(t)$ le flot associé au champ de vecteurs v. Nous remarquons qu'il découle du système (TG) que les champs de vecteurs $\partial_t + v\cdot\nabla$ et $X_t(x,D)$ commutent et par conséquent l'équation vérifiée par $X_t(x,D)\omega(t)$ prend la forme suivante

$$(\partial_t + v\cdot\nabla - \nu\Delta)X_t(x,D)\omega = -\nu[\Delta, X_t(x,D)]\,\omega. \tag{4.31}$$

Remarque: Désormais, nous omettons, par souci de notation, d'indexer par ν les quantités relatives au système de Navier-Stokes.
Nous allons décrire par le biais de la proposition suivante quelques estimations des solutions

de (TG) et (4.31). Elles sont utiles pour contrôler le gradient de la vitesse en dehors du transporté de l'ensemble singulier Σ_0 par le flot.

Proposition 4.5.1. *Soient $p>1$, $s\in]0,1[$, $\epsilon\in]0,\frac{s}{2}[$ et $r\in]1,\frac{1}{1+\epsilon-\frac{s}{2}}[$. Il existe une constante C telle que l'on ait la propriété suivante : soit v une solution régulière du système de Navier-Stokes correspondant à un tourbillon initial ω^0 appartenant à $L^1\cap L^\infty$. On se donne un champ de vecteurs X_0 régulier et supporté dans $(\Sigma_0)^c_h$, avec Σ_0 un ensemble fermé de $\mathbb{R}^2$. On définit la quantité*

$$E_1 \;=\; C\Big(\|X_0(x,D)\omega^0\|_{B^s_p}+\|\omega^0\|_{L^\infty}\big(\|X_0\|_{B^s_p}+\|\mathrm{div}X_0\|_{B^s_p}\big)\Big).$$

Soit T un réel positif. On se donne un entier $N_0\in\mathbb{N}^*$ et un réel $C_0\geq 2$ et l'on impose la condition

$$C\Big(1+(\nu+\|\omega^0\|_{L^\infty})T\Big)N_0^{\frac{1}{r}-1}\leq C_0^{-1}. \tag{4.32}$$

Alors en posant pour tout $t\in[0,T]$;

$$\begin{aligned}\sigma_t &= s\Big(1-\frac{\epsilon t}{sT}\Big)-\epsilon-1 \quad \text{et pour tout} \quad 0\leq\tau\leq t\,;\\ g_t(\tau) &= C\widetilde{W}(\tau)+C_0^{-1}\widetilde{W}(t)+C\|\omega^0\|_{L^\infty}\big(1+(\nu+\|\omega^0\|_{L^\infty})t\big),\end{aligned}$$

on aura pour tout $t\in[0,T]$,

$$\begin{aligned}\|X_t(x,D)\omega\|_{B^{\sigma_t}_p}+\|\omega(t)\|_{L^\infty}\|X_t\tilde{\|}_{B^{1+\sigma_t}_p}\leq 2^{N_0}E_1\Big(1+(\nu &+ \|\omega^0\|_{L^\infty})t+C_0^{-1}\frac{\widetilde{W}(t)}{\|\omega^0\|_{L^\infty}}\Big)\\ &\times\ (-\log h)\,h^{-\int_0^t g_t(\tau)d\tau}.\end{aligned}\tag{4.33}$$

Si $p>\frac{1}{\frac{s}{2}-\epsilon}$, alors nous aurons

$$\|X_t(\psi_t)\|_{C^{1+\sigma_t-2/p}}\leq\frac{2^{N_0}E_1}{\|\omega^0\|_{L^\infty}}(h/2)^{-1-\int_0^t g_t(\tau)d\tau}.$$

Si de plus il existe un compact K tel que supp $X_0\subset K$, alors pour tout $p>\frac{1}{\frac{s}{2}-\epsilon}$, il existe une constante C_K telle que,

$$\|X_t(\psi_t)\|_{B^{1+\sigma_t-2/p}_p}\leq\frac{C_K 2^{N_0}E_1}{\|\omega^0\|_{L^\infty}}(h/2)^{-1-\int_0^t g_t(\tau)d\tau},$$

où l'on a posé

$$W(t)=\big(\|\nabla v(t)\|_{L(\Sigma_t)}+\|\omega^0\|_{L^1\cap L^\infty}\big)e^{Ct\|\omega^0\|_{L^1\cap L^\infty}}\quad \text{et}\quad \widetilde{W}(t)=\sup_{0\leq\tau\leq t}W(\tau).$$

Démonstration : L'estimation de $\mathrm{div}X_t$ s'avère la plus facile à prouver. Elle est basée sur le corollaire 4.6.1, figurant dans l'appendice, mais pour pouvoir l'appliquer nous devrons localiser le support de X_t. Nous allons montrer de façon précise que, pour t positif,

$$\text{supp } X_t\subset(\Sigma_t)^c_{\delta(t,h)}. \tag{4.34}$$

Pour ce faire, on prend $\eta \in]0,h[$ et une fonction $\phi_0 \ : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ infiniment dérivable, supportée dans $(\Sigma_0)^c_{h-\eta}$ et valant 1 dans $(\Sigma_0)^c_h$. Considérons alors son transporté par le flot ψ_t que l'on définit par $\phi_t(x) = \phi_0(\psi^{-1}(t,x))$. Il est facile de voir que ϕ_t satisfait l'équation de transport suivante

$$(\partial_t + v \cdot \nabla)\phi_t = 0.$$

Ainsi un calcul simple utilisant l'équation (TG) montre

$$\begin{cases} (\partial_t X + v \cdot \nabla)(\phi_t X_t) = (\phi_t X_t)(x,D)v \\ \phi_t X_{t|t=0} = X_0. \end{cases}$$

Ainsi nous en déduisons par unicité que $\phi_t X_t = X_t$. Or, d'après le le lemme 4.2.1, nous avons

$$\begin{aligned} \text{supp } \phi_t &\subset \psi\big(t,(\Sigma_0)^c_{h-\eta}\big) \\ &\subset (\Sigma_t)^c_{\delta(t,h-\eta)}. \end{aligned}$$

Ainsi en faisant tendre η vers zéro nous récupérons l'inclusion mentionnée dans (4.34). Maintenant, pour décrire l'évolution de la quantité $\text{div}X_t$, nous appliquons l'opérateur de divergence à (TG) et l'on obtient grâce à la condition d'incompressibilité que

$$\text{(T)} \quad (\partial_t + v \cdot \nabla)\text{div}X_t = 0. \tag{4.35}$$

Sachant que $\text{div}X_t$ est supporté dans $(\Sigma_t)^c_{\delta(t,h)}$, alors nous aurons grâce à la proposition 4.4.1 l'estimation suivante

$$\|\text{div}X_t\|_{B^s_p} \leq \|\text{div}X_0\|_{B^s_p} h^{-C\int_0^t W(\tau)d\tau}. \tag{4.36}$$

En ce qui concerne les quantités $\|X(t)\|_{B^{\sigma_t}_p}$ et $\|X_t(x,D)\omega\|_{B^{\sigma_t}_p}$, elles s'estiment de façon couplée. En appliquant l'opérateur de filtrage en fréquences Δ_q à (TG) et en faisant des estimations L^p, on aboutit à

$$\begin{aligned} \|\Delta_q X(t)\|_{L^p} \leq \|\Delta_q X_0\|_{L^p} &+ \int_0^t \|\Delta_q X_\tau(x, D)v\|_{L^p} d\tau \\ &+ C(-\log h) \int_0^t 2^{-q(1+\sigma_\tau)} W(\tau)\|X(\tau)\|_{B^{1+\sigma_\tau}_p} d\tau. \end{aligned} \tag{4.37}$$

Or, par définition de σ_t, nous avons l'inégalité $-\sigma_t \geq 1 - s$. Donc nous aurons en vertu du lemme 4.6.4 de l'appendice que

$$\begin{aligned} \|\Delta_q X_t(x, D)v\|_{L^p} \quad &\leq \quad C\Big(\|\omega^0\|_{L^\infty} 2^{-qs}\|\text{div}X(t)\|_{B^s_p} + 2^{-q}\|\Delta_q X_t(x, D)\omega\|_{L^p}\Big) \\ &\quad + C(-\log h)W(t)2^{-q(1+\sigma_t)}\|X(t)\|_{B^{1+\sigma_t}_p}. \end{aligned}$$

Quitte à insérer cette estimation dans (4.37), on trouve alors

$$\begin{aligned} \|\Delta_q X(t)\|_{L^p} \quad \leq \quad &\|\Delta_q X_0\|_{L^p} + C(-\log h) \int_0^t 2^{-q(1+\sigma_\tau)} W(\tau)\|X(\tau)\|_{B^{1+\sigma_\tau}_p} d\tau \\ &+ C\|\omega^0\|_{L^\infty} 2^{-qs} \int_0^t \| \text{ div}X(\tau)\|_{B^s_p} d\tau \\ &+ C\int_0^t 2^{-q(1+\sigma_\tau)}\|X_\tau(x,D)\omega\|_{B^{\sigma_\tau}_p} d\tau. \end{aligned} \tag{4.38}$$

En multipliant des deux côtés par $2^{q(1+\sigma_t)}$ et en se servant de la décroissance de σ_t, nous obtenons

$$\|X(t)\|_{B_p^{1+\sigma_t}} \leq \|X_0\|_{B_p^s} + C(-\log h)\int_0^t W(\tau)\|X(\tau)\|_{B_p^{1+\sigma_\tau}}d\tau$$
$$+ C\|\omega^0\|_{L^\infty}\int_0^t \|\operatorname{div}X(\tau)\|_{B_p^{1+\sigma_\tau}}d\tau + C\int_0^t \|X_\tau(x,D)\omega\|_{B_p^{\sigma_\tau}}d\tau.$$

Sachant que

$$\|\omega^0\|_{L^\infty}t \leq e^{-C(\log h)\|\omega^0\|_{L^1\cap L^\infty}t} \leq h^{-C\int_0^t W(\tau)d\tau}, \tag{4.39}$$

alors l'inégalité (4.36 et le lemme de Gronwall permettent d'obtenir

$$\|X(t)\|_{B_p^{1+\sigma_t}} \quad \leq \quad h^{-C\int_0^t W(\tau)d\tau}\Big(\|\widetilde{X_0}\|_{B_p^s} + \int_0^t h^{C\int_0^\tau W(\tau')d\tau'}\|X_\tau(x,D)\omega\|_{B_p^{\sigma_\tau}}d\tau\Big). \tag{4.40}$$

Dans l'étape suivante nous allons contrôler $\|X_t(x,D)\omega\|_{B_p^{\sigma_t}}$. Pour cela, nous allons appliquer la formulation fréquencielle de la proposition 4.4.1 avec l'équation (4.31). C'est dans l'estimation du commutateur $[\Delta,X_t(x,D)]\omega$ que l'on utilise l'effet régularisant décrit par la proposition 4.3.1. D'abord, on va étudier le commutateur en se basant sur le calcul paradifférentiel. Alors on aboutit à la décomposition suivante :

$$\nu[\Delta, X_t(x,D)]\,\omega = f + \nu\, g,$$

où l'on a posé

$$f = 2\nu\sum_{1\leq i,j\leq 2} R(\partial_j X_t^i, \partial_i\partial_j\omega) + \sum_{i=1}^{2}\nu R(\Delta X_t^i,\partial_i\omega). \tag{4.41}$$

et

$$g = \sum_{i=1}^{2}\Big(2T_{\nabla X_t^i}\partial_i\nabla\omega + 2T_{\partial_i\nabla\omega}\nabla X_t^i + T_{\Delta X_t^i}\partial_i\omega + T_{\partial_i\omega}\Delta X_t^i\Big). \tag{4.42}$$

Le lemme suivant fournit une estimation de la régularité tangentielle du tourbillon dans un espace de Besov d'indice négatif.

Lemme 4.5.2. *Soient $s\in]0,1[$ et $p>1$. Alors il existe une constante C telle que pour toute fonction décroissante σ_t, vérifiant $0<C_1\leq 1+\sigma_t\leq s$ et pour tout $r\in[1,+\infty]$, on aura*

$$\begin{aligned}2^{q\sigma_t}\|\Delta_q X_t(x,D)\omega\|_{L^p} \quad &\leq \quad \|X_0(x,D)\omega^0\|_{B_p^{s-1}} + C\big(1+\nu t\big)\|\omega^0\|_{L^\infty}\|X.\|_{L_t^\infty B_p^{1+\sigma.}}\\ &+ \quad CC_1^{-1}(-\log h)\int_0^t W(\tau)\|X_\tau(x,D)\omega\|_{B_p^{\sigma_\tau}}d\tau\\ &+ \quad C\|\omega^0\|_{L^\infty}\Big(1+\big(\nu+\|\omega^0\|_{L^1\cap L^\infty}\big)t\Big)2^{q(\sigma_t+1-\frac{2}{r})}\\ &\times\sum_{j\geq q-5}(j+2)^{\frac{1}{r}}2^{\frac{2j}{r}}\Big(\|\Delta_j X\|_{L_t^\infty L^p} + \|\Delta_j\operatorname{div}X\|_{L_t^\infty L^p}\Big),\end{aligned}$$

où l'on a posé

$$\|X.\|_{L_t^\infty B_p^{1+\sigma.}} = \sup_{0\leq\tau\leq t}\|X_\tau\|_{B_p^{1+\sigma_\tau}}.$$

Admettons pour le moment ce lemme. Vu le choix de σ_t, on peut déduire grâce à (4.36) que

$$2^{j(1+\sigma_t)}\|\Delta_j \operatorname{div} X_t\|_{L^p} \leq 2^{-j\epsilon}\| \operatorname{div} X_0\|_{B^s_p} h^{-C\int_0^t W(\tau)d\tau}. \tag{4.43}$$

Ainsi la décroissance de σ_t et la croissance de l'intégrale $\int_0^t W(\tau)d\tau$ permettent d'avoir (vu que $0 < h \leq 1$,)

$$2^{j(1+\sigma_t)}\|\Delta_j \operatorname{div} X_\tau\|_{L^\infty_t L^p} \leq 2^{-j\epsilon}\| \operatorname{div} X_0\|_{B^s_p} h^{-C\int_0^t W(\tau)d\tau}.$$

En conséquence, nous aurons suite à l'inégalité $1+\sigma_t \geq \frac{2}{r}$,

$$2^{q(1+\sigma_t-\frac{2}{r})}\sum_{j\geq q-5}(j+2)^{\frac{1}{r}}2^{\frac{2j}{r}}\|\Delta_j \operatorname{div} X\|_{L^\infty_t L^p} \leq C\| \operatorname{div} X_0\|_{B^s_p}\, h^{-C\int_0^t W(\tau)d\tau}. \tag{4.44}$$

Il vient alors que l'estimation donnée par le lemme 4.5.2 peut être réécrite sous la forme

$$\begin{aligned}
2^{q\sigma_t}\|\Delta_q X_t(x,D)\omega\|_{L^p} \quad \leq \quad & \|X_0(x,D)\omega^0\|_{B^{s-1}_p} + C\big(1+\nu t\big)\|\omega^0\|_{L^\infty}\|X.\|_{L^\infty_t B^{1+\sigma.}_p} \\
& + C\Big(1+\big(\nu+\|\omega^0\|_{L^1\cap L^\infty}\big)t\Big)\|\omega^0\|_{L^\infty}\| \operatorname{div} X_0\|_{B^s_p}\, h^{-C\int_0^t W(\tau)d\tau} \\
& + \quad C\|\omega^0\|_{L^\infty}\Big(1+\big(\nu+\|\omega^0\|_{L^1\cap L^\infty}\big)t\Big)2^{q(\sigma_t+1-\frac{2}{r})} \times \\
& \times \sum_{j\geq q-5}(j+2)^{\frac{1}{r}}2^{\frac{2j}{r}}\|\Delta_j X\|_{L^\infty_t L^p} \\
& + C(-\log h)\int_0^t W(\tau)\|X_\tau(x,D)\omega\|_{B^{\sigma_\tau}_p}d\tau.
\end{aligned} \tag{4.45}$$

Maintenant, nous allons essayer d'estimer la somme figurant dans le second membre. Nous soulignons au départ que l'appartenance de X_0 à l'espace B^s_p implique

$$2^{j(1+\sigma_t)}\|\Delta_j X_0\|_{L^p} \leq 2^{-j\epsilon}\|X_0\|_{B^s_p}.$$

Comme $1+\sigma_t \geq \frac{2}{r}$, alors cette inégalité permet d'avoir

$$2^{q(1+\sigma_t-\frac{2}{r})}\sum_{j\geq q-5}(j+2)^{\frac{1}{r}}2^{\frac{2j}{r}}\|\Delta_j X_0\|_{L^p} \leq C\|X_0\|_{B^s_p}. \tag{4.46}$$

D'une autre part, on a

$$\begin{aligned}
\sum_{j\geq q-5}(j+2)^{\frac{1}{r}}2^{\frac{2j}{r}}\int_0^t 2^{-j(1+\sigma_\tau)}W(\tau)\|X(\tau)\|_{B^{1+\sigma_\tau}_p}d\tau \quad \leq \quad & \widetilde{W}(t)\|X.\|_{L^\infty_t B^{1+\sigma.}_p} \\
& \times \sum_{j\geq q-5}(j+2)^{\frac{1}{r}}2^{\frac{2j}{r}}\int_0^t 2^{-j(1+\sigma_\tau)}d\tau.
\end{aligned} \tag{4.47}$$

Or, un simple calcul montre que pour tout $j \geq 1$,

$$\int_0^t 2^{-j(1+\sigma_\tau)}d\tau \leq C\,T j^{-1}2^{-j(1+\sigma_t)}.$$

Soit $N_0 \geq 5$ un entier qui sera fixé à la fin. Comme $1+\sigma_T > \frac{2}{r}$, alors nous en déduisons à partir de (4.47) que pour tout $q > N_0$

$$2^{q(1+\sigma_t-\frac{2}{r})} \sum_{j\geq q-5} (j+2)^{\frac{1}{r}} 2^{\frac{2j}{r}} \int_0^t 2^{-j(1+\sigma_\tau)} W(\tau) \|X(\tau)\|_{B_p^{1+\sigma_\tau}} d\tau \leq C N_0^{\frac{1}{r}-1} T \widetilde{W}(t) \|X_\cdot\|_{L_t^\infty B_p^{1+\sigma_\cdot}}. \tag{4.48}$$

D'un autre côté, un calcul similaire donne pour tout $q > N_0$,

$$\begin{aligned} & 2^{q(1+\sigma_t-\frac{2}{r})} \sum_{j\geq q-5} (j+2)^{\frac{1}{r}} 2^{\frac{2j}{r}} \int_0^t 2^{-j(1+\sigma_\tau)} \|X_\tau(x,D)\omega\|_{B_p^{\sigma_\tau}} d\tau \\ & \leq CT \|X(x,D)\omega(\cdot)\|_{L_t^\infty B_p^{\sigma_\cdot}} \sum_{j\geq q-5} (j+2)^{\frac{1}{r}-1} 2^{(q-j)(1+\sigma_t-\frac{2}{r})} \\ & \leq CTN_0^{\frac{1}{r}-1} \|X(x,D)\omega(\cdot)\|_{L_t^\infty B_p^{\sigma_\cdot}}. \end{aligned} \tag{4.49}$$

Ainsi en reportant cette inégalité, ainsi que (4.44), (4.46) et (4.48), dans (4.38) et en sommant sur les indices j on trouve pour tout $q \geq N_0 + 2$,

$$\begin{aligned} 2^{q(1+\sigma_t-\frac{2}{r})} \sum_{j\geq q-5} (j+2)^{\frac{1}{r}} 2^{\frac{2j}{r}} \|\Delta_j X\|_{L_t^\infty L^p} \leq\ & C\|X_0\|_{B_p^s} + C\|\mathrm{div} X_0\|_{B_p^s} \|\omega^0\|_{L^\infty}\, t\, h^{-C\int_0^t W(\tau)d\tau} \\ +\ & CTN_0^{\frac{1}{r}-1}(-\log h)\widetilde{W}(t)\|X(\cdot)\|_{L_t^\infty B_p^{1+\sigma_\cdot}} \\ & + CTN_0^{\frac{1}{r}-1}\|X(x,D)\omega(\cdot)\|_{L_t^\infty B_p^{\sigma_\cdot}}. \end{aligned} \tag{4.50}$$

Posons

$$E_0^\nu(t) = C\Big(1 + (\nu + \|\omega^0\|_{L^1\cap L^\infty})t\Big).$$

Donc, en combinant les inégalités (4.50), (4.39) et (4.45) et en prenant le supremum en q, on aboutit alors à l'estimation

$$\begin{aligned} 2^{q\sigma_t}\|\Delta_q X_t(x,D)\omega\|_{L^p} \leq\ & \|X_0(x,D)\omega^0\|_{B_p^{s-1}} + C(-\log h)\int_0^t W(\tau)\|X_\tau(x,D)\omega\|_{B_p^{\sigma_\tau}} d\tau \\ & + E_0^\nu(t)\|\omega^0\|_{L^\infty}\bigg(\|\widetilde{X_0}\|_{B_p^s} h^{-C\int_0^t W(\tau)d\tau} + TN_0^{\frac{1}{r}-1}\|X(x,D)\omega\|_{L_t^\infty B_p^{1+\sigma_t}} \\ & + \Big(1 + (-\log h)TN_0^{\frac{1}{r}-1}\widetilde{W}(t)\Big)\|X_\cdot\|_{L_t^\infty B_p^{1+\sigma_\cdot}}\bigg). \end{aligned} \tag{4.51}$$

Soit C_0 une constante suffisamment grande. On impose à N_0 la condition

$$\|\omega^0\|_{L^\infty} T E_0^\nu(T) N_0^{\frac{1}{r}-1} \leq C_0^{-1} \leq \frac{1}{2}. \tag{4.52}$$

Alors, on trouve que pour tout $q > N_0$,

$$\begin{aligned} 2^{q\sigma_t}\|\Delta_q X_t(x,D)\omega\|_{L^p} \leq\ & \|X_0(x,D)\omega^0\|_{B_p^{s-1}} + E_0^\nu(t)\|\omega^0\|_{L^\infty}\Big(\|\widetilde{X_0}\|_{B_p^s} h^{-C\int_0^t W(\tau)d\tau} \\ & + \big(1 + (-\log h)TN_0^{\frac{1}{r}-1}\widetilde{W}(t)\big)\|X_\cdot\|_{L_t^\infty B_p^{1+\sigma_\cdot}}\Big) \qquad (4.53) \\ +\ & C(-\log h)\int_0^t W(\tau)\|X_\tau(x,D)\omega\|_{B_p^{\sigma_\tau}} d\tau + \frac{1}{2}\|X(x,D)\omega\|_{L_t^\infty B_p^{\sigma_\cdot}}. \end{aligned}$$

Pour estimer les basses fréquences, i.e., $q \leq N_0$, on écrit

$$
\begin{aligned}
\|\Delta_q X_t(x,D)\omega\|_{L^p} &\leq C 2^q \|X_t\omega(t)\|_{L^p} + \|\omega(t)\mathrm{div} X_t\|_{L^p} \\
&\leq C 2^{N_0}\Big(\|X_t\|_{L^p} + \|\mathrm{div} X_t\|_{L^p}\Big)\|\omega^0\|_{L^\infty}
\end{aligned}
\tag{4.54}
$$

L'estimation L^p du champ de vecteurs X_t et de sa divergence est classique. Le fait que le champ de vecteurs est supporté dans $(\Sigma_t)^c_{\delta(t,h)}$ permet d'avoir

$$
\begin{aligned}
\|X_t\|_{L^p} &\leq \|X_0\|_{L^p}\, h^{-C\int_0^t \|\nabla v(\tau)\|_{L(\Sigma_\tau)}d\tau} \\
&\leq \|X_0\|_{L^p}\, h^{-C\int_0^t W(\tau)d\tau}.
\end{aligned}
$$

La même méthode appliquée à l'équation (4.35) donne

$$
\|\mathrm{div} X_t\|_{L^p} \leq \|\mathrm{div} X_0\|_{L^p}.
$$

En reportant ces estimations dans (4.54), que l'on associe à (4.53), on parvient à

$$
\begin{aligned}
\|X(x,D)\omega\|_{L^\infty_t B^{1+\sigma_t}_p} &\leq 2\|X_0(x,D)\omega^0\|_{B^{s-1}_p} + C(-\log h)\int_0^t W(\tau)\|X_\tau(x,D)\omega\|_{B^{\sigma_\tau}_p} d\tau \\
&+ E^\nu_0(t)\|\omega^0\|_{L^\infty}\Big(2^{N_0}\|X_0\widetilde{\|}_{B^s_p}\, h^{-C\int_0^t W(\tau)d\tau} + \\
&\qquad \Big(1+(-\log h)TN_0^{\frac{1}{r}-1}\widetilde{W}(t)\Big)\|X_.\|_{L^\infty_t B^{1+\sigma_.}_p}\Big).
\end{aligned}
\tag{4.55}
$$

Posons

$$
E_1 \overset{déf}{=} C\Big(\|X_0(x,D)\omega^0\|_{B^{s-1}_p} + \|\omega^0\|_{L^\infty}\Big(\|X_0\|_{B^s_p} + \|\ \mathrm{div} X_0\|_{B^s_p}\Big)\Big).
$$

Alors l'inégalité (4.55) se réécrit sous la forme

$$
\begin{aligned}
\|X(x,D)\omega\|_{L^\infty_t B^{1+\sigma_t}_p} &\leq 2^{N_0} E_1\, E^\nu_0(t)\, h^{-C\int_0^t W(\tau)d\tau} \\
&+ C(-\log h)\int_0^t W(\tau)\|X_\tau(x,D)\omega\|_{B^{\sigma_\tau}_p} d\tau \\
&+ E^\nu_0(t)\|\omega^0\|_{L^\infty}\Big(1+(-\log h)TN_0^{\frac{1}{r}-1}\widetilde{W}(t)\Big)\|X_.\|_{L^\infty_t B^{1+\sigma_.}_p}.
\end{aligned}
\tag{4.56}
$$

Par suite en reportant (4.40) dans (4.56) et en se servant de la condition (4.52), on parvient à

$$
\begin{aligned}
\|X(x,D)\omega\|_{L^\infty_t B^{1+\sigma_t}_p} &\leq E_1\Big(2^{N_0}E^\nu_0(t) + C_0^{-1}(-\log h)\widetilde{W}(t)/\|\omega^0\|_{L^\infty}\Big)\, h^{-C\int_0^t W(\tau)d\tau} \\
&\quad + C(-\log h)\int_0^t W(\tau)\|X_\tau(x,D)\omega\|_{B^{\sigma_\tau}_p} d\tau \\
&\quad + \Big(E^\nu_0(t)\|\omega^0\|_{L^\infty} + C_0^{-1}(-\log h)\widetilde{W}(t)\Big)\times \\
&\quad \times h^{-C\int_0^t W(\tau)d\tau}\int_0^t h^{C\int_0^\tau W(\tau')d\tau'}\|X(x,D)\omega\|_{L^\infty_\tau B^{1+\sigma_\tau}_p} d\tau
\end{aligned}
\tag{4.57}
$$

Définissons les quantités

$$\begin{aligned} f_1(t) &= \|X(x,D)\omega\|_{L_t^\infty B_p^{1+\sigma_t}} h^{C\int_0^t W(\tau)d\tau} \quad \text{et pour tout } 0 \le \tau \le t \\ g_t(\tau) &= C\widetilde{W}(\tau) + E_0^\nu(t)\|\omega^0\|_{L^\infty} + C_0^{-1}\widetilde{W}(t). \end{aligned}$$

Alors l'inégalité (4.57) devient

$$f_1(t) \le E_1\Big(2^{N_0}E_0^\nu(t) + C_0^{-1}\widetilde{W}(t)/\|\omega^0\|_{L^\infty}\Big)(-\log h) + (-\log h)\int_0^t g_t(\tau)f_1(\tau)d\tau.$$

En appliquant le lemme de Gronwall et en utilisant la croissance de $\widetilde{W}(t)$, on trouve

$$\|X(x,D)\omega\|_{L_t^\infty B_p^{1+\sigma_t}} \le \frac{2^{N_0}E_1}{\|\omega^0\|_{L^\infty}}\Big(E_0^\nu(t)\|\omega^0\|_{L^\infty} + C_0^{-1}\widetilde{W}(t)\Big)(-\log h)h^{-\int_0^t g_t(\tau)d\tau}. \quad (4.58)$$

En reportant cette estimation dans (4.40) et en se servant de l'inégalité

$$(-\log h)\int_0^t \Big(E_0^\nu(\tau)\|\omega^0\|_{L^\infty} + C_0^{-1}\widetilde{W}(\tau)\Big)h^{-\int_0^\tau g_\tau(\tau')d\tau'}d\tau \le h^{-\int_0^t g_t(\tau)d\tau},$$

on trouve

$$\|X_t\|_{B_p^{1+\sigma_t}} \le \frac{2^{N_0}E_1}{\|\omega^0\|_{L^\infty}}h^{-\int_0^t g_t(\tau)d\tau}.$$

Pour fournir une estimation de $X_0(x,D)\psi(t,x)$, nous écrivons tout d'abord que

$$X_0(x,D)\psi(t,x) = X_t(\psi(t,x)). \quad (4.59)$$

Soient $x, y \in \mathbb{R}^2$ tels que $|x-y| \le h/4$. Alors, on a deux possibilités : soit x et $y \in (\Sigma_0)_h$, auquel cas la valeur du champ X_0 en ces points est nulle; soit x et $y \in (\Sigma_0)^c_{3h/4}$. Alors dans ce cas le segment $[x,y]$ n'intersecte pas l'ensemble $(\Sigma_0)_{h/4}$. Donc cela nous permet d'écrire via la formule de la moyenne que pour tout $0 < \epsilon' < 1$

$$\begin{aligned} \big|X_t(\psi(t,x)) - X_t(\psi(t,y))\big| &\le \frac{C}{\epsilon}\|X_t\|_{C^{\epsilon'}}\big|\psi(t,x) - \psi(t,y)\big|^{\epsilon'} \\ &\le \frac{C}{\epsilon'}\|X_t\|_{C^{\epsilon'}}\|\nabla\psi(t)\|^{\epsilon'}_{L^\infty((\Sigma_0)^c_{h/4})}|x-y|^{\epsilon'}. \end{aligned} \quad (4.60)$$

D'un autre côté, en dérivant l'équation régissant le flot et en se servant de la première partie du lemme 4.2.1, on trouve

$$\begin{aligned} \|\nabla\psi(t)\|_{L^\infty((\Sigma_0)^c_{h/4})} &\le \exp\Big(\int_0^t \|\nabla v(\tau)\|_{L^\infty((\Sigma_\tau)^c_{\delta(t,h/4)})}\Big) \\ &\le (h/4)^{-C\int_0^t W(\tau)d\tau}. \end{aligned}$$

Ainsi en reportant cette estimation dans (4.60), on obtient pour $|x-y| \le h/4$,

$$\big|X_t(\psi(t,x)) - X_t(\psi(t,y))\big| \le \frac{C}{\epsilon'}\|X(t)\|_{C^{\epsilon'}}(h/4)^{-C\epsilon'\int_0^t W(\tau)d\tau}|x-y|^{\epsilon'}$$

Lorsque $|x-y| \geq h/4$, alors on écrit simplement

$$\left|X_t(\psi(t,x)) - X_t(\psi(t,y))\right| \leq 2\|X_t\|_{L^\infty}(h/4)^{-\epsilon'}|x-y|^{\epsilon'}.$$

Par conséquent, on parvient à montrer que $X_t(\psi(t))$ est un élément de $C^{\epsilon'}$, avec

$$\begin{aligned} \|X_t(\psi_t)\|_{C^{\epsilon'}} &\leq \frac{C}{\epsilon'}\|X_t\|_{C^{\epsilon'}}(h/4)^{-\epsilon'(1+C\int_0^t W(\tau)d\tau)} \\ &\leq \frac{C}{\epsilon'}\|X_t\|_{B_p^{\epsilon'+2/p}}(h/4)^{-\epsilon'(1+C\int_0^t W(\tau)d\tau)}. \end{aligned} \tag{4.61}$$

Donc, en prenant $\epsilon' = 1+\sigma_t - 2/p$ et en utilisant l'estimation (4.33) on trouve le résultat.
En ce qui concerne l'estimation dans les espaces de Besov, nous ferons l'hypothèse que le support de X_0 est un compact K. Il s'ensuit d'après la définition du champ X_t que le support de $X_t(\psi_t)$ est inclus dans K. Alors on obtient en vertu du lemme 4.2.5

$$\|X_t(\psi_t)\|_{B_p^{\epsilon'}} \leq C_K\|X_t(\psi_t)\|_{C^{\epsilon'}}.$$

Ainsi nous obtenons à l'aide de l'injection de Sobolev et de l'estimation (4.61)

$$\|X_t(\psi_t)\|_{B_p^{1+\sigma_t-2/p}} \leq \frac{C_K}{1+\sigma_t-2/p}\|X_t\|_{B_p^{1+\sigma_t}}(h/4)^{-(1+C\int_0^t W(\tau)d\tau)}$$

Par suite en combinant cette majoration avec (4.33) on parvient au résultat souhaité.

Démonstration du lemme 4.5.2

La preuve est intimement liée , d'une part à la formulation fréquencielle de la proposition 4.4.1 et d'autre part à l'effet régularisant que l'on a déjà établi. D'abord, l'inégalité (4.28) permet d'avoir pour tout entier $q \geq -1$

$$\begin{aligned} \|\Delta_q X_t(x,D)\omega\|_{L^p} \leq\ & \|X_0(x,D)\omega^0\|_{B_p^{s-1}} + C\Big(\frac{p^2}{p-1}+\nu t\Big)2^{-2q}\sup_{0\leq\tau\leq t}\|g_q(\tau)\|_{L^p} \\ & + C(-\log h)\int_0^t \frac{2^{-q\sigma_\tau}}{1-\sigma_\tau^2}W(\tau)\|X_\tau(x,D)\omega\|_{B_p^{\sigma_\tau}}d\tau \\ & + (\nu^{\frac{-1}{r}}+t^{\frac{1}{r}})2^{\frac{-2q}{r}}\|f_q\|_{l_t^r L^p}. \end{aligned} \tag{4.62}$$

C'est dans l'estimation de f que l'effet régularisant établi dans la proposition 4.3.1 est d'une si grande importance. Pour s'en rendre compte, nous allons faire une légère modification de l'expression de f :

$$\sum_{i=1}^2 R(\Delta X_t^i,\partial_i\omega) = \sum_{i=1}^2 \partial_i R(\Delta X_t^i,\omega) - R(\Delta \mathrm{div} X_t,\omega) \ ;$$

$$\sum_{i=1}^2 R(\nabla X_t^i,\nabla\partial_i\omega) = \sum_{i=1}^2 \partial_i R(\nabla X_t^i,\nabla\omega) - R(\nabla \mathrm{div} X_t,\nabla\omega).$$

Ainsi on aboutit, suite à une utilisation de l'inégalité triangulaire et du lemme de Bernstein

$$\begin{aligned}
\|\Delta_q f\|_{L^r_t L^p} &\leq C2^q \sum_{\substack{j\geq q-N_0\\ i\in\{\mp1,0\}}} \nu 2^{2j}\|\Delta_{j+i}X\|_{L^\infty_t L^p}\|\Delta_j\omega\|_{L^r_t L^\infty}\\
&+ C \sum_{\substack{j\geq q-N_0\\ i\in\{\mp1,0\}}} \nu 2^{2j}\|\Delta_{j+i}\mathrm{div}X\|_{L^\infty_t L^p}\|\Delta_j\omega\|_{L^r_t L^\infty}.
\end{aligned}$$

En se servant de la proposition 4.3.1 et de l'estimation (4.23), nous obtenons

$$\begin{aligned}
2^{q(\sigma_t-\frac{2}{r})}\|\Delta_q f\|_{L^r_t L^p} &\leq C\nu^{\frac{1}{r}}\|\omega^0\|_{L^\infty}\Big(1+(\nu+\|\omega^0\|_{L^1\cap L^\infty})t\Big)^{\frac{1}{r}}2^{q(\sigma_t+1-\frac{2}{r})}\\
&\times \sum_{j\geq q-N_0}(j+2)^{\frac{1}{r}}\Big(\|\Delta_j X\|_{L^\infty_t L^p}+\|\Delta_j\mathrm{div}X\|_{L^\infty_t L^p}\Big).
\end{aligned}$$

D'un autre côté, pour estimer g il suffit de développer les paraproduits et l'on trouve grâce à la condition $-\sigma_t > 1-s$

$$\begin{aligned}
\|g\|_{\widetilde{L^\infty_t}B_p^{\sigma_t-2}} &\leq \frac{C}{-\sigma_t}\|X\|_{\widetilde{L^\infty_t}B_p^{\sigma_t+1}}\|\omega\|_{L^\infty_{t,x}}\\
&\leq \frac{C}{1-s}\|X_\cdot\|_{L^\infty_t B_p^{\sigma_\cdot+1}}\|\omega^0\|_{L^\infty}.
\end{aligned}$$

En fait la dernière inégalité est assurée par le principe du maximum. Ce qui achève la preuve du lemme 4.5.2.

Définition de la famille $\mathcal{X}_t$

Soit $\mathcal{X}_0$ une famille $\Sigma-$admissible et v un champ de vecteurs infiniment dérivable. Alors, on définit le champ de vecteurs $\widetilde{X}_{t,\lambda,h}$ comme l'unique solution du système

$$(TG')\begin{cases} (\partial_\tau + v(\tau,x)\cdot\nabla)\widetilde{X}_{t,\lambda,h}(\tau) = \widetilde{X}_{t,\lambda,h}(\tau,x,D)v(\tau,x)\\ \\ \widetilde{X}_{t,\lambda,h}(0,x) = X_{0,\lambda,\delta(t,h)}(x).\end{cases}$$

Ainsi on construit la famille $\mathcal{X}_t$ comme suit

$$X_{t,\lambda,h} = \widetilde{X}_{t,\lambda,h}(t,x) \quad \text{et} \quad \mathcal{X}_t = (X_{t,\lambda,h})_{(\lambda,h)\in\Lambda\times]0,e^{-1}]} \tag{4.63}$$

Faisons remarquer que nous pouvons déduire à partir de l'équation (TG') que pour tout réel positif τ

$$\widetilde{X}_{t,\lambda,h}(\tau,\psi(\tau,x)) = X_{0,\lambda,\delta(t,h)}(x,D)\psi(\tau,x). \tag{4.64}$$

La proposition suivante précise le théorème 4.5.1.

Proposition 4.5.2. *Soient $s\in]0,1[$, $\epsilon\in]0,\frac{s}{2}[$, $p>\frac{2}{s-2\epsilon}$ et $r\in]1,\frac{1}{1+\epsilon-\frac{s}{2}}[$. Alors il existe une constante positive C telle qu'on ait les assertions suivantes. On se donne un champ de vecteurs v^0 de divergence nulle dont le rotationnel $\omega^0\in L^1\cap L^\infty$. Soient Σ_0 un ensemble fermé de $\mathbb{R}^2$ et $\mathcal{X}_0$ une famille Σ_0-admissible d'ordre $\Xi=(\alpha_0,\beta_0,\gamma_0)$. On suppose que*

$$\omega^0\in B^{s,p,\beta_0}_{\Sigma_0,\mathcal{X}_0}.$$

Soit T un réel positif. On pose pour tout $0 \leq t \leq T$

$$\sigma_t = s\Big(1 - \frac{\epsilon t}{sT}\Big) - \epsilon - 1.$$

Alors nous aurons:

1) *Le champ de vecteurs défini par (4.63) appartient pour tout $0 \leq t \leq T$ à l'espace $B_p^{1+\sigma_t}$.*

2) *La solution du système de Navier-Stokes, notée v, est lipschitzienne en dehors dehors du transporté de Σ_0 par le flot visqueux $\psi(t)$, ceci étant localement uniformément par rapport à ν. En d'autres termes, nous avons*

$$\sup_{h\in]0,e^{-1}]} \frac{\|\nabla v(t)\|_{L^\infty(\psi(t,\Sigma_0)_h^c)}}{-\log h} \leq K_{0,\nu}(1+\nu t)^{\frac{2r-1}{r-1}} e^{e^{Ct\|\omega^0\|_{L^1\cap L^\infty}}},$$

avec

$$K_{0,\nu} \stackrel{déf}{=} C\|\omega^0\|_{L^1\cap L^\infty}\Big(-\beta_0 + \log\Big(e + \alpha_0 \frac{\|\omega^0\|^{s,p,\beta_0}_{\Sigma_0,\mathcal{X}_0}}{\|\omega^0\|_{L^\infty}}\Big)\Big).$$

3) *Pour tout $t \in [0,T]$ et pour tout $\eta > 0$ la famille $\mathcal{X}$ est $\Sigma(t)-$admissible d'ordre $\Xi(t) = (\alpha_0(t),\beta_0(t) - \eta,\gamma_0(t))$, avec*

$$\alpha_0 \stackrel{déf}{=} e^{Ct\|\omega^0\|_{L^1\cap L^\infty}},\ \beta_0(t) \stackrel{déf}{=} (\beta_0 - t\,K_{0,\nu}(t))e^{Ct\|\omega^0\|_{L^1\cap L^\infty}} \text{ et}$$
$$\gamma_0(t) \stackrel{déf}{=} (\gamma_0 - \alpha_0 t\,K_{0,\nu}(t))e^{Ct\|\omega^0\|_{L^1\cap L^\infty}},$$

où l'on a posé

$$K_{0,\nu}(t) \stackrel{déf}{=} K_{0,\nu}\, e^{C(1+\nu t)^{\frac{2r-1}{r-1}} e^{Ct\|\omega^0\|_{L^1\cap L^\infty}}}.$$

4) *Pour tout $t \in [0,T]$, on a*

$$\omega(t) \in B^{1+\sigma_t,p,\beta_0(t)-\eta}_{\Sigma(t),\mathcal{X}(t)},\ \forall \eta > 0.$$

De façon plus précise, on a l'estimation

$$\|\omega(t)\|^{1+\sigma(t),p}_{(\Sigma(t))h,(\mathcal{X}(t))_h} \leq \frac{\|\omega^0\|^{s,p,\beta_0}_{\Sigma_0,\mathcal{X}_0}}{\|\omega^0\|_{L^\infty}} K_{0,\nu}(t) h^{\beta_0(t)} \log\big(\frac{1}{h}\big),$$

5) *On suppose que*

$$I^0(\Sigma_0,\mathcal{X}_0) \stackrel{déf}{=} \sup_{h\in]0,e^{-1}]} I((\Sigma_0)_h,(\mathcal{X}_0)_h) < +\infty, \tag{4.65}$$

alors, on aura

$$\|X_{t,\lambda,h}(\psi_t)\|_{C^{1+\sigma_t-2/p}} \leq e^{C(1+\nu t)^{\frac{r}{r-1}} e^{Ct\|\omega^0\|_{L^1\cap L^\infty}}} \frac{\|\omega^0\|^{s,p,\beta_0}_{\Sigma_0,\mathcal{X}_0}}{\|\omega^0\|_{L^\infty}} I^0(\Sigma_0,\mathcal{X}_0)\big(h/4\big)^{\beta_0(t)-\alpha_0(t)}.$$

Démonstration : Les estimations suivantes sont démontrées dans [6], pages 174 – 175 :

$$\inf_{x\in(\Sigma_0)^c_{\delta(t,h)}} \sup_{\lambda\in\Lambda} \left|X_{0,\lambda,\delta(t,h)}\right| \leq I(\Sigma(t)_h,\mathcal{X}(t)_h)\big(\delta(t,h)\big)^{-\int_0^t \|v(\tau)\|_{LL(\Sigma_\tau)}d\tau} \tag{4.66}$$

et en posant

$$\gamma_1(t) = \Big(\gamma_0 - \int_0^t \|\nabla v(\tau)\|_{LL(\Sigma_\tau)}d\tau\Big)e^{Ct\|\omega^0\|_{L^1\cap L^\infty}}, \tag{4.67}$$

nous aurons

$$I_{\gamma_0}(\Sigma_0,\mathcal{X}_0) \leq I_{\gamma_1(t)}\big(\Sigma(t),\mathcal{X}(t)\big). \tag{4.68}$$

Pour contrôler les normes de $X_{t,\lambda,h}$ et $X_{t,\lambda,h}(x,D)\omega$, nous allons appliquer la proposition 4.5.1. Nous obtenons en particulier l'estimation suivante

$$\begin{aligned}\|X_{t,\lambda,h}(x,D)\omega\|_{B_p^{\sigma_t}} + \|\omega(t)\|_{L^\infty}\|\widetilde{X_{t,\lambda,h}}\|_{B_p^{1+\sigma_t}} \;&\leq\; 2^{N_0}E_{0,\lambda,h}\Big(1+(\nu+\|\omega^0\|_{L^\infty})t \\ &\qquad + C_0^{-1}\frac{\widetilde{W}(t)}{\|\omega^0\|_{L^\infty}}\Big)(-\log h)\,h^{-\int_0^t g_t(\tau)d\tau},\end{aligned} \tag{4.69}$$

où l'on a posé

$$E_{0,\lambda,h} \;=\; C\Big(\|X_{0,\lambda,\delta(t,h)}(x,D)\omega^0\|_{B_p^{s-1}} + \|\omega^0\|_{L^\infty}\|\widetilde{X_{0,\lambda,\delta(t,h)}}\|_{B_p^s}\Big).$$

Or, par définition et par l'estimation (4.66), nous avons

$$\begin{aligned}\|X_{0,\lambda,\delta(t,h)}(x,D)\omega^0\|_{B_p^{s-1}} \;+\; \|\omega^0\|_{L^\infty}\|\widetilde{X_{0,\lambda,\delta(t,h)}}\|_{B_p^s} &\leq \delta_t(h)^{\beta_0}I\big((\Sigma_0)_{\delta_t(h)},(\mathcal{X}_0)_{\delta_t(h)}\big)\|\omega^0\|^{s,p,\beta_0}_{\Sigma_0,\mathcal{X}_0} \\ &\leq I((\Sigma(t))_h,(\mathcal{X}(t))_h)h^{(\beta_0-\int_0^t\|v(\tau)\|_{LL(\Sigma_\tau)}d\tau)e^{Ct\|\omega^0\|_{L^1\cap L^\infty}}}\|\omega^0\|^{s,p,\beta_0}_{\Sigma_0,\mathcal{X}_0}.\end{aligned} \tag{4.70}$$

En combinant cette estimation avec (4.69), on aboutit à

$$\begin{aligned}\|\omega(t)\|^{1+\sigma(t),p}_{(\Sigma(t))h,(\mathcal{X}(t))_h} \;&\leq\; 2^{N_0}\|\omega^0\|^{s,p,\beta_0}_{\Sigma_0,\mathcal{X}_0}\alpha_0(t)(-\log h)h^{\beta_1(t)} \\ &\times\;\Big(1+(\nu+\|\omega^0\|_{L^\infty})t + C_0^{-1}\widetilde{W}(t)/\|\omega^0\|_{L^\infty}\Big),\end{aligned} \tag{4.71}$$

avec

$$\beta_1(t) = \Big(\beta_0 - \alpha_0\int_0^t g_t(\tau)d\tau\Big)e^{Ct\|\omega^0\|_{L^1\cap L^\infty}}. \tag{4.72}$$

Nous allons maintenant donner un contrôle Lipschitz en dehors du transporté de l'ensemble singulier par le flot. Pour ce faire, on combine le théorème 4.5.2 avec l'estimation (4.71) et l'on trouve sous la condition $1+\sigma_T > \frac{2}{p}$,

$$\begin{aligned}\|\nabla v(t)\|_{L^\infty((\Sigma_t)^c_h)} \leq C\|\omega^0\|_{L^1} \;&+\; C\|\omega^0\|_{L^\infty}\log\Bigg(e + 2^{N_0}\frac{\|\omega^0\|^{s,p,\beta_0}_{\Sigma_0,\mathcal{X}_0}}{\|\omega^0\|_{L^\infty}}\alpha_0(t)(-\log h)h^{\beta_1(t)} \\ &\times\;\Big(1+(\nu+\|\omega^0\|_{L^\infty})t + C_0^{-1}\widetilde{W}(t)/\|\omega^0\|_{L^\infty}\Big)\Bigg)\end{aligned}$$

En se servant de l'inégalité

$$\forall\, a\geq 1,\quad \forall\, b\geq 0,\quad \log\,(1+ab) \leq\; \log a + \log\,(1+b),$$

alors les définitions de $\widetilde{W}(t)$ et de $\beta_1(t)$ permettent d'avoir

$$\begin{aligned}\widetilde{W}(t) &\leq K_{1,\nu}(t) + C\|\omega^0\|_{L^\infty} e^{Ct\|\omega^0\|_{L^1\cap L^\infty}} \log\Big(1 + C_0^{-1}\widetilde{W}(t)/\|\omega^0\|_{L^\infty}\Big)\\ &+ \|\omega^0\|_{L^\infty} e^{Ct\|\omega^0\|_{L^1\cap L^\infty}} \int_0^t g_t(\tau)d\tau,\end{aligned}$$

où l'on a posé

$$K_{1,\nu}(t) = C\|\omega^0\|_{L^1\cap L^\infty}(1+\nu t)e^{Ct\|\omega^0\|_{L^1\cap L^\infty}}\Bigg(-\beta_0 + \log\Bigg(e + 2^{N_0}\alpha_0\frac{\|\omega^0\|^{s,p,\beta_0}_{\Sigma_0,\mathcal{X}_0}}{\|\omega^0\|_{L^\infty}}\Bigg)\Bigg). \quad (4.73)$$

En utilisant l'inégalité $\log(1+x) \leq x, \forall x \in \mathbb{R}_+$, alors en imposant à C_0 la condition

$$CC_0^{-1}e^{CT\|\omega^0\|_{L^1\cap L^\infty}} \leq \frac{1}{2}, \quad (4.74)$$

l'inégalité précédente devient

$$\widetilde{W}(t) \leq K_{1,\nu}(t) + C\|\omega^0\|_{L^\infty} e^{Ct\|\omega^0\|_{L^1\cap L^\infty}} \int_0^t g_t(\tau)d\tau,$$

En remplaçant dans cette inégalité la fonction g_t par son expression, on aboutit à

$$\begin{aligned}\widetilde{W}(t) &\leq K_{1,\nu}(t) + C\|\omega^0\|_{L^\infty}(1+\nu t)e^{Ct\|\omega^0\|_{L^1\cap L^\infty}} + CC_0^{-1}e^{Ct\|\omega^0\|_{L^1\cap L^\infty}}\widetilde{W}(t)\\ &+ C\|\omega^0\|_{L^\infty} e^{Ct\|\omega^0\|_{L^1\cap L^\infty}} \int_0^t \widetilde{W}(\tau)d\tau,\end{aligned}$$

Par conséquent, la condition (4.74) et le lemme de Gronwall permettent d'avoir

$$\widetilde{W}(t) \leq K_{1,\nu}(t)e^{e^{Ct\|\omega^0\|_{L^1\cap L^\infty}}}. \quad (4.75)$$

Ce qui implique

$$\int_0^t g_t(\tau)d\tau \leq K_{1,\nu}(t)\, t\, e^{e^{Ct\|\omega^0\|_{L^1\cap L^\infty}}}.$$

Si on reporte l'estimation (4.75) dans (4.67) et (4.72), alors on trouve

$$\begin{aligned}\gamma_0(t) \overset{déf}{=} \Big(\gamma_0 - \alpha_0 K_{1,\nu}(t)t\, e^{e^{Ct\|\omega^0\|_{L^1\cap L^\infty}}}\Big)e^{Ct\|\omega^0\|_{L^1\cap L^\infty}} &\leq \gamma_1(t),\\ \beta_0(t) \overset{déf}{=} \Big(\beta_0 - K_{1,\nu}(t)t\, e^{e^{Ct\|\omega^0\|_{L^1\cap L^\infty}}}\Big)e^{Ct\|\omega^0\|_{L^1\cap L^\infty}} &\leq \beta_1(t).\end{aligned}$$

Retournons aux conditions (4.32) et (4.74) définissant les constantes C_0 et N_0. Alors un calcul élémentaire montre que ces conditions sont satisfaites dès que

$$C_0 \simeq Ce^{CT\|\omega^0\|_{L^1\cap L^\infty}} \quad \text{et} \quad N_0 \simeq (1+\nu T)^{\frac{r}{r-1}} e^{CT\|\omega^0\|_{L^1\cap L^\infty}}.$$

Ainsi l'estimation (4.73) peut être remplaçée par

$$K_{2,\nu}(t) \overset{déf}{=} C\|\omega^0\|_{L^1\cap L^\infty}(1+\nu t)^{\frac{2r-1}{r-1}} e^{Ct\|\omega^0\|_{L^1\cap L^\infty}}\Bigg(-\beta_0 + \log\Bigg(e + \alpha_0\frac{\|\omega^0\|^{s,p,\beta_0}_{\Sigma_0,\mathcal{X}_0}}{\|\omega^0\|_{L^\infty}}\Bigg)\Bigg).$$

Par conséquent, l'estimation (4.71) devient

$$\begin{aligned}\|\omega(t)\|^{1+\sigma(t),p}_{(\Sigma(t))_h,(\mathcal{X}(t))_h} &\le C\,e^{C(1+\nu t)^{\frac{r}{r-1}}e^{Ct\|\omega^0\|_{L^1\cap L^\infty}}}\frac{\|\omega^0\|^{s,p,\beta_0}_{\Sigma_0,\mathcal{X}_0}}{\|\omega^0\|_{L^\infty}}K_{2,\nu}(t)h^{\beta_0(t)}\log\big(\frac{1}{h}\big)\\ &\le \frac{\|\omega^0\|^{s,p,\beta_0}_{\Sigma_0,\mathcal{X}_0}}{\|\omega^0\|_{L^\infty}}K_{0,\nu}(t)h^{\beta_0(t)}\log\big(\frac{1}{h}\big),\end{aligned}$$

avec

$$K_{0,\nu}(t)\overset{\text{déf}}{=}C\|\omega^0\|_{L^1\cap L^\infty}e^{C(1+\nu t)^{\frac{2r-1}{r-1}}e^{Ct\|\omega^0\|_{L^1\cap L^\infty}}}\Big(-\beta_0+\log\Big(e+\alpha_0\frac{\|\omega^0\|^{s,p,\beta_0}_{\Sigma_0,\mathcal{X}_0}}{\|\omega^0\|_{L^\infty}}\Big)\Big).$$

En ce qui concerne l'estimation de $X_{t,\lambda,h}(\psi_t)$, nous signalons d'abord que l'hypothèse (4.65) donne, grâce à (4.70)

$$E_{0,\lambda,h}\le Ch^{\beta_0 e^{Ct\|\omega^0\|_{L^1\cap L^\infty}}}\|\omega^0\|^{s,p,\beta_0}_{\Sigma_0,\mathcal{X}_0}I^0(\Sigma_0,\chi_0).$$

Donc, la proposition (4.5.1) nous permet enfin de trouver,

$$\begin{aligned}\|X_{t,\lambda,h}(\psi_t)\|_{C^{1+\sigma_t-2/p}} &\le e^{C(1+\nu t)^{\frac{r}{r-1}}e^{Ct\|\omega^0\|_{L^1\cap L^\infty}}}\frac{E_{0,\lambda,h}}{\|\omega^0\|_{L^\infty}}\Big(\frac{\delta(t,h)}{4}\Big)^{-\alpha_0(1+\int_0^t g_t(\tau)d\tau)}\\ &\le e^{C(1+\nu t)^{\frac{r}{r-1}}e^{Ct\|\omega^0\|_{L^1\cap L^\infty}}}\frac{\|\omega^0\|^{s,p,\beta_0}_{\Sigma_0,\mathcal{X}_0}}{\|\omega^0\|_{L^\infty}}I^0(\Sigma_0,\mathcal{X}_0)\big(h/4\big)^{\beta_1(t)-\alpha_0(t)}.\end{aligned}$$

Il suffit à ce stade d'utiliser l'inégalité $\beta_0(t)\le\beta_1(t)<0$, pour que l'estimation énoncée devienne alors plausible.

4.5.4 Démonstration du théorème 4.5.1

La preuve de la première partie est une application directe de la proposition 4.5.2 : pour obtenir l'estimation du gradient de la vitesse, on fait le choix suivant $r=\frac{1}{1+\frac{\epsilon}{2}-\frac{s}{4}}$ et $\epsilon=\frac{s}{4}$. Il reste alors à vérifier la limite non visqueuse. Choisissons ν par exemple dans $[0,1]$. Alors nous avons par la proposition 4.5.2 que pour tout h fixé dans $]0,e^{-1}]$ et pour tout $t\in[0,T]$

$$\sup_{\nu\in[0,1]}\|X_{0,\lambda,h}(\cdot,D)\psi_\nu(t)\|_{C^{1+\sigma_t-2/p}}<+\infty. \tag{4.76}$$

D'un autre côté, on a

$$\begin{aligned}X_{0,\lambda,h}(x,D)\psi_\nu(t)-X_{0,\lambda,h}(x,D)\psi(t) &= \operatorname{div}\Big(X_{0,\lambda,h}\psi_\nu(t)-X_{0,\lambda,h}\psi(t)\Big)\\ &- \big(\psi_\nu(t,x)-\psi(t,x)\big)\operatorname{div}X_{0,\lambda,h}.\end{aligned}$$

Ce qui implique que

$$\|X_{0,\lambda,h}(\cdot,D)\psi_\nu(t)-X_{0,\lambda,h}(\cdot,D)\psi(t)\|_{C^{-1}}\le C\|\widetilde{X_{0,\lambda,h}}\|_{L^\infty}\|\psi_\nu(t)-\psi(t)\|_{L^\infty}.$$

Or, on sait que dans le cas des solutions de Yudovich le flot visqueux converge uniformément vers le flot eulérien. De façon plus précise, on a pour tout $T\in\mathbb{R}_+$,

$$\lim_{\nu\to0^+}\|\psi_\nu-\psi\|_{L^\infty([0,T]\times\mathbb{R}^2)}=0.$$

La preuve de ce résultat est basée sur le résultat de convergence L^2 de $v_\nu - v$ vers zéro, établi dans [7]. Ceci implique par interpolation entre L^2 et C^1_* la convergence L^∞. Ensuite on applique le lemme d'Osgood profitant de l'uniformité par rapport à ν de la norme de v_ν dans C_{LL}.
En conséquence de la convergence uniforme du flot visqueux, nous déduisons alors la convergence non visqueuse de $X_{0,\lambda,h}(\cdot,D)\psi_\nu(t)$ dans l'espace C^{-1}. Ainsi par un argument d'interpolation, on déduit, ponctuellement en temps, la convergence forte dans l'espace $C^{1+\sigma_t-2/p-\eta}$, pour tout η strictement positif. Nous obtenons encore

$$\lim_{\nu\to 0^+} \|X_{0,\lambda,h}(\cdot,D)\psi_\nu(t) - X_{0,\lambda,h}(\cdot,D)\psi(t)\|_{L^\infty([0,T]\times\mathbb{R}^2)} = 0. \tag{4.77}$$

Concernant la convergence de $X^\nu_{t,\lambda,h}$ vers $X_{t,\lambda,h}$, nous procédons comme suit. Nous avons, d'après la proposition 4.5.1, un contrôle uniforme par rapport à ν du champ $X^\nu_{t,\lambda,h}$ dans $C^{1+\sigma_t-2/p}$ et d'un autre côté, nous avons par (4.64)

$$\begin{aligned}
\|X^\nu_{t,\lambda,h} - X_{t,\lambda,h}\|_{L^\infty} &\leq \|X^\nu_{t,\lambda,h}\circ\psi_\nu - X_{t,\lambda,h}\circ\psi\|_{L^\infty} + \|X_{t,\lambda,h}\circ\psi_\nu - X_{t,\lambda,h}\circ\psi_\nu\|_{L^\infty}\\
&\leq \|X^\nu_{0,\lambda,\delta(t,h)}(\cdot,D)\psi_\nu - X_{0,\lambda,\delta(t,h)}(\cdot,D)\psi\|_{L^\infty} +\\
&\qquad + \|X_{t,\lambda,h}\circ\psi_\nu - X_{t,\lambda,h}\circ\psi_\nu\|_{L^\infty}.
\end{aligned}$$

Nous en déduisons alors la convergence à l'aide de (4.77) et de la convergence uniforme du flot visqueux. Par interpolation nous trouvons la convergence dans $C^{1+\sigma_t-2/p-\eta}$, pour tout réel $\eta > 0$. Nous avons encore la convergence dans C^0 localement en temps. Par contre la convergence de $\mathrm{div}X^\nu_{t,\lambda,h}$ vers $\mathrm{div}X_{t,\lambda,h}$ se déduit à partir du résultat précédent interpolé avec l'uniformité par rapport à ν du contrôle dans $C^{1+\sigma_t-2/p}$,

Remarque : Nous avons supposé implicitement le long du calcul qu'on a effectué dans les sections précédentes que la vitesse est suffisamment régulière. Ainsi en toute rigueur, il conviendrait de régulariser la donnée initiale et de montrer que les estimations correspondant à la solution régulière sont aussi valables pour la solution limite. Ce travail a été déjà fait dans le chapitre 9 de [6] ou encore dans [14].

4.6 Appendice

4.6.1 Autour de la théorie pseudo-locale de Littlewood-Paley

Ce paragraphe est consacré à l'élaboration de quelques lemmes techniques abordant certains aspects pseudo-locaux de la théorie de Littlewood-Paley. Ils constituent, comme nous l'avons constaté, un ingrédient fondamental dans la preuve du théorème 4.5.1. Ils ont été démontrés dans les espaces de Hölder [6] et que nous allons généraliser par les mêmes techniques dans les espaces de Besov. Le premier lemme que nous allons citer n'est autre que le lemme 9.2.1 de [6].
Lemme 4.6.1. *Il existe une constante C telle que, si K est un sous ensemble fermé de $\mathbb{R}^d$ et si u est une fonction valant zéro en dehors de K, alors pour tout $h \in (0,e^{-1}]$ et pour tout $q \in \mathbb{N}$*

$$\|S_{q-1}u\|_{L^\infty} \leq C(q+2)\|u\|_L \quad et \quad \|S_{q-1}u\|_{L^\infty(K^c_h)} \leq C\|u\|_L(-\log h).$$

Le résultat suivant généralise le lemme 9.2.2 abordé dans [6] et qui traite le cas $p = +\infty$. La preuve est une légère adaptation de la méthode utilisée par J.-Y. Chemin.

Lemme 4.6.2. *Pour tout entier N et pour tout réel s, il existe une constante C telle que, pour tout $p \in [1, +\infty]$, pour tout fermé K et pour toute distribution u supportée dans K et appartenant à $u \in B^r_p$, on a*

$$\|S_{q-1}u\|_{L^p(K^c_h)} \leq C\,2^{-qs}(2^q h)^{-N}\|u\|_{B^s_p}.$$

Ceci étant pour tout couple (q,h) tel que $2^q h \geq 1$.

Démonstration : Soit ρ une fonction appartenant à $\mathcal{D}(B(0,1))$ valant 1 dans $B(0,\frac{1}{2})$. Comme pour tout $x \in K^c_h$ et pour tout $y \in K$ on a $\rho\Big(\frac{x-y}{h}\Big) = 0$, alors

$$S_{q-1}u(x) = 2^{qd}\int_{\mathbb{R}^d} \tilde{h}(2^q(x-y))(1-\rho)\Big(\frac{2^q(x-y)}{2^q h}\Big)u(y)dy.$$

Posons

$$\mu = 2^q h, \quad h^\mu(x) = \tilde{h}(x)(1-\rho)(\frac{x}{\mu}) \quad \text{et} \quad h^\mu_q(x) = 2^{qd}h^\mu(2^q x).$$

La fonction h^μ est dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ et son support est inclus dans $\{|x| \geq \frac{\mu}{2}\}$ et pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^d$ et pour tout couple (N,M), il existe une constante $C_{N,M,\alpha}$ telle que,

$$\||\cdot|^M \partial^\alpha h^\mu\|_{L^1} \leq C_{N,M,\alpha}\,\mu^{-N}. \tag{4.78}$$

L'égalité de convolution ci-dessus se réécrit

$$S_{q-1}u(x) = \int_{\mathbb{R}^d} h^\mu_q(x-y)u(y)dy. \tag{4.79}$$

Nous pouvons écrire grâce à (4.79) que pour tout élément x n'appartenant pas à K

$$S_{q-1}u(x) = 2^{qd}\int_{\mathbb{R}^d} h^\mu(2^q(x-y))(u(y)-u(x))dy. \tag{4.80}$$

En décomposant u en basses et en hautes fréquences, alors on trouve que pour tout $x \notin K$

$$S_{q-1}u(x) = \sum_{j=1}^{3} I^j_q(x) \quad \text{avec,}$$

$$\begin{aligned}
I^1_q(x) &= (h^\mu_q \star (\mathrm{Id} - S_q)u)(x) \\
I^2_q(x) &= \int_{\mathbb{R}^d} h^\mu_q(y)\big(S_q u(x-y) - S_q u(x)\big)dy \\
I^3_q(x) &= -(\mathrm{Id} - S_q)u(x)\int_{\mathbb{R}^d} h^\mu(y)dy.
\end{aligned}$$

Occupons-nous dans un premier temps de l'estimation de I^1_q. Alors en utilisant la décomposition de Littlewood-Paley, on trouve

$$I^1_q(x) = \Big(\sum_{\substack{p\geq q \\ i\in\{\mp1,0\}}} \Delta_p h^\mu_q \star \Delta_{p-i}(\mathrm{Id} - S_q)u\Big)(x).$$

Ainsi l'inégalité de convolution donne

$$\|I_q^1\|_{L^p} \leq C\|u\|_{B_p^s} \sum_{p\geq q} 2^{-ps}\|\Delta_p h_q^\mu\|_{L^1}.$$

Comme q est positif, alors le lemme de Bernstein nous assure que

$$\|I_q^1\|_{L^p} \leq C\|u\|_{B_p^s} \sum_{\substack{p\geq q \\ |\alpha'|=|\alpha|}} 2^{-ps}2^{-p|\alpha|}\|\Delta_p \partial^{\alpha'} h_q^\mu\|_{L^1}.$$

Or, par l'inégalité (4.78), nous aurons

$$\begin{aligned} \|\partial^{\alpha'} h_q^\mu\|_{L^1} &= 2^{q|\alpha|}\|\partial^{\alpha'} h^\mu\|_{L^1} \\ &\leq C_{N,\alpha}\mu^{-N}2^{q|\alpha|}. \end{aligned} \tag{4.81}$$

Par suite

$$\|I_q^1\|_{L^p} \leq C_{N,\alpha}\mu^{-N}2^{-qs}\|u\|_{B_p^s} \sum_{p\geq q} 2^{(q-p)(s+|\alpha|)}.$$

Alors il suffit de prendre α de façon à ce que $|\alpha| + s > 0$.
Si s est strictement négatif alors la majoration de la somme $I_q^2 + I_q^3$ est immédiate. En effet pour $x \notin K$, on a

$$I_q^2(x) + I_q^3(x) = h_q^\mu \star S_q u(x).$$

En conséquence, on trouve grâce à (4.81)(avec $\alpha = 0$),

$$\|I_q^2 + I_q^3\|_{L^p(K^c)} \leq C_{N,s}\mu^{-N}2^{-qs}\|u\|_{B_p^s}.$$

Ainsi nous obtenons pour tout $s < 0$

$$\|S_{q-1}u\|_{L^p(K_h^c)} = \|h_q^\mu \star u\|_{L^p(K_h^c)} \leq C_{N,s}\mu^{-N}2^{-qs}\|u\|_{B_p^s}. \tag{4.82}$$

Quant aux indices positifs s, nous allons commencer par l'identité

$$|\xi|^{2([s]+1)} = \sum_{|\alpha|=[s]+1} (i\xi)^\alpha (i\xi)^\alpha.$$

Donc il existe des fonctions g_α appartenant à S telles que pour $q \in \mathbb{N}$

$$\Delta_q u = 2^{-q|\alpha|} \sum_{|\alpha|=[s]+1} 2^{qd} g_\alpha(2^q\cdot) \star \partial^\alpha u.$$

Or le support de $\partial^\alpha u$ est inclus dans K. Par conséquent, en réappliquant le résultat de (4.82) avec $s - [s] - 1$ nous trouvons

$$\|\Delta_q u\|_{L^p(K_h^c)} \leq C_{N,s}2^{-qs}\left(2^q h\right)^{-N}\|u\|_{B_p^s}. \tag{4.83}$$

Ainsi nous en déduisons que pour s positif

$$\begin{aligned} \|I_q^3\|_{L^p(K_h^c)} &\leq C_{N,s}\|h^\mu\|_{L^1} h^{-N}\|u\|_{B_p^s} \sum_{p\geq q} 2^{-p(s+N)} \\ &\leq C_{N,s}2^{-qs}\mu^{-N}\|u\|_{B_p^s}. \end{aligned}$$

Le dernier passage est vrai pour tout N strictement positif. Il reste à prouver une estimation similaire pour I_q^2 dans le cas où $s \in \mathbb{R}_+$. Pour ce faire, on écrit pour tout $x \notin K$

$$\begin{aligned} S_q \partial^\alpha u(x) &= S_q \partial^\alpha u(x) - \partial^\alpha u(x) \\ &= \sum_{p \geq q} \partial^\alpha \Delta_p u. \end{aligned}$$

Il s'ensuit alors grâce à (4.83)

$$\|S_q \partial^\alpha u\|_{L^p(K_h^c)} \leq C_{N,\alpha} 2^{q(|\alpha|-s)} (2^q h)^{-N} \|u\|_{B_p^s}. \tag{4.84}$$

La formule de Taylor à l'ordre $[s]+1$ donne

$$\begin{aligned} S_q u(y) - S_q u(x) &= \sum_{|\alpha| \leq [s]} \frac{(y-x)^\alpha}{\alpha!} \partial^\alpha S_q u(x) \\ &+ ([s]+1) \sum_{|\alpha|=[s]+1} \frac{(y-x)^\alpha}{\alpha!} \int_0^1 (1-t)^{[s]} \partial^\alpha S_q u(x+t(y-x)) dt. \end{aligned}$$

Ce qui donne

$$|I_q^2(x)| \leq \sum_{|\alpha| \leq [s]} C_\alpha 2^{-q|\alpha|} \||\cdot|h^\mu\|_{L^1} |\partial^\alpha S_q u(x)| + J_q^2(x), \tag{4.85}$$

avec

$$J_q^2(x) = 2^{qd} \sum_{|\alpha|=[s]+1} C_\alpha \int_0^1 \int_{\mathbb{R}^d} |x-y|^{|\alpha|} |h^\mu|(2^q(x-y)) |\partial^\alpha S_q u|(x+t(y-x)) dy dt.$$

En faisant le changement de variables $z = y - x$ et en prenant la norme L^p, alors on trouve par l'inégalité de Minkowski,

$$\begin{aligned} \|J_q^2\|_{L^p} &\leq C_\alpha 2^{qd} \sup_{|\alpha|=[s]+1} \int_0^1 \int_{\mathbb{R}^d} |z|^{|\alpha|} |h^\mu|(2^q z) \|\partial^\alpha S_q u(\cdot + tz)\|_{L^p} dz dt \\ &\leq C_\alpha 2^{-q|\alpha|} \||\cdot|^\alpha h^\mu\|_{L^1} \|\partial^\alpha S_q u\|_{L^p}. \end{aligned}$$

Par suite, en se servant des inégalités (4.78) et (4.83), on trouve l'estimation voulue.

Lemme 4.6.3. *Soient $p \in [1, +\infty]$ et $s \in \mathbb{R}$. On se donne un ensemble fermé Σ et une distribution tempérée $f \in B_p^s$ tels que $h = \mathrm{dist}\,(\mathrm{supp} f, \Sigma)$ appartient à $(0, e^{-1}]$. Alors il existe une constante absolue C telle qu'on ait*

$$\begin{aligned} \|T_u f\|_{B_p^s} &\leq C(-\log h) \|u\|_{LL(\Sigma)} \|f\|_{B_p^s} \\ \|[\Delta_q, T_u] f\|_{L^p} &\leq C(-\log h) 2^{-q(s+1)} \|\nabla u\|_{LL^0(\Sigma)} \|f\|_{B_p^s}. \end{aligned}$$

Démonstration: La preuve de la première estimation est fondée sur une estimation L^p de $S_{q-1} u \Delta_q f$. Pour ce faire, nous distinguons tout d'abord un cas simple, celui des basses fréquences. Si $q \leq -\log_2 h$, alors nous aurons par le biais du lemme 4.6.1

$$\begin{aligned} \|S_{q-1} u\|_{L^\infty} &\leq C(q+2) \|u\|_L \\ &\leq C(-\log h) \|u\|_L. \end{aligned}$$

En conséquence, nous aurons

$$\|S_{q-1}u\Delta_q f\|_{L^p} \leq C(-\log h)2^{-qs}\|u\|_L\|f\|_{B^s_p}.$$

Dans le cas $2^q h \geq 1$, nous faisons la décomposition suivante

$$S_{q-1}u\Delta_q f = \sum_{j=1}^{3} T^j_{q,h}(u,f) \quad \text{avec,} \tag{4.86}$$

$$\begin{aligned}
T^1_{q,h}(u,f) &= S_{q-1}(\mathbf{1}_{\Sigma^c_{h/2}}u)\Delta_q f,\\
T^2_{q,h}(u,h) &= S_{q-1}(\mathbf{1}_{\Sigma_{h/2}}u)\mathbf{1}_{\Sigma^c_{3h/4}}\Delta_q f \quad \text{et}\\
T^3_{q,h}(u\,f) &= S_{q-1}(\mathbf{1}_{\Sigma_{h/2}}u)\mathbf{1}_{\Sigma_{3h/4}}\Delta_q f.
\end{aligned}$$

Pour l'estimation du premier terme, on utilise le fait que $u \in L(\Sigma)$ et l'uniformité en q de la norme de S_{q-1} comme étant un opérateur de $\mathcal{L}(L^\infty)$, et l'on trouve

$$\begin{aligned}
\|S_{q-1}(\mathbf{1}_{\Sigma^c_{h/2}}u)\|_{L^\infty} &\leq C\|\mathbf{1}_{\Sigma^c_{h/2}}u\|_{L^\infty}\\
&\leq C(-\log h)\|u\|_{L(\Sigma)}.
\end{aligned}$$

Concernant l'estimation de $T^2_{q,h}(u,f)$, nous nous servons du lemme 4.6.1, qui implique

$$\begin{aligned}
\|S_{q-1}(\mathbf{1}_{\Sigma_{h/2}}u)\|_{L^\infty(\Sigma^c_{3h/4})} &\leq C(-\log h)\|\mathbf{1}_{\Sigma_{h/2}}u\|_L\\
&\leq C(-\log h)\|u\|_L.
\end{aligned}$$

L'estimation de $T^3_{q,h}(u,f)$ est plus délicate et c'est justement dans cet endroit que nous ferons appel à l'hypothèse sur le support de f. En utilisant l'inégalité de Bernstein, on trouve pour tout $b \geq a$,

$$\begin{aligned}
\|S_{q-1}(\mathbf{1}_{\Sigma_{h/2}}u)\|_{L^\infty} &\leq Cb2^{\frac{qd}{b}}\|\mathbf{1}_{\Sigma_{h/2}}u\|_L\\
&\leq Cb2^{\frac{qd}{b}}\|u\|_L.
\end{aligned}$$

D'un autre côté, comme supp $f \subset \Sigma^c_{3h/4}$, alors le lemme 4.6.2 nous assure que

$$\forall N, \exists C_N / \; \|\Delta_q f\|_{L^p(\Sigma_{3h/4})} \leq C_N 2^{-qs}(2^q h)^{-N}\|f\|_{B^s_p}.$$

Ainsi nous montrons que

$$\begin{aligned}
\|T^3_{q,h}(u,f)\|_{L^p} &\leq C_N b 2^{\frac{qd}{b}} 2^{-qs}(2^q h)^{-N}\|u\|_L\|f\|_{B^s_p}\\
&\leq C_N b 2^{-qs} h^{-\frac{d}{b}}(2^q h)^{\frac{d}{b}-N}\|u\|_L\|f\|_{B^s_p}.
\end{aligned}$$

En choisissant $b = -a \log h$, alors on trouve

$$\|T^3_{q,h}(u,f)\|_{L^p} \leq C_N(-\log h)2^{-qs}(2^q h)^{-\frac{d}{a\log h}-N}\|u\|_L\|f\|_{B^s_p}.$$

Or $h \in (0,e^{-1}]$ et $a \geq 1$. Donc il s'ensuit

$$-\frac{d}{a \log h} \leq d.$$

Ainsi il suffit de prendre $N = d$, pour déduire dans le cas $2^q h \geq 1$ que

$$\|T^3_{q,h}(u,f)\|_{L^p} \leq C(-\log h) 2^{-qs} \|u\|_L \|f\|_{B^s_p}.$$

Par suite la preuve de la première partie du lemme est achevée.
Pour la seconde partie, nous écrivons

$$[\Delta_q, T_u]f = \sum_{|q-q'| \leq N_0} [\Delta_q, S_{q'-1}(u)]\Delta_{q'} f.$$

Or en écrivant l'opérateur Δ_q comme une convolution, on trouve

$$\begin{aligned}
C_{q,q'}(u,f) &\stackrel{déf}{=} [\Delta_q, S_{q'-1}(u)]\Delta_{q'} f \\
&= \int_{\mathbb{R}^d} \big((S_{q'-1}u)(x - 2^{-q}y) - S_{q'-1}u(x)\big)\tilde{h}_1(y)\big(\Delta_{q'} f\big)(x - 2^{-q}y)dy.
\end{aligned}$$

En appliquant la formule de Taylor à l'ordre 2, on obtient

$$\begin{aligned}
C_{q,q'}(u,f) &= -2^{-q} \sum_{j=1}^{d} S_{q'-1}\partial_j u(x) \int_{\mathbb{R}^d} y_j \tilde{h}_1(y)\big(\Delta_{q'} f\big)(x - 2^{-q}y)dy \\
&+ 2^{-2q} \sum_{|\alpha|=2} \int_0^1 \int_{\mathbb{R}^d} y^\alpha \tilde{h}_1(y)\big(\partial^\alpha S_{q'-1}u\big)(x - t2^{-q}y)\big(\Delta_{q'} f\big)(x - 2^{-q}y)dydt \\
&\stackrel{déf}{=} C^1_{q,q'}(u,f) + C^2_{q,q'}(u,f).
\end{aligned}$$

Posons $\varphi_j = -i\partial_j \varphi$. On rappelle que φ est la fonction de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ définissant l'opérateur Δ_q par $\Delta_q = \varphi(2^{-q}D)$. En conséquence

$$S_{q'-1}\partial_j u(x) \int_{\mathbb{R}^d} y_j \tilde{h}_1(y)\big(\Delta_{q'} f\big)(x - 2^{-q}y)dy = S_{q'-1}\partial_j u(x)\varphi_j(2^{-q}D)\Delta_{q'} f.$$

On applique le résultat fourni par la première partie du lemme modulo une légère modification de la preuve : on remplace dans (4.86) la quantité $\Delta_{q'} f$ par $\varphi_j(2^{-q}D)\Delta_{q'}$. Alors on trouve

$$\|S_{q'-1}\partial_j u(x)\varphi_j(2^{-q}D)\Delta_{q'} f\|_{L^p} \leq C(-\log h) 2^{-q's} \|\nabla u\|_{L(\Sigma)} \|f\|_{B^s_p}.$$

En conséquence, on aura

$$\|C^1_{q,q'}(u,f)\|_{L^p} \leq C(-\log h) 2^{-q(s+1)} \|\nabla u\|_{L(\Sigma)} \|f\|_{B^s_p}. \tag{4.87}$$

Pour le second terme, on utilise une simple inégalité de convolution qui donne

$$\|C^2_{q,q'}(u,f)\|_{L^p} \leq C 2^{-2q} \sum_{|\alpha|=2} \|S_{q'-1}\partial^\alpha u\|_{L^\infty} \|\Delta_{q'} f\|_{L^p}.$$

Or, il est facile de voir que pour $|\alpha| = 2$ on a

$$\|S_{q'-1}\partial^\alpha u\|_{L^\infty} \leq C2^q \|\nabla u\|_{C^0_*}.$$

Par suite

$$\Big\| \sum_{|q'-q|\leq 4} C^2_{q,q'} \Big\|_{L^p} \leq C2^{-q(1+s)} \|\nabla u\|_{C^0_*} \|f\|_{B^s_p}. \tag{4.88}$$

Nous déduisons donc le résultat souhaité à l'aide de (4.87) et (4.88) . ■

Ce lemme permet d'avoir le résultat suivant qui porte sur une estimation du commutateur.

Corollaire 4.6.1. *Soient $p \in [1, +\infty]$, $s \in]-1,1[$ et u un champ de vecteurs de divergence nulle. On se donne un ensemble fermé Σ et une distribution tempérée $f \in B^s_p$ tels que $h =$* dist $(\mathrm{supp} f,\Sigma)$ *appartient à $]0,e^{-1}]$. Alors il existe une constante universelle C telle qu'on ait*

$$\|[\Delta_q, u\cdot\nabla]f\|_{L^p} \leq \frac{C}{1-s^2}(-\log h)\, 2^{-qs} \|\nabla u\|_{LL^0(\Sigma)} \|f\|_{B^s_p}.$$

Preuve : Il suffit d'après le lemme (4.6.3) de montrer que

$$\Big\|[\Delta_q, u\cdot\nabla]f - [\Delta_q, T_u\cdot\nabla]f\Big\|_{L^p} \leq \frac{C}{1-s^2} 2^{-qs} \|\nabla u\|_{C^0_*} \|f\|_{B^s_p}. \tag{4.89}$$

Pour démontrer cette estimation nous allons faire usage du calcul paradifférentiel. Alors on peut écrire

$$[\Delta_q, u\cdot\nabla]f - [\Delta_q, T_u\cdot\nabla]f = [\Delta_q, T_{\nabla\cdot}\cdot u]f - [\Delta_q, R(u,\nabla\cdot)]f.$$

Pour estimer le premier terme, on écrit par définition du paraproduit

$$[\Delta_q, T_{\nabla\cdot} u]f = \sum_{|q'-q|\leq 4} [\Delta_q, \Delta_{q'}u \cdot S_{q'-1}\nabla]f.$$

Comme dans cette somme $q' \in \mathbb{N}$, alors on peut déduire en vertu du lemme de Bernstein que,

$$\begin{aligned} \|S_{q'-1}u\cdot\nabla f\, \Delta_{q'}u\|_{L^p} &\leq C2^{-q'} \|S_{q'-1}\nabla f\|_{L^p} \|\Delta_{q'}\nabla u\|_{L^\infty} \\ &\leq C\|\nabla u\|_{C^0_*} \|f\|_{B^s_p} 2^{-q} \sum_{p\leq q} 2^{p(1-s)} \\ &\leq \frac{C}{1-s} \|\nabla u\|_{C^0_*} 2^{-qs} \|f\|_{B^s_p}. \end{aligned}$$

Ceci permet de retrouver pour $s < 1$

$$\Big\|[\Delta_q, T_{\nabla\cdot} u]f\Big\|_{L^p} \leq \frac{C}{1-s} 2^{-qs} \|\nabla u\|_{C^0_*} \|u\|_{B^s_p}. \tag{4.90}$$

En ce qui concerne le terme de reste, nous allons utiliser la condition de divergence nulle qui implique

$$[\Delta_q, R(u^j, \partial_j)]f = \sum_{\substack{q'\geq q-N_0 \\ i\in\{\mp 1,0\}}} [\partial_j\Delta_q, \Delta_{q'}u]\Delta_{q'-i}f.$$

Or en développant le commutateur et en procédant à un simple calcul utilisant le lemme de Bernstein on trouve pour tout $q' \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}\big\|[\partial_j\Delta_q,\Delta_{q'}u]\Delta_{q'-i}f\|_{L^p} &\leq C2^q\|\Delta_{q'}u\|_{L^\infty}\|\Delta_{q'-i}f\|_{L^p}\\ &\leq C2^{-q'(1+s)}2^{-q}\|\nabla u\|_{C^0_*}\|f\|_{B^s_p}.\end{aligned} \tag{4.91}$$

Si $q' = -1$ et $i \in \{\mp1,0\}$, alors on utilise l'estimation

$$\big\|[\Delta_q,\Delta_{-1}u]\partial_j\Delta_i f\big\|_{L^p} \leq C2^{-q}\|\Delta_{-1}\nabla u\|_{L^\infty}\|\Delta_i f\|_{L^p}. \tag{4.92}$$

Ainsi en combinant (4.91) et (4.92) on trouve que pour tout $s > -1$

$$\big\|[\Delta_q,R(u^j,\partial_j)]f\big\|_{L^p} \leq \frac{C}{1+s}2^{-qs}\|\nabla u\|_{C^0_*}\|f\|_{B^s_p}. \tag{4.93}$$

Donc en combinant (4.90) et (4.93) on parvient alors à l'estimation (4.89).

4.6.2 Application

Comme application des résultats du paragraphe précédent, on a

Lemme 4.6.4. *Il existe une constante C vérifiant les propriétés suivantes. Soient $s,r \in]0,1[$, $p \in [1,+\infty]$ et Σ un ensemble fermé de $\mathbb{R}^2$. On se donne un champ de vecteurs X qui appartient, ainsi que sa divergence, à B^s_p et supporté dans Σ^c_h. Soit v un champ de vecteurs tel que son rotationnel est borné et son gradient est dans $LL(\Sigma)$. Alors pour tout $q \geq -1$*

$$\begin{aligned}\|\Delta_q X(x,D)v\|_{L^p} &\leq C2^{-q}\|\Delta_q X(x,D)\omega\|_{L^p} + \frac{C}{r}2^{-qr}\|\mathrm{div}X\|_{B^r_p}\|\omega\|_{C^0_*}\\ &+ \frac{C}{1-s}2^{-qs}\|X\|_{B^s_p}\Big(\|\omega\|_{C^0_*} + \|\nabla v\|_{LL(\Sigma)}(-\log h)\Big).\end{aligned}$$

Démonstration: La preuve suit de près celle du corollaire 9.2.1 du [6]. Elle est basée sur la décomposition suivante que l'on retrouve dans le lemme 3.3.2 du même ouvrage

$$X(x,D)v = \sum_{i=1}^{5} V_i \quad \text{avec}$$

$$\begin{aligned}V_1 &= (\mathrm{Id} - \Delta_{-1})\nabla^\perp\Delta^{-1}X(x,D)\omega,\\ V_2 &= \sum_{j=1}^{2}[T_{X^j},\nabla^\perp\Delta^{-1}]\partial_j\omega,\\ V_3 &= (\mathrm{Id} - \Delta_{-1})\nabla^\perp\Delta^{-1}R(\omega,\, \mathrm{div}X),\\ V_4 &= = -(\mathrm{Id} - \Delta_{-1})\nabla^\perp\Delta^{-1}\sum_{j=1}^{2}\big(T_{\partial_j\omega}X^j + \partial_j R(\omega,X^j)\big) \quad \text{et}\\ V_5 &= \sum_{j=1}^{2}\big(T_{\partial_j v}X^j + R(\partial_j v,X^j)\big).\end{aligned}$$

Ainsi on peut écrire

$$X(x,D)v = \sum_{i=1}^{3} W_i(X,v) + \sum_{j=1}^{2} T_{\partial_j v} X^j, \tag{4.94}$$

où l'on a posé

$$\begin{aligned} W_1(X,v) &= V_1 \\ W_2(X,v) &= V_2 + V_4 + V_5 - \sum_{j=1}^{2} T_{\partial_j v} X^j \quad \text{et} \\ W_3(X,v) &= V_3. \end{aligned}$$

Pour estimer W_1, il suffit d'utiliser le lemme de Bernstein qui implique l'existence d'une constante absolue C telle que pour tout $p \geq 1$ et pour tout $q \geq -1$

$$\|\Delta_q V_1\|_{L^p} \leq C 2^{-q} \|\Delta_q X(x,D)\omega\|_{L^p}. \tag{4.95}$$

Le terme W_3 s'estime comme suit

$$\begin{aligned} \|\Delta_q V_3\|_{L^p} &\leq C \|\mathrm{div} X\|_{B^r_p} 2^{-q} \sum_{q' \geq q - N_0} 2^{-q'r} \\ &\leq \frac{C}{r} 2^{-qr} \|\mathrm{div}\ X\|_{B^r_p}. \end{aligned} \tag{4.96}$$

Un calcul analogue montre que

$$\|W_2(X,v) - V_2\|_{B^s_p} \leq \frac{C}{s} \|X\|_{B^s_p}. \tag{4.97}$$

Par contre l'estimation de V_2 est plus délicate. Nous avons

$$V_2 = \sum_{\substack{q' \in \mathbb{N} \\ j \in \{1,2\}}} [S_{q'-1} X^j, \nabla^\perp \Delta^{-1}] \Delta_{q'} \partial_j \omega \stackrel{\text{déf}}{=} \sum_{\substack{q' \in \mathbb{N} \\ j \in \{1,2\}}} T_{j,q'}. \tag{4.98}$$

Or le fait que le spectre fréquenciel de $T_{j,q'}$ est supporté dans une couronne de taille $2^{q'}$ nous assure l'existence d'une fonction $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$ supportée dans une couronne fixe telle qu'on ait

$$T_{j,q'} = 2^{-q'} [S_{q'-1} X^j, \psi(2^{-q'} D)] \Delta_{q'} \partial_j \omega.$$

Soit ϕ l'élément de $\mathcal{S}$ correspondant à la transformée de Fourier inverse de ψ. Alors en écrivant l'opérateur $\psi(2^{-q'} D)$ comme une convolution, on parvient à l'expression

$$2^{q'} T_{j,q'}(x) = 2^{2q'} \int_{\mathbb{R}^2} \phi(2^{q'} y) \Delta_{q'} \partial_j \omega(x-y) \big(S_{q'-1} X^j(x) - S_{q'-1} X^j(x-y)\big) dy.$$

En utilisant la formule de Taylor à l'ordre 1 on trouve

$$2^{q'} T_{j,q'}(x) = -2^{2q'} \sum_{i=1}^{2} \int_0^1 \int_{\mathbb{R}^2} \phi(2^{q'} y) \Delta_{q'} \partial_j \omega(x-y) y^i \partial_i S_{q'-1} X^j(x - ty) dy dt.$$

Par suite, il vient

$$2^{q'}|T_{j,q'}(x)| \leq C\|\nabla\Delta_{q'}\omega\|_{L^\infty}2^{2q'}\int_0^1\int_{\mathbb{R}^2}\big|y\phi(2^{q'}y)\nabla S_{q'-1}X^j(x-ty)\big|dydt. \tag{4.99}$$

Ainsi en utilisant l'inégalité triangulaire et l'invariance par translation des normes L^p, on trouve

$$\begin{aligned}\|T_{j,q'}\|_{L^p} &\leq C\||\cdot|\phi\|_{L^1}2^{-2q'}\|\nabla\Delta_{q'}\omega\|_{L^\infty}\|\nabla S_{q'-1}X^j\|_{L^p}\\ &\leq C2^{-q'}\|\omega\|_{C^0_*}\|\nabla S_{q'-1}X^j\|_{L^p}.\end{aligned} \tag{4.100}$$

Donc en reportant (4.100) dans (4.98) on trouve, vu que $s<1$

$$\begin{aligned}\|\Delta_q V_1\|_{L^p} &\leq \sum_{|q'-q|\leq 4}\|T_{j,q'}\|_{L^p}\\ &\leq C\|\omega\|_{C^0_*}\|X\|_{B^s_p}\sum_{\substack{|q'-q|\leq 4\\ p\leq q-2}}2^{-q}2^{p(1-s)}\\ &\leq \frac{C}{1-s}2^{-qs}\|\omega\|_{C^0_*}\|X\|_{B^s_p}.\end{aligned} \tag{4.101}$$

Ceci achève les estimations des $W_i(X,v)$. Concernant le terme $T_{\partial_j v}X^j$ nous utilisons tout simplement le lemme 4.6.3, qui implique

$$\|T_{\partial_j v}X^j\|_{B^s_p} \leq -C(\log h)\|\nabla v\|_{LL(\Sigma)}\|X\|_{B^s_p}.$$

Ainsi la preuve du lemme 4.6.4 est achevée.

Bibliographie

[1] H. Bahouri et J.-Y. Chemin, Equations de transport relatives à des champs de vecteurs non-lipschitziens et mécanique des fluides, Arch. Rational Mech. Anal., **127**, pages 159-181, 1994.

[2] M. Ben-Artzi, Global solutions of two-dimensional Navier-Stokes and euler equations, Arch. Anal. Rational Mech. **128**, pages 329-358, 1994.

[3] S. Bertozzi and P. Constantin, Uniqueness and a characterization of solutions to the contour dynamics equation, **152**, pages 19-28, 1993.

[4] J.-M. Bony, Calcul symbolique et propagation des singularités pour les équations aux dérivées partielles non linéaires, Annales de l'École supérieure, **14**, pages 209-246, 1981.

[5] M. Cannone, Ondelettes, paraproduits et Navier-Stokes. Diderot Editeur, Paris, 1995.

[6] J.-Y. Chemin, *Perfect incompressible fluids*, volume 14 of *Oxford Lecture Series in Mathematics and its Applications.* The Clarendon Press Oxford University Press, New York, 1998. Translated from the 1995 French original by Isabelle Gallagher and Dragos Iftimie.

[7] J.-Y. Chemin, A Remark on the inviscid limit for two-dimmensionnel incompressible fluid, Communication in Partial Differential Equations, **21**, pages 1771-1779, 1996.

[8] J.-Y Chemin, Théorèmes d'unicité pour le système de Navier-Stokes tridimensionnel J. Anal. Math. **77**, pages 27-50, 1999.

[9] J.-Y Chemin et N. Lerner, Flot de champs de vecteurs non Lipschitziens et équations de Navier-Stokes, J. Differential Équations, **121**, pages 314-328, 1995.

[10] P. Constantin and J. Wu, Inviscid limit of vortex patches, Nonlinearity, **8**, no.5, pages 735-742, 1995.

[11] P. Constantin and J. Wu, The inviscid limit for non-smooth vorticity, Indiana Univ. Math. J., **45**, pages 67-81, 1996.

[12] R. Danchin, Poches de tourbillon visqueuses, Journal des Mathématiques Pures et Appliquées, **76**, issue 7, pages 609-647, 1997.

[13] R. Danchin, Poches de tourbillon visqueuses, Journal des Mathématiques Pures et Appliquées, **76**, issue 7, pages 609-647, 1997.

[14] R. Danchin, Évolution temporelle d'une poche de tourbillon singulière, Communications in Partial Differential Equations, **22**, pages 685-721, 1997.

[15] R. Danchin, Évolution d'une singularité de type cusp dans une poche de tourbillon, Revista Matematica Iberoamerica, **16**, pages 281-329, 2000.

[16] R. Danchin, Zero Mach number limit in critical spaces for compressible Navier-Stokes equations. *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)*, 35(1), pages 27-75, 2002.

[17] J.-M. Delort, Existence de nappes de tourbillon en dimension deux, Journal of the American Mathematical Society, 4 (3), pages 553 – 586, 1991.

[18] R.J. DiPerna and A. Majda, concentrations in regularizations for 2-D incompressible flow, Comm. Pure Appli. Math. **40**, pages 301-345, 1987.

[19] Y. Giga, T. Miyakawa and H. Osada, Two dimensional Navier-Stokes flow with measures as initial vorticity, arch. Rational Mech. Anal. **104**, pages 223-250, 1988.

[20] L. Euler, Principes généraux du mouvement de fluides, mémoire de l'académie des Sciences de Berlin, **11**, pages 269-315, 1755.

[21] P. Gamblin and X. Saint Raymond, On three-dimensional vortex patches. *Bull. Soc. Math. France*, **123**(3), pages 375-424, 1995.

[22] H. Fujita and T. Kato,On the nonstationary Navier-Stokes system, Rend. Sem. Mat. Univ. Padova, **32**, pages 243-260, 1962.

[23] T. Hmidi, Transport-diffusion et viscosité évanescente, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I **337**, pages 309 – 312, 2003.

[24] T. Hmidi, Régularité höldérienne des poches de tourbillon visqueuses. Prépublication CMAT, octobre 2003.

[25] P. G. Lemarié, Recent developments in the Navier-Stokes problem. CRC Press, 2002.

[26] J. Leray, Sur le mouvement d'un liquide visqueux remplissant l'espace, Acta Mathematica, **63**, pages 193-248, 1934.

[27] L. Lichtenstein, Uber einige existenzprobleme der hydrodynamik homogenerunzusammendrückbarer, reibungsloser flüssigkeiten und Helmoltzchen Wirbelsätze, Mathematische Zeitschrift, **23**, pages 89-154, 1925

[28] J.-L. Lions and G. Prodi, Un théorème d'existence et d'unicité dans les équations de Navier-Stokes en dimension 2, C. R. Acad. Sci. Paris, **248**, pages 3519-3521, 1959.

[29] P.-L. Lions, Mathematical Topics in Fluid Dynamics, Vol.1 Oxford University Press (1996).

[30] A. Majda, Vorticity and the mathematical theory of an incompressible fluid flow, Communications in Pure and Applied Mathematics, **38**, pages 187-220, 1986.

[31] C. Navier, Mémoire sur les lois du mouvement des fluides, Mémoire de l'Académie des Sciences de l'Institut de France, **6** (2), pages 375-394, 1822.

[32] F. Planchon, Sur une inégalité de type Poncaré, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math, **330**, no. 1, pages 21-23, 2000.

[33] P. Serfati, Une preuve directe d'existence globale des vortex patches $2D$, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math, **318, no. 6**, pages 515-518, 1994.

[34] G. Stokes, On the theories of internal friction of fluids in motion and of the equilibrium and motion of elastic solids, Trans. Camb. Phil. Soc. **8**, pages 287-319, 1845.

[35] M. R. Ukhovskii and V. Iudovich, Axially Symmetric Flows of Ideal and Viscous Fluids Filling the Whole Space, PMM **32**, no. 1, pages 59-69, 1968.

[36] M. Vishik, Hydrodynamics in Besov Spaces, Arch. Rational Mech. Anal **145**, pages 197-214, 1998.

[37] M. Vishik, Incompressible flows of an ideal fluid with vorticity in borderline spaces of Besov type, Ann. scient. Éc. Norm. Sup. , 4^e série, **32**, pages 769-812, 1999.

[38] M. Vishik, Incompressible flows of an ideal fluid with unbounded vorticity. Comm. Math. Phys., no. 3, **213**, pages 697–731, 2000.

[39] W.Wolibner, Un théorème sur l'existence de mouvement [lan d'un fluide parfait, homogène, incompressible , pendant un temps infinimrnt long, Mathematische Zeitschrift. **37**, pages 698-726, 1933.

[40] V. Yudovich, Non-stationnary flows of an ideal incompressible fluid, Zhurnal Vych Matematika, **3**, pages 1032-1066, 1963.