Résultats d'existence et d'unicité pour le système de la MHD inhomogène

H. Abidi* et T. Hmidi†

Abstract : In this paper, we show that the 3D MHD system with variable density and viscosity is locally well-posed if the initial data $({\rho_0}^{-1}-1, u_0, B_0) \in \dot{B}^{\frac{3}{p}}_{p\,1}(\mathbb{R}^3) \times \dot{B}^{\frac{3}{p}-1}_{p\,1}(\mathbb{R}^3) \times B^{\frac{3}{p}-1}_{p\,1}(\mathbb{R}^3)$ for $1 < p \leq 3$ and when the initial density approaches a positive constant. Moreover, we prove existence and uniqueness in the Sobolev space $H^{\frac{3}{2}+\alpha}(\mathbb{R}^3) \times H^{\frac{3}{2}-1+\alpha}(\mathbb{R}^3) \times H^{\frac{3}{2}-1+\alpha}(\mathbb{R}^3)$ for $\alpha > 0$, without smallness condition for the density.

Résumé : Nous démontrons dans cet article que le système MHD tridimensionnel à densité et viscosité variables est localement bien posé lorsque $({\rho_0}^{-1}-1, u_0, B_0) \in \dot{B}^{\frac{3}{p}}_{p\,1}(\mathbb{R}^3) \times \dot{B}^{\frac{3}{p}-1}_{p\,1}(\mathbb{R}^3) \times \dot{B}^{\frac{3}{p}-1}_{p\,1}(\mathbb{R}^3)$, pour $p \in]1, 3]$ et si la densité initiale est proche d'une constante strictement positive. Nous démontrons également un résultat d'existence et d'unicité dans l'espace de Sobolev $H^{\frac{3}{2}+\alpha}(\mathbb{R}^3) \times H^{\frac{3}{2}-1+\alpha}(\mathbb{R}^3) \times H^{\frac{3}{2}-1+\alpha}(\mathbb{R}^3)$ pour $\alpha > 0$, sans aucune condition de petitesse sur la densité.

1 Introduction

Nous envisageons d'étudier le problème d'existence et d'unicité pour le système magnéto-hydrodynamique visqueux et non homogène, qui est décrit par un couplage d'équations liant la densité ρ, la vitesse v et le champ magnétique B.

$$(\mathrm{MHD}) \qquad \begin{cases} \partial_t \rho + \operatorname{div}(\rho u) = 0 \\ \partial_t(\rho u) + \operatorname{div}(\rho u \otimes u) - 2\operatorname{div}\big(\mu(\rho)\mathcal{M}\big) + \nabla\big(\Pi + \frac{B^2}{2}\big) = \rho f + \operatorname{div}(B \otimes B) \\ \partial_t B + \operatorname{rot}\big(\frac{\operatorname{rot} B}{\sigma(\rho)}\big) = \operatorname{rot}\big(u \times B\big) \\ \operatorname{div} u = \operatorname{div} B = 0 \\ (\rho, u, B)_{|t=0} = (\rho_0, u_0, B_0), \end{cases}$$

où μ est une fonction positive désignant la viscosité du fluide et σ la conductivité. La pression est notée $\Pi(t,x)$ et f représente la densité volumique de forces extérieures. La quantité $\mathcal{M}$ est la partie symétrique du gradient : $\mathcal{M} = \frac{1}{2}\big(\nabla u +^t \nabla u\big)$.
Nous allons d'abord rappeler un certain nombre de résultats significatifs traitant de l'existence et l'unicité lorsque la densité est constante. On peut à titre d'exemple citer les travaux de G. Duvaut et J.-L. Lions [11] dans le cas d'un domaine borné simplement connexe. Ces résultats sont

*E-mail: hamadi.abidi@univ-evry.fr
†E-mail: taoufik.hmidi@univ-rennes1.fr

complétés par M. Sermange et R. Temam [16] pour des fluides newtoniens. Ils démontrent que certaines propriétés classiques sur les équations de Navier-Stokes persistent pour le système de la (MHD). En particulier ce dernier est localement bien posé pour des données initiales appartenant à l'espace H^s, $s \geq 3$. Cependant l'existence globale est bien connue pour des données petites, mais non résolue pour des données arbitrairement choisies.

Avant de rappeler quelques résultats pour le système (MHD) avec densité variable, nous allons fixer un nombre d'hypothèses sur la viscosité et la conductivité. On suppose que σ et μ sont de classe C^∞ et satisfont

$$0 < \underline{\sigma} \leq \frac{1}{\sigma} \leq \bar{\sigma} < \infty \quad \text{et} \quad 0 < \underline{\mu} \leq \mu. \tag{1.1}$$

L'existence de solutions faibles globales dans l'espace d'énergie a été traitée par J.-F. Gerbeau et C. Le Bris [13] dans le cas d'un domaine borné simplement connexe. Un résultat semblable a été démontré par B. Desjardins et C. Le Bris [10] dans le cas du tore. L'objet de cet article est de traiter le cas de solutions fortes à la Fujita-Kato [12], c'est-à-dire, dans les espaces de type Sobolev-Besov critiques. A cet effet on impose une hypothèse supplémentaire sur la densité initiale ρ_0 de type $\inf_x \rho_0(x) > 0$. Remarquons que cette information reste toujours vérifiée pour $\rho(t,x)$ grâce au principe du maximum. Nous supposons également que la densité du fluide est uniforme et non nulle au voisinage de l'infini, ce qui veut dire qu'elle tend vers une valeur finie à l'infini que l'on peut prendre égale à 1.

Pour étudier le système (MHD) nous effectuons le changement d'inconnue $a = \frac{1}{\rho} - 1$ qui nous permet d'avoir le système suivant :

$$(\widetilde{\mathrm{MHD}}) \begin{cases} \partial_t a + u \cdot \nabla a = 0 \\ \partial_t u + u \cdot \nabla u + (1+a)\Big\{\nabla\Pi + \nabla\big(\frac{B^2}{2}\big) - 2\,\mathrm{div}\big(\widetilde{\mu}(a)\mathcal{M}\big)\Big\} = f + (1+a)B\cdot\nabla B \\ \partial_t B + \mathrm{rot}\big(\widetilde{\sigma}(a)\mathrm{rot}\, B\big) = B\cdot\nabla u - u\cdot\nabla B \\ \mathrm{div}\, u = \mathrm{div}\, B = 0 \\ (a,u,B)_{|t=0} = (a_0,u_0,B_0), \end{cases}$$

avec $\widetilde{\mu}(a) = \mu(\frac{1}{1+a})$ et $\widetilde{\sigma}(a) = \frac{1}{\sigma(\frac{1}{1+a})}$. Nous mentionnons que la fonction $\widetilde{\sigma}$ est C^∞ d'après les hypothèses faites sur σ.

Avant d'énoncer les résultats, on rappelle que l'opérateur de Leray $\mathcal{P}$ est le projecteur orthogonal sur les champs à divergence nulle. On note $\mathcal{Q} = I - \mathcal{P}$ le projecteur sur les champs de type gradient.

Le premier résultat que nous avons établi traite de l'existence et l'unicité pour des données régulières. De manière plus précise, nous avons le théorème suivant (on désigne par $\widetilde{C}_T(X) = C_T(X) \cap \widetilde{L}^\infty_T(X)$ et pour la définition de $\widetilde{L}^\rho_T(X)$ voir la définition 2.2).

Théorème 1.1. *Soient μ, σ deux fonctions vérifiant (1.1) et α un réel strictement positif. On suppose que $a_0 \in H^{\frac{3}{2}+\alpha}(\mathbb{R}^3)$ et vérifie $\underline{a} \stackrel{déf}{=} \inf_x (1+a_0) > 0$ (on impose de plus la condition $\nabla a_0 \in L^\infty(\mathbb{R}^3)$ si $\alpha = 1$). Soient $f \in \widetilde{L}^1_T(H^{\frac{1}{2}+\alpha}(\mathbb{R}^3))$ et (u_0, B_0) un couple de champs de vecteurs à divergence nulle et à coefficients dans $H^{\frac{1}{2}+\alpha}(\mathbb{R}^3)$. Il existe un réel strictement positif T tel que le système $(\widetilde{MHD})$ admette une unique solution sur $[0,T]$ et l'on a de manière plus précise*

$$a \in \widetilde{C}_T(H^{\frac{3}{2}+\alpha});\ u,\ B \in \widetilde{L}^1_T(H^{\frac{5}{2}+\alpha}) \cap \widetilde{C}_T(H^{\frac{1}{2}+\alpha}) \quad et \quad \nabla\Pi \in \widetilde{L}^1_T(H^{\frac{1}{2}+\alpha}).$$

Nous parvenons par le biais du théorème 1.1 à démontrer un résultat d'existence dans les espaces de Besov critiques (pour la définition voir la section ci-après).

Théorème 1.2. *Soit* $1 < p < 6$, *alors il existe une constante* η *dépendant de* p *et des fonctions* μ *et* σ *telle qu'on ait la propriété suivante. Soient* u_0, $B_0 \in \dot{B}^{\frac{3}{p}-1}_{p\,1}(\mathbb{R}^3)$ *avec* $\operatorname{div} u_0 = \operatorname{div} B_0 = 0$, $f \in L^1(\mathbb{R}_+;\, \dot{B}^{\frac{3}{p}-1}_{p\,1}(\mathbb{R}^3))$ *avec* $\mathcal{Q}f$ *appartenant à* $L^2_{loc}(\mathbb{R}_+;\, \dot{B}^{\frac{3}{p}-2}_{p\,1}(\mathbb{R}^3))$ *et* $a_0 \in \dot{B}^{\frac{3}{p}}_{p\,1}(\mathbb{R}^3)$ *où*

$$\|a_0\|_{\dot{B}^{\frac{3}{p}}_{p\,1}} \leq \eta.$$

Alors il existe $T \in (0, +\infty]$ *tel que le système* $(\widetilde{MHD})$ *admette une solution* $(a, u, B, \nabla\Pi)$ *vérifiant*

$$a \in C_b\big([0,T);\, \dot{B}^{\frac{3}{p}}_{p\,1}\big) \cap \widetilde{L}^\infty_T(\dot{B}^{\frac{3}{p}}_{p\,1});\; u, B \in C_b([0,T);\, \dot{B}^{\frac{3}{p}-1}_{p\,1}) \cap L^1(0,T;\, \dot{B}^{\frac{3}{p}+1}_{p\,1}) \quad \text{et}$$

$$\nabla\Pi \in L_T^{\frac{2}{2-\eta}}(\dot{B}^{\frac{3}{p}-1-\eta}_{p\,1}), \quad \text{avec } 0 \leq \eta < \inf(1, \frac{6-p}{2p}).$$

De plus, il existe une constante η_1 *strictement positive telle que si*

$$\|u_0\|_{\dot{B}^{\frac{3}{p}-1}_{p\,1}} + \|B_0\|_{\dot{B}^{\frac{3}{p}-1}_{p\,1}} + \|f\|_{L^1(\mathbb{R}_+;\, \dot{B}^{\frac{3}{p}-1}_{p\,1})} \leq \eta_1 \inf(\mu^1, \sigma^1),$$

avec $\mu^1 = \mu(1)$, $\sigma^1 = \widetilde{\sigma}(1)$, *alors* $T = +\infty$.

Si $1 < p \leq 3$, *alors on a l'unicité de telles solutions.*

Remarque 1.1. *Dans le théorème précédent, le temps* T *peut être minoré par*

$$\max\Bigg\{ t \geq 0 \Bigg| \, \|\mathcal{Q}f\|_{L^1_t(\dot{B}^{\frac{3}{p}-1}_{p\,1})} + \sum_{q\in\mathbb{Z}} 2^{q(\frac{3}{p}-1)} \Big(\|\dot{\Delta}_q u_0\|_{L^p} + \|\dot{\Delta}_q \mathcal{P}f\|_{L^1_t(L^p)} \Big) \Big(\frac{1 - e^{-K\mu^1 t 2^{2q}}}{K} \Big)$$
$$+ \sum_{q\in\mathbb{Z}} 2^{q(\frac{3}{p}-1)} \|\dot{\Delta}_q B_0\|_{L^p} \frac{1 - e^{-K\sigma^1 t 2^{2q}}}{K} \leq C\big(\mu^1, \sigma^1, U_0\big) \Bigg\},$$

avec $U_0 \overset{\text{déf}}{=} \|u_0\|_{\dot{B}^{\frac{3}{p}-1}_{p\,1}} + \|B_0\|_{\dot{B}^{\frac{3}{p}-1}_{p\,1}} + \|\mathcal{P}f\|_{L^1(\mathbb{R}_+;\, \dot{B}^{\frac{3}{p}-1}_{p\,1})}$ *(pour la définition de* $\dot{\Delta}_q$ *voir la section suivante).*

Le plan de l'article s'organise comme suit. En premier lieu nous rappelons quelques notions de base de la théorie de Littlewood-Paley ainsi que certains lemmes dont on fait usage. En second lieu nous présentons la preuve du théorème 1.1 qui est basée sur un effet régularisant développé au sein d'une équation de transport-diffusion. La dernière section est dédiée à l'existence et l'unicité de solutions dans les espaces critiques.

2 Préliminaires

2.1 Notations.

On dit que $A \lesssim B$ s'il existe une constante c strictement positive telle que $A \leq cB$, et $A \approx B$ si $A \lesssim B$ et $B \lesssim A$.
Soient X un espace de Banach et $p \in [1, \infty]$, on désigne par $L^p(0,T;\, X)$ l'ensemble des fonctions f mesurables sur $(0,T)$ à valeurs dans X, telles que $t \longmapsto \|f(t)\|_X$ appartient à $L^p(0,T)$. On note $C([0,T];\, X)$ l'espace des fonctions continues de $[0,T]$ à valeurs dans X, $C_b([0,T];\, X) \overset{déf}{=} C([0,T];\, X) \cap L^\infty(0,T;\, X)$ et $\widetilde{C}_T(X) \overset{déf}{=} C([0,T];\, X) \cap \widetilde{L}^\infty(0,T;\, X)$.
Enfin soit $\mu^1 = \mu(1)$, $\widetilde{\mu}(a) = \mu(\frac{1}{1+a})$, $\widetilde{\sigma}(a) = \frac{1}{\sigma(\frac{1}{1+a})}$, $\sigma^1 = \widetilde{\sigma}(1)$ et pour $1 \leq p \leq \infty$, on désigne par p' l'exposant conjugué de p défini par $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$.

2.2 Théorie de Littlewood-Paley.

Dans cette section, nous allons rappeler brièvement la théorie de Littlewood-Paley et définir les espaces fonctionnels dans lesquels nous allons travailler. Pour cela, nous utilisons une décomposition dyadique de l'unité (voir par exemple [3]). Soit $C \subset \mathbb{R}^3$, la couronne de centre 0 de petit rayon $\frac{3}{4}$, de grand rayon $\frac{8}{3}$. Il existe alors deux fonctions positives radiales χ et φ appartenant respectivement à $C_0^\infty\big(B(0, \frac{4}{3})\big)$ et à $C_0^\infty(C)$ telles que :

$$\sum_{q\in\mathbb{Z}} \varphi(2^{-q}\xi) = 1 \qquad \forall \xi \neq 0 \quad \text{et} \quad \chi(\xi) + \sum_{q\in\mathbb{N}} \varphi(2^{-q}\xi) = 1 \qquad \forall \xi \in \mathbb{R}^3.$$

On définit les opérateurs suivants.

$$\begin{aligned}
&\Delta_q\, u = 0 \quad \text{si} \quad q \leq -2, \qquad \Delta_{-1}\, u = \chi(D)\, u,\\
&\Delta_q\, u = \varphi(2^{-q}D)\, u = \dot{\Delta}_q\, u \quad \text{si} \quad q \geq 0, \qquad \dot{\Delta}_q\, u = \varphi(2^{-q}D)\, u \quad \text{pour} \quad q \in \mathbb{Z},\\
&\dot{S}_q\, u = S_q\, u = \chi(2^{-q}D)\, u \quad \text{et} \quad T_u v = \sum_q \dot{S}_{q-1} u \dot{\Delta}_q v.
\end{aligned}$$

De plus, on a :

$$u = \sum_{q\in\mathbb{Z}} \dot{\Delta}_q\, u \quad \forall\, u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^3)/\mathcal{P}[\mathbb{R}^3] \quad \text{et} \quad u = \sum_{q\in\mathbb{Z}} \Delta_q\, u \quad \forall\, u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^3),$$

où $\mathcal{P}[\mathbb{R}^3]$ est l'ensemble des polynômes (voir par exemple [14]). De plus, la décomposition de Littlewood-Paley vérifie la propriété de presque orthogonalité :

$$\begin{aligned}
&\dot{\Delta}_k \dot{\Delta}_q u \equiv 0 \quad \text{si} \quad |k-q| \geq 2 \quad \text{et} \quad \dot{\Delta}_k(\dot{S}_{q-1} u \dot{\Delta}_q u) \equiv 0 \quad \text{si} \quad |k-q| \geq 5\\
&\Big(\textit{resp.}\; \Delta_k \Delta_q u \equiv 0 \quad \text{si} \quad |k-q| \geq 2 \quad \text{et} \quad \Delta_k(S_{q-1} u \Delta_q u) \equiv 0 \quad \text{si} \quad |k-q| \geq 5\Big).
\end{aligned} \tag{2.1}$$

Définition 2.1. *Soient $s \in \mathbb{R}$, $(p,r) \in [1, +\infty]^2$ et $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^3)$, on note*

$$\|u\|_{\dot{B}^s_{p\,r}} \overset{déf}{=} \Big(\sum_{q\in\mathbb{Z}} 2^{rqs} \|\dot{\Delta}_q\, u\|^r_{L^p}\Big)^{\frac{1}{r}} \quad \Big(\textit{resp.} \quad \|u\|_{B^s_{p\,r}} \overset{déf}{=} \Big(\sum_{q\in\mathbb{Z}} 2^{rqs} \|\Delta_q\, u\|^r_{L^p}\Big)^{\frac{1}{r}}\Big)$$

avec le changement habituel pour $r = +\infty$, alors pour $s < \frac{3}{p}$, $r > 1$ et $s \leq \frac{3}{p}$, $r = 1$

$$\dot{B}^s_{p\,r} \overset{déf}{=} \Big\{ u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^3) \;\Big|\; \|u\|_{\dot{B}^s_{p\,r}} < \infty \Big\},$$

sinon on définit $\dot{B}^s_{p\,r}$ comme étant l'adhérence dans $\mathcal{S}'$ des fonctions appartenant à l'espace de Schwartz pour la norme $\|\cdot\|_{\dot{B}^s_{p\,r}}$

$$\Big(resp. \quad B^s_{p\,r} \overset{déf}{=} \Big\{ u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^3) \mid \|u\|_{B^s_{p\,r}} < \infty \Big\} \Big).$$

Pour $p = r = 2$ l'espace de Besov non homogène $B^s_{p\,r}$ coïncide avec l'espace de Sobolev H^s (voir par exemple [3]).
Comme conséquence de l'inégalité de Bernstein (voir par exemple [3]) et par définition de $\dot{B}^s_{p\,r}$, (resp. $B^s_{p\,r}$) on a la proposition suivante.

Proposition 2.1. **a**) *Il existe une constante C strictement positive telle que*

$$C^{-1}\|u\|_{\dot{B}^s_{p\,r}} \leq \|\nabla u\|_{\dot{B}^{s-1}_{p\,r}} \leq C\|u\|_{\dot{B}^s_{p\,r}} \quad \Big(resp. \quad \|\nabla u\|_{B^{s-1}_{p\,r}} \lesssim \|u\|_{B^s_{p\,r}} \Big). \tag{2.2}$$

b) *Pour $p_1 \leq p_2$ et $r_1 \leq r_2$, on a $\dot{B}^s_{p_1\,r_1} \hookrightarrow \dot{B}^{s-3(\frac{1}{p_1}-\frac{1}{p_2})}_{p_2\,r_2}$ $\Big($resp. $B^s_{p_1\,r_1} \hookrightarrow B^{s-3(\frac{1}{p_1}-\frac{1}{p_2})}_{p_2\,r_2}\Big)$.*

c) *Si $p \in [1, \infty]$, alors $\dot{B}^{\frac{3}{p}}_{p\,1} \hookrightarrow \dot{B}^{\frac{3}{p}}_{p\,\infty} \cap L^\infty$ $\Big($resp. $B^s_{p\,1} \hookrightarrow B^{\frac{3}{p}}_{p\,\infty} \cap L^\infty\Big)$.*

d) *Interpolation réelle : $(\dot{B}^{s_1}_{p\,r}, \dot{B}^{s_2}_{p\,r})_{\theta,\,r'} = \dot{B}^{\theta s_2+(1-\theta)s_1}_{p\,r'}$ $\Big($resp. $(B^{s_1}_{p\,r}, B^{s_2}_{p\,r})_{\theta,\,r'} = B^{\theta s_2+(1-\theta)s_1}_{p\,r'}\Big)$ pour $0 < \theta < 1$, $s_1 \neq s_2$ et $1 \leq p,\, r,\, r' \leq \infty$ (voir par exemple [15]).*

Proposition 2.2. *Pour $(r, p) \in [1, \infty]^2$ et $s \in \mathbb{R}$, alors on a les inégalités suivantes*

$$\|uv\|_{\dot{B}^s_{p\,r}} \lesssim \|u\|_{L^\infty}\|v\|_{\dot{B}^s_{p\,r}} + \|v\|_{L^\infty}\|u\|_{\dot{B}^s_{p\,r}} \quad si \quad s > 0, \tag{2.3}$$

Si $s_1, s_2 < \frac{3}{p}$ (resp. $s_1, s_2 \leq \frac{3}{p}$), $s_1 + s_2 + 3\min(0, 1 - \frac{2}{p}) > 0$, alors

$$\|uv\|_{\dot{B}^{s_1+s_2-\frac{3}{p}}_{p\,r}} \lesssim \|u\|_{\dot{B}^{s_1}_{p\,r}}\|v\|_{\dot{B}^{s_2}_{p\,\infty}} \tag{2.4}$$

$$\Big(resp.\ pour\ r = 1 \qquad \|uv\|_{\dot{B}^{s_1+s_2-\frac{3}{p}}_{p\,1}} \lesssim \|u\|_{\dot{B}^{s_1}_{p\,1}}\|v\|_{\dot{B}^{s_2}_{p\,1}} \Big),$$

si $|s| < \frac{3}{p}$ pour $p \geq 2$ et $-\frac{3}{p'} < s < \frac{3}{p}$ sinon, alors

$$\|uv\|_{\dot{B}^s_{p\,r}} \lesssim \|u\|_{\dot{B}^s_{p\,r}}\|v\|_{\dot{B}^{\frac{3}{p}}_{p\,\infty}\cap L^\infty}. \tag{2.5}$$

L'inégalité (2.4) reste vraie dans le cas limite (c'est-à-dire si $s_1 + s_2 = 0$) pour $2 \leq p$ (voir par exemple [15]). Plus précisément on a

$$\|uv\|_{\dot{B}^{-\frac{3}{p}}_{p\,\infty}} \lesssim \|u\|_{\dot{B}^s_{p\,1}}\|v\|_{\dot{B}^{-s}_{p\,\infty}} \quad si \quad s \in \Big(-\frac{3}{p}, \frac{3}{p}\Big] \tag{2.6}$$

et

$$\|uv\|_{\dot{B}^{-\frac{3}{p}}_{p\,\infty}} \lesssim \|u\|_{\dot{B}^{\frac{3}{p}}_{p\,\infty}\cap L^\infty}\|v\|_{\dot{B}^{-\frac{3}{p}}_{p\,1}} \quad si \quad 2 \leq p \leq 3. \tag{2.7}$$

Lorsque $s + N - \frac{N}{p} > 0$, on a

$$\|uv\|_{\dot{B}^s_{p\,r}} \lesssim \|u\|_{L^2\cap\dot{B}^{s+N-\frac{N}{p}}_{2\,r}}\|v\|_{L^2\cap\dot{B}^{s+N-\frac{N}{p}}_{2\,r}}. \tag{2.8}$$

Nous ferons également usage des lois de produit classiques dans les espaces de Sobolev, qui sont décrites dans la proposition suivante.

Proposition 2.3.

$$\|uv\|_{H^s} \lesssim \|u\|_{L^\infty}\|v\|_{H^s} + \|v\|_{L^\infty}\|u\|_{H^s} \quad si \quad s \geq 0,$$

$$\|uv\|_{H^{s_1}} \lesssim \|u\|_{H^{s_1}}\|v\|_{H^{s_2}} \quad si \quad s_1 + s_2 > 0, \quad s_1 \leq \frac{3}{2} \quad et \quad s_2 > \frac{3}{2},$$

$$\|uv\|_{H^{s_1+s_2-\frac{3}{2}}} \lesssim \|u\|_{H^{s_1}}\|v\|_{H^{s_2}} \quad si \quad s_1 + s_2 > 0 \quad et \quad s_1, s_2 < \frac{3}{2}$$

et

$$\|uv\|_{H^s} \lesssim \|u\|_{H^s}\|v\|_{H^{\frac{3}{2}} \cap L^\infty} \quad si \quad |s| < \frac{3}{2}.$$

Pour mieux décrire l'effet régularisant de l'équation de transport-diffusion nous utilisons les espaces $\widetilde{L}^\rho_T(\dot{B}^s_{p\,r})$ introduits par J.-Y. Chemin et N. Lerner dans [5].

Définition 2.2. *Soient $s \leq \frac{3}{p}$ (resp. $s \in \mathbb{R}$), $(r, \rho, p) \in [1, +\infty]^3$ et $T \in]0, +\infty]$, on dit alors que $f \in \widetilde{L}^\rho_T(\dot{B}^s_{p\,r})$, si*

$$\|f\|_{\widetilde{L}^\rho_T(\dot{B}^s_{p\,r})} \overset{déf}{=} \Big(\sum_{q\in\mathbb{Z}} 2^{qrs}\Big(\int_0^T \|\dot{\Delta}_q f(t)\|^\rho_{L^p} dt\Big)^{\frac{r}{\rho}}\Big)^{\frac{1}{r}} < \infty$$

$\Big[$*resp.* $f \in \widetilde{L}^\rho_T(H^s)$, *si* $\|f\|_{\widetilde{L}^\rho_T(H^s)} \overset{déf}{=} \Big(\sum_{q\in\mathbb{Z}} 2^{2qs}\Big(\int_0^T \|\Delta_q f(t)\|^\rho_{L^2} dt\Big)^{\frac{2}{\rho}}\Big)^{\frac{1}{2}} < \infty\Big]$, *avec le changement usuel si $r = \infty$.*

Pour $\theta \in [0, 1]$, on a

$$\|u\|_{\widetilde{L}^\rho_T(\dot{B}^s_{p\,r})} \leq \|u\|^\theta_{\widetilde{L}^{\rho_1}_T(\dot{B}^{s_1}_{p\,r})}\|u\|^{1-\theta}_{\widetilde{L}^{\rho_2}_T(\dot{B}^{s_2}_{p\,r})} \quad \text{et} \quad \|u\|_{\widetilde{L}^\rho_T(H^s)} \leq \|u\|^\theta_{\widetilde{L}^{\rho_1}_T(H^{s_1})}\|u\|^{1-\theta}_{\widetilde{L}^{\rho_2}_T(H^{s_2})}, \tag{2.9}$$

avec $\frac{1}{\rho} = \frac{\theta}{\rho_1} + \frac{1-\theta}{\rho_2}$ et $s = \theta s_1 + (1-\theta)s_2$.
Remarquons que l'inégalité de Minkowski, implique que

$$\|u\|_{\widetilde{L}^\rho_T(\dot{B}^s_{p\,r})} \leq \|u\|_{L^\rho_T(\dot{B}^s_{p\,r})} \quad \text{si} \quad \rho \leq r \quad \Big(\text{resp.} \quad \|u\|_{\widetilde{L}^\rho_T(H^s)} \leq \|u\|_{L^\rho_T(H^s)} \quad \text{si} \quad \rho \leq 2\Big),$$

$$\|u\|_{L^\rho_T(\dot{B}^s_{p\,r})} \leq \|u\|_{\widetilde{L}^\rho_T(\dot{B}^s_{p\,r})} \quad \text{si} \quad r \leq \rho \quad \Big(\text{resp.} \quad \|u\|_{L^\rho_T(H^s)} \leq \|u\|_{\widetilde{L}^\rho_T(H^s)} \quad \text{si} \quad 2 \leq \rho\Big).$$

Remarque 2.1. *Les lois de produit vues dans les espaces $\dot{B}^s_{p\,r}$ persistent aussi dans ces nouveaux espaces. Par exemple pour tout $s > 0$, $r \in [1, \infty]$ et $\frac{1}{\rho_2} + \frac{1}{\rho_3} = \frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_4}$, on a*

$$\|uv\|_{\widetilde{L}^\rho_T(\dot{B}^s_{p\,r})} \lesssim \|u\|_{L^{\rho_1}_T(L^\infty)}\|v\|_{\widetilde{L}^{\rho_4}_T(\dot{B}^s_{p\,r})} + \|v\|_{L^{\rho_2}_T(L^\infty)}\|u\|_{\widetilde{L}^{\rho_3}_T(\dot{B}^s_{p\,r})}.$$

Remarque 2.2. *La proposition 2.3 reste vraie dans $\widetilde{L}^\rho_T(H^s)$. Par exemple, on a*

$$\|uv\|_{\widetilde{L}^\rho_T(H^{s_1})} \lesssim \|u\|_{\widetilde{L}^{\rho_1}_T(H^{s_1})}\|v\|_{\widetilde{L}^{\rho_2}_T(H^{s_2})},$$

si $s_1 + s_2 > 0$, $s_1 \leq \frac{3}{2}$ et $\frac{3}{2} < s_2$ avec $\frac{1}{\rho} = \frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2}$ (voir [7]).

Rappelons enfin un résultat d'interpolation logarithmique pour les espaces $\widetilde{L}^\rho_T(\dot{B}^s_{p\,r})$ (voir [6] proposition 1.8).

Proposition 2.4. *Soient* $(p,\rho)\in[1,\infty]^2$, $s\in\mathbb{R}$ *et* $\varepsilon\in(0,1]$, *alors*

$$\|u\|_{\widetilde{L}^\rho_T(\dot{B}^s_{p\,1})}\lesssim\frac{\|u\|_{\widetilde{L}^\rho_T(\dot{B}^s_{p\,\infty})}}{\varepsilon}\log\Big(e+\frac{\|u\|_{\widetilde{L}^\rho_T(\dot{B}^{s-\varepsilon}_{p\,\infty})}+\|u\|_{\widetilde{L}^\rho_T(\dot{B}^{s+\varepsilon}_{p\,\infty})}}{\|u\|_{\widetilde{L}^\rho_T(\dot{B}^s_{p\,\infty})}}\Big). \tag{2.10}$$

3 Démonstration du Théorème 1.1

La démonstration du théorème repose sur la méthode de Friedrich's combinée avec un schéma itératif. Pour ce faire nous établissons des estimations *a priori* sur le système suivant.

$$(\mathrm{M})\qquad\left\{\begin{array}{l}\partial_t u+v\cdot\nabla u+(1+a)\Big(\nabla\big(\frac{B^2}{2}+\Pi\big)-2\,\mathrm{div}\big\{\widetilde{\mu}(a)\mathcal{M}\big\}\Big)=g+(1+a)B\cdot\nabla B\\ \partial_t B+\mathrm{rot}\Big(\widetilde{\sigma}(a)\mathrm{rot}\,B\Big)=B\cdot\nabla v-v\cdot\nabla B\\ \mathrm{div}\,u=\mathrm{div}\,B=0\\ (u,B)_{|t=0}=(u_0,B_0),\end{array}\right.$$

avec a, g, v, u_0 et B_0 données. Les fonctions μ et σ vérifient les hypothèses (1.1).

Proposition 3.1. *Soit* $s=\frac{1}{2}+\alpha$ *avec* $0<\alpha<1$. *On suppose que* $a\in\widetilde{C}_T(H^{s+1}(\mathbb{R}^3))$, *avec* $\underline{a}\stackrel{déf}{=}\inf_x(1+a_0)>0$, *et que* u_0 *et* B_0 *sont à divergence nulle et appartenantà* $H^s(\mathbb{R}^3)$. *On suppose aussi que* g *appartient à* $\widetilde{L}^1_T(H^s(\mathbb{R}^3))$. *Soit* v *un champ de vecteurs à divergence nulle tel que* ∇v *appartienne à* $L^1(0,T;\,B^{\frac{3}{2}}_{2\,\infty}(\mathbb{R}^3)\cap L^\infty(\mathbb{R}^3))$. *Soit* $(u,B)\in\widetilde{L}^\infty_T(H^s(\mathbb{R}^3))\times\widetilde{L}^\infty_T(H^s(\mathbb{R}^3))$ *une solution du système (M) sur* $[0,T]\times\mathbb{R}^3$ *et* $\nabla\Pi\in\widetilde{L}^1_T(H^s(\mathbb{R}^3))$.
On note $\overline{\mu}\stackrel{déf}{=}\underline{a}\underline{\mu}$. *Alors il existe une constante strictement positive* $C=C(\alpha,\mu,\sigma,a_0)$ *telle que*

$$\|u\|_{\widetilde{L}^\infty_T(H^s)}+\overline{\mu}\|u\|_{\widetilde{L}^1_T(H^{s+2})}\le Ce^{C\mathcal{B}_T^{\frac{s+2}{\alpha}}V(T)}\Big(\|u_0\|_{H^s}+\mathcal{B}_T^{\frac{s+2}{\alpha}}\Big\{\|g\|_{\widetilde{L}^1_T(H^s)}+\overline{\mu}\mathcal{B}_T^{\frac{2}{\alpha}+[s+1]}T\|u\|_{L^\infty_T(L^2)}\Big\}\Big),$$

$$\|B\|_{\widetilde{L}^\infty_T(H^s)}+\underline{\sigma}\|B\|_{\widetilde{L}^1_T(H^{s+2})}\le Ce^{C\int_0^T\|\nabla v(t)\|_{H^{\frac{3}{2}}\cap L^\infty}dt}\Big\{\|B_0\|_{H^s}+\mathcal{B}_T^{[s+1]+2}T\|B\|_{L^\infty_T(L^2)}\Big\}.$$

avec

$$V(t)=\int_0^t\|\nabla v\|_{B^{\frac{3}{2}}_{2\,\infty}\cap L^\infty}d\tau\qquad et\qquad\mathcal{B}_T=1+(1+\underline{a}^{-1})\|a\|_{\widetilde{L}^\infty_T(H^{s+1})}.$$

De plus, on a

$$\underline{a}\|\nabla\Pi\|_{\widetilde{L}^1_T(H^s)}\lesssim\mathcal{B}_T^{\frac{s+1}{\alpha}}\Big(\|\mathcal{Q}g\|_{\widetilde{L}^1_T(H^s)}+\int_0^T V(t)\|u(t)\|_{H^s}dt\Big).$$

Démonstration. La preuve est analogue à celle de [1] et nous allons nous contenter uniquement de l'estimation des termes faisant intervenir le champ B. Les autres termes se traitent de manière identique à [1]. Rappelons que

$$\partial_t B + \mathrm{rot}\big(\widetilde{\sigma}(a)\mathrm{rot}\, B\big) = B\cdot\nabla v - v\cdot\nabla B.$$

On applique l'opérateur Δ_q à l'équation sur B et l'on trouve

$$\partial_t \Delta_q B + \mathrm{rot}\Delta_q\big(\widetilde{\sigma}(a)\mathrm{rot}\, B\big) = \Delta_q(B\cdot\nabla v) - v\cdot\nabla\Delta_q B + [v,\Delta_q]\cdot\nabla B.$$

En prenant le produit scalaire L^2 avec $\Delta_q B$ et en se servant de la condition div $v=0$, on trouve

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\Delta_q B\|_{L^2}^2 + \int_{\mathbb{R}^3}\big(\widetilde{\sigma}(a)\Delta_q\mathrm{rot}\, B\big)\Delta_q\mathrm{rot}\, B\,dx &\le \|\Delta_q B\|_{L^2}\Big(\|\Delta_q(B\cdot\nabla v)\|_{L^2} + \Big\|[v,\Delta_q]\cdot\nabla B\Big\|_{L^2}\Big)\\ &- \int_{\mathbb{R}^3}\Big(\Delta_q\big(\widetilde{\sigma}(a)\mathrm{rot}\, B\big) - \widetilde{\sigma}(a)\Delta_q\mathrm{rot}\, B\Big)\Delta_q\mathrm{rot}\, B dx.\end{aligned}$$

Or

$$-\int_{\mathbb{R}^3}\Big(\Delta_q\big(\widetilde{\sigma}(a)\mathrm{rot}\, B\big) - \widetilde{\sigma}(a)\Delta_q\mathrm{rot}\, B\Big)\Delta_q\mathrm{rot}\, B dx \lesssim \|\Delta_q B\|_{L^2}2^q\Big\|\big[\widetilde{\sigma}(a)-\sigma^1,\Delta_q\big]\mathrm{rot}\, B\Big\|_{L^2}.$$

En conséquence, on a

$$\begin{aligned}\|B\|_{\widetilde{L}^\infty_T(H^s)} + \underline{\sigma}\|B\|_{\widetilde{L}^1_T(H^{s+2})} &\lesssim \|B_0\|_{H^s} + \underline{\sigma}\|\Delta_{-1}B\|_{L^1_T(L^2)} + \|B\cdot\nabla v\|_{\widetilde{L}^1_T(H^s)}\\ &+ \Big(\sum_{q\ge -1}2^{2qs}\Big\|[v,\Delta_q]\cdot\nabla B\Big\|^2_{L^1_T(L^2)}\Big)^{\frac{1}{2}} + \Big(\sum_{q\ge -1}2^{2q(s+1)}\Big\|\big[\widetilde{\sigma}(a)-\sigma^1,\Delta_q\big]\mathrm{rot}\, B\Big\|^2_{L^1_T(L^2)}\Big)^{\frac{1}{2}}.\end{aligned}$$

Pour simplifier les notations, on omet la dépendance en $\|a\|_{L^\infty_T(L^\infty)}$ dans la suite de la preuve. Avec cette convention, on a d'après le lemme B.5 [7] et lemme 2.3 [1]

$$\Big(\sum_{q\ge -1}2^{2qs}\Big\|\big[v,\Delta_q\big]\cdot\nabla B\Big\|^2_{L^1_T(L^2)}\Big)^{\frac{1}{2}} \lesssim \int_0^T \|\nabla v(t)\|_{B^{\frac{3}{2}}_{2\,\infty}\cap L^\infty}\|B(t)\|_{H^s}dt$$

et

$$\begin{aligned}\Big(\sum_{q\ge -1}2^{2q(s+1)}\Big\|\big[\widetilde{\sigma}(a)-\sigma^1,\Delta_q\big]\mathrm{rot}\, B\Big\|^2_{L^1_T(L^2)}\Big)^{\frac{1}{2}} &\lesssim \Big\|\widetilde{\sigma}(a)-\sigma^1\Big\|_{\widetilde{L}^\infty_T(H^{s+1})}\|\mathrm{rot}\, B\|_{\widetilde{L}^1_T(H^{s+1-\alpha})}\\ &\lesssim \|a\|_{\widetilde{L}^\infty_T(H^{s+1})}\|B\|_{\widetilde{L}^1_T(H^{s+2-\alpha})}.\end{aligned}$$

D'un autre côté la proposition 2.3 et l'inégalité de Minkowski impliquent

$$\|B\cdot\nabla v\|_{\widetilde{L}^1_T(H^s)} \lesssim \int_0^T \|B(t)\|_{H^s}\|\nabla v(t)\|_{H^{\frac{3}{2}}\cap L^\infty}dt.$$

Donc en combinant ces estimations on aboutit à

$$\begin{aligned}\|B\|_{\widetilde{L}^\infty_T(H^s)} + \underline{\sigma}\|B\|_{\widetilde{L}^1_T(H^{s+2})} &\lesssim \|B_0\|_{H^s} + \underline{\sigma}\|\Delta_{-1}B\|_{L^1_T(L^2)} + \int_0^T \|B(t)\|_{H^s}\|\nabla v(t)\|_{H^{\frac{3}{2}}\cap L^\infty}dt\\ &+ \|a\|_{\widetilde{L}^\infty_T(H^{\frac{3}{2}+\alpha})}\|B\|_{\widetilde{L}^1_T(H^{s+2-\alpha})}.\end{aligned}$$

Enfin le lemme de Gronwall conduit à l'estimation suivante

$$\|B\|_{\widetilde{L}^\infty_T(H^s)} + \underline{\sigma}\|B\|_{\widetilde{L}^1_T(H^{s+2})} \leq Ce^{C\int_0^T \|\nabla v(t)\|_{H^{\frac{3}{2}}\cap L^\infty} dt}\Big\{\|B_0\|_{H^s} + \|a\|_{\widetilde{L}^\infty_T(H^{s+1})}\|B\|_{\widetilde{L}^1_T(H^{s+2-\alpha})}\Big\}.$$

Il s'agit maintenant d'obtenir des estimations sur u. On applique l'opérateur Δ_q à l'équation vérifiée par u et l'on obtient pour $q \geq -1$

$$\begin{aligned}\partial_t\Delta_q u + v\cdot\nabla\Delta_q u + \Delta_q\nabla\big(\Pi + \frac{B^2}{2}\big) - 2\,\mathrm{div}\Big((1+a)\widetilde{\mu}(a)\Delta_q\mathcal{M}\Big) &= \Delta_q g + \big[v,\Delta_q\big]\cdot\nabla u \\ &- \Delta_q\Big(a\nabla\big(\Pi + \frac{B^2}{2}\big)\Big) + \Delta_q\Big((1+a)B\cdot\nabla B\Big) + R_q,\end{aligned} \tag{3.1}$$

avec

$$\begin{aligned}R_q &= 2\,\Delta_q\Big[a\,\mathrm{div}\Big\{\big(\widetilde{\mu}(a) - \mu^1\big)\mathcal{M}\Big\}\Big] - 2\,\mathrm{div}\Big[a\,\Delta_q\Big(\big\{\widetilde{\mu}(a) - \mu^1\big\}\mathcal{M}\Big)\Big] \\ &+ 2\,\mu^1\Delta_q\Big(a\,\mathrm{div}\mathcal{M}\Big) - 2\,\mu^1\mathrm{div}\Big(a\,\Delta_q\mathcal{M}\Big) - 2\,\mathrm{div}\Big\{(1+a)\Big[\widetilde{\mu}(a) - \mu^1, \Delta_q\Big]\mathcal{M}\Big\} \\ &= R_q^1 + \mathrm{div}R_q^2,\end{aligned}$$

où $R_q^2 = -2(1+a)\Big[\widetilde{\mu}(a) - \mu^1, \Delta_q\Big]\mathcal{M}$ et $R_q^1 = R_q - \mathrm{div}R_q^2$.
Une simple intégration par parties associée à l'inégalité de Bernstein donne

$$\big|(\mathrm{div}R_q^2|\Delta_q u)\big| \lesssim 2^q\|R_q^2\|_{L^2}\|\Delta_q u\|_{L^2}.$$

De même l'incompressibilité du flot et l'inégalité de Bernstein permettent d'avoir (avec $\overline{\mu} \stackrel{déf}{=} \underline{a}\underline{\mu}$)

$$\begin{aligned}\Big(-2\,\mathrm{div}\Big((1+a)\widetilde{\mu}(a)\Delta_q\mathcal{M}\Big|\Delta_q u\Big) &= \int_{\mathbb{R}^3}(1+a)\widetilde{\mu}(a)\big[\Delta_q\big(\nabla u +^t \nabla u\big)\cdot\nabla\big]\cdot\Delta_q u\,dx \\ &= \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^3}(1+a)\widetilde{\mu}(a)\big|\Delta_q\big(\nabla u +^t \nabla u\big)\big|^2\,dx \\ &\geq 2\,\overline{\mu}\|\Delta_q\mathcal{M}\|_{L^2}^2 = \overline{\mu}\|\Delta_q\nabla u\|_{L^2}^2,\end{aligned}$$

La dernière égalité a lieu car nous avons suite à une intégration par parties,

$$2\|\Delta_q\mathcal{M}\|_{L^2}^2 = \|\Delta_q\nabla u\|_{L^2}^2 + \int_{\mathbb{R}^3}\partial_j\Delta_q u^i\partial_i\Delta_q u^j = \|\Delta_q\nabla u\|_{L^2}^2.$$

En prenant le produit scalaire au sens L^2 de l'égalité (3.1) avec $\Delta_q u$, on obtient

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\Delta_q u\|_{L^2}^2 + \overline{\mu}\|\Delta_q\nabla u\|_{L^2}^2 \leq \|\Delta_q u\|_{L^2}\Big(&\|R_q^1\|_{L^2} + 2^q\|R_q^2\|_{L^2} + \Big\|\big[v,\Delta_q\big]\cdot\nabla u\Big\|_{L^2} \\ + \|\Delta_q T_{\nabla a}\Pi\|_{L^2} + \|\Delta_q T'_{\nabla\Pi}a\|_{L^2} + \|\Delta_q\mathcal{P}g\|_{L^2} &+ \Big\|\Delta_q\Big((1+a)B\cdot\nabla B\Big)\Big\|_{L^2} + \frac{1}{2}\Big\|\Delta_q(a\nabla B^2)\Big\|_{L^2}\Big),\end{aligned}$$

où l'on a utilisé la décomposition de Bony [2] :

$$uv = T_u v + T_v u + R(u,v), \quad \text{avec}$$

$$T_u v \stackrel{déf}{=} \sum_q S_{q-1}u\,\Delta_q v, \qquad R(u,v) \stackrel{déf}{=} \sum_{|q-p|\leq 1}\Delta_q\,u\,\Delta_p v \quad \text{et} \quad T'_u v \stackrel{déf}{=} T_u v + R(u,v).$$

Or, il existe une constante positive c_1 telle que pour tout $q \in \mathbb{N}$

$$\|\nabla \Delta_q u\|_{L^2}^2 \geq c_1 2^{2q} \|\Delta_q u\|_{L^2}^2.$$

D'où

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\Delta_q u\|_{L^2}^2 + c_1 2^{2q}\overline{\mu}\|\Delta_q u\|_{L^2}^2 \leq \|\Delta_q u\|_{L^2}\Big(\|R_q^1\|_{L^2} + 2^q\|R_q^2\|_{L^2} + \Big\|\big[v, \Delta_q\big]\cdot\nabla u\Big\|_{L^2}$$
$$+\|\Delta_q T_{\nabla a}\Pi\|_{L^2} + \|\Delta_q T'_{\nabla\Pi}a\|_{L^2} + \|\Delta_q \mathcal{P}g\|_{L^2} + \Big\|\Delta_q\Big((1+a)B\cdot\nabla B\Big)\Big\|_{L^2} + \frac{1}{2}\Big\|\Delta_q(a\nabla B^2)\Big\|_{L^2}\Big).$$

Ceci permet d'avoir,

$$\|u\|_{\widetilde{L}_T^\infty(H^s)} + \overline{\mu}\|u\|_{\widetilde{L}_T^1(H^{s+2})} \lesssim \|u_0\|_{H^s} + \overline{\mu}\|\Delta_{-1}u\|_{L_T^1(L^2)} + \|T_{\nabla a}\Pi_1\|_{\widetilde{L}_T^1(H^s)} + \|T'_{\nabla\Pi_1}a\|_{\widetilde{L}_T^1(H^s)}$$
$$+\|\mathcal{P}g\|_{\widetilde{L}_T^1(H^s)} + \Big(\sum_{q\geq -1} 2^{2qs}\Big\|\big[v,\Delta_q\big]\cdot\nabla u\Big\|_{L_T^1(L^2)}^2\Big)^{\frac{1}{2}} + \|R_q^1\|_{\widetilde{L}_T^1(H^s)} + \|R_q^2\|_{\widetilde{L}_T^1(H^{s+1})}$$
$$+\Big\|(1+a)B\cdot\nabla B\Big\|_{\widetilde{L}_T^1(H^s)} + \frac{1}{2}\Big\|a\nabla B^2\Big\|_{\widetilde{L}_T^1(H^s)}.$$

Comme $\alpha > 0$, alors les lemmes B.3, B.5 et B.1 de [7], impliquent que

$$\Big(\sum_{q\geq -1} 2^{2qs}\Big\|\Delta_q\Big(a\,\mathrm{div}\mathcal{M}\Big) - \mathrm{div}\Big(a\Delta_q\mathcal{M}\Big)\Big\|_{L_T^1(L^2)}^2\Big)^{\frac{1}{2}} \lesssim \|\nabla a\|_{\widetilde{L}_T^\infty(H^{\frac{3}{2}+\alpha-1})}\|\nabla u\|_{\widetilde{L}_T^1(H^{s+1-\alpha})},$$

et

$$\Big(\sum_{q\geq -1} 2^{2qs}\Big\|\Delta_q\Big[a\,\mathrm{div}\Big\{\big(\widetilde{\mu}(a)-\mu^1\big)\mathcal{M}\Big\}\Big] - \mathrm{div}\Big[a\Delta_q\Big(\big\{\widetilde{\mu}(a)-\mu^1\big\}\mathcal{M}\Big)\Big]\Big\|_{L_T^1(L^2)}^2\Big)^{\frac{1}{2}}$$
$$\lesssim \|\nabla a\|_{\widetilde{L}_T^\infty(H^{\frac{3}{2}+\alpha-1})}\Big\|\big(\widetilde{\mu}(a)-\mu^1\big)\mathcal{M}\Big\|_{\widetilde{L}_T^1(H^{s+1-\alpha})},$$

Ainsi, nous obtenons par le biais de la remarque 2.2 et le lemme 2.3 cité dans [1],

$$\left(\sum_{q\geq -1} 2^{2qs}\Big\|\Delta_q\Big[a\,\mathrm{div}\Big\{\big(\widetilde{\mu}(a)-\mu^1\big)\mathcal{M}\Big\}\Big] - \mathrm{div}\Big[a\Delta_q\Big(\big\{\widetilde{\mu}(a)-\mu^1\big\}\mathcal{M}\Big)\Big]\Big\|_{L_T^1(L^2)}^2\right)^{\frac{1}{2}}$$
$$\lesssim \|\nabla a\|_{\widetilde{L}_T^\infty(H^{\frac{1}{2}+\alpha})}\|a\|_{\widetilde{L}_T^\infty(H^{\frac{3}{2}+\alpha})}\|\nabla u\|_{\widetilde{L}_T^1(H^{s+1-2\alpha})}.$$

Donc,

$$\|R_q^1\|_{\widetilde{L}_T^1(H^s)} \lesssim \|\nabla a\|_{\widetilde{L}_T^\infty(H^{\frac{1}{2}+\alpha})}\|\nabla u\|_{\widetilde{L}_T^1(H^{s+1-\alpha})}\|a\|_{\widetilde{L}_T^\infty(H^{s+1})}.$$

Les inégalités de Hölder et le lemme 2.3 de [1] donnent

$$\|R_q^2\|_{\widetilde{L}_T^1(H^{s+1})} \lesssim \Big\|\widetilde{\mu}(a)-\mu^1\Big\|_{\widetilde{L}_T^\infty(H^{\frac{3}{2}+\alpha})}\|\nabla u\|_{\widetilde{L}_T^1(H^{s+1-\alpha})} \lesssim \|a\|_{\widetilde{L}_T^\infty(H^{\frac{3}{2}+\alpha})}\|\nabla u\|_{\widetilde{L}_T^1(H^{s+1-\alpha})}.$$

De même, on a (voir lemme B.5 [7])

$$\Big(\sum_{q\geq -1} 2^{2qs}\Big\|\big[v,\Delta_q\big]\cdot\nabla u\Big\|_{L_T^1(L^2)}^2\Big)^{\frac{1}{2}} \lesssim \int_0^T \|\nabla v(t)\|_{B^{\frac{3}{2}}_{2\,\infty}\cap L^\infty}\|u(t)\|_{H^s}dt.$$

En combinant la proposition 2.3 et la remarque 1.7 de [7], on aura

$$\Big\|(1+a)B\cdot\nabla B\Big\|_{\widetilde{L}^1_T(H^s)}+\Big\|a\nabla\frac{B^2}{2}\Big\|_{\widetilde{L}^1_T(H^s)}\lesssim\big(1+\|a\|_{\widetilde{L}^\infty_T(H^{\frac32+\alpha})}\big)\int_0^T\|B(t)\|_{H^s}\|\nabla B(t)\|_{H^{\frac32}\cap L^\infty}dt.$$

Pour les termes de pression, on utilise le lemme 2.1 [1], la proposition 1.4 et la remarque 1.7 de [7], aboutissant à

$$\|T_{\nabla a}\Pi\|_{\widetilde{L}^1_T(H^s)}\lesssim\|\nabla a\|_{\widetilde{L}^\infty_T(H^{\frac12+\alpha})}\|\nabla\Pi\|_{\widetilde{L}^1_T(H^{s-\alpha})},$$
$$\|T'_{\nabla\Pi}a\|_{\widetilde{L}^1_T(H^s)}\lesssim\|a\|_{\widetilde{L}^\infty_T(H^{\frac32+\alpha})}\|\nabla\Pi\|_{\widetilde{L}^1_T(H^{s-\alpha})}.$$

Pour estimer $\nabla\Pi$, on applique l'opérateur de divergence au système vérifié par u et on utilise le fait que $\mathrm{div}(v\cdot\nabla u)=\mathrm{div}(u\cdot\nabla v)$. On trouve

$$\mathrm{div}\big((1{+}a)\nabla\Pi\big)=\mathrm{div}\,G\quad\text{où}\quad G\overset{déf}{=}g-T_{\nabla u}v-T'_{\nabla v}u+(1{+}a)\mathrm{div}\big(\widetilde{\mu}(a)\mathcal{M}\big)+\big(1{+}a\big)\big(B\cdot\nabla B-\nabla\frac{B^2}{2}\big).$$

En appliquant la proposition A.5 de [7] on aura

$$\underline{a}\|\nabla\Pi\|_{\widetilde{L}^1_T(H^{s-\alpha})}\lesssim\mathcal{A}_T\|\mathcal{Q}G\|_{\widetilde{L}^1_T(H^{s-\alpha})},\quad\text{avec}\quad\mathcal{A}_T\overset{déf}{=}1+\underline{a}^{-1}\|\nabla a\|_{\widetilde{L}^\infty_T(H^{\frac12+\alpha})}.$$

En faisant appel à la décomposition de J.-M. Bony , on montre facilement que

$$\Big\|T_{\nabla u}v+T'_{\nabla v}u\Big\|_{\widetilde{L}^1_T(H^s)}\lesssim\int_0^T\|\nabla v(t)\|_{B^{\frac32}_{2,\infty}\cap L^\infty}\|u(t)\|_{H^s}dt.$$

Ainsi, la proposition 2.3, la remarque 1.7 de [7] et le lemme 2.3 [1] permettent d'avoir,

$$\begin{aligned}\Big\|(1+a)\mathrm{div}\big(\widetilde{\mu}(a)\mathcal{M}\big)\Big\|_{\widetilde{L}^1_T(H^{s-\alpha})}&\lesssim\Big(1+\|a\|_{\widetilde{L}^\infty_T(H^{\frac32+\alpha})}\Big)\Big\|\widetilde{\mu}(a)\mathcal{M}\Big\|_{\widetilde{L}^1_T(H^{s+1-\alpha})}\\&\lesssim\Big(1+\|a\|_{\widetilde{L}^\infty_T(H^{\frac32+\alpha})}\Big)\Big(\|\widetilde{\mu}(a)-\mu^1\|_{\widetilde{L}^\infty_T(H^{\frac32+\alpha})}+\mu^1\Big)\|u\|_{\widetilde{L}^1_T(H^{s+2-\alpha})}\\&\lesssim\Big(1+\|a\|_{\widetilde{L}^\infty_T(H^{\frac32+\alpha})}\Big)^2\|u\|_{\widetilde{L}^1_T(H^{s+2-\alpha})}\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\Big\|(1+a)\big(B\cdot\nabla B-\nabla\frac{B^2}{2}\big)\Big\|_{\widetilde{L}^1_T(H^{s-\alpha})}&\lesssim\Big(1+\|a\|_{\widetilde{L}^\infty_T(H^{\frac32+\alpha})}\Big)\Big\|B\cdot\nabla B-\nabla\frac{B^2}{2}\Big\|_{\widetilde{L}^1_T(H^{s-\alpha})}\\&\lesssim\Big(1+\|a\|_{\widetilde{L}^\infty_T(H^{\frac32+\alpha})}\Big)\int_0^T\|B(t)\|_{H^{s-\alpha}}\|\nabla B(t)\|_{H^{\frac32}\cap L^\infty}dt.\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}\|T_{\nabla a}\Pi\|_{\widetilde{L}^1_T(H^s)}+\|T'_{\nabla\Pi}a\|_{\widetilde{L}^1_T(H^s)}\lesssim\mathcal{A}_T\Big\{&\|g\|_{\widetilde{L}^1_T(H^s)}+\int_0^T\|\nabla v(t)\|_{B^{\frac32}_{2,\infty}\cap L^\infty}\|u(t)\|_{H^s}dt\\&+\Big(1+\|a\|_{\widetilde{L}^\infty_T(H^{s+1})}\Big)^2\Big(\|u\|_{\widetilde{L}^1_T(H^{s+2-\alpha})}+\int_0^T\|B(t)\|_{H^{s-\alpha}}\|\nabla B(t)\|_{H^{\frac32}\cap L^\infty}dt\Big)\Big\}.\end{aligned}$$

En conséquence

$$\|u\|_{\widetilde{L}^\infty_T(H^s)}+\overline{\mu}\|u\|_{\widetilde{L}^1_T(H^{s+2})}\lesssim\|u_0\|_{H^s}+\mathcal{H}_T\Big\{\|g\|_{\widetilde{L}^1_T(H^s)}+\int_0^T\|u(t)\|_{H^s}\|\nabla v(t)\|_{B^{\frac32}_{2\infty}\cap L^\infty}dt$$
$$+\mathcal{H}_T{}^{[s+1]+3}\Big(\|u\|_{\widetilde{L}^1_T(H^{s+2-\alpha})}+\int_0^T\|B(t)\|_{H^s}\|\nabla B(t)\|_{H^{\frac32}\cap L^\infty}dt\Big)\Big\},$$

avec $\mathcal{H}_T=1+\|a\|_{\widetilde{L}^\infty_T(H^{s+1})}$. A ce stade on applique le lemme de Gronwall qui donne

$$\|u\|_{\widetilde{L}^\infty_T(H^s)}+\overline{\mu}\|u\|_{\widetilde{L}^1_T(H^{s+2})}\le Ce^{C\mathcal{H}_T\int_0^T\|\nabla v(t)\|_{B^{\frac32}_{2\infty}\cap L^\infty}dt}\Big\{\|u_0\|_{H^s}+\mathcal{H}_T\|g\|_{\widetilde{L}^1_T(H^s)}$$
$$+\mathcal{H}_T{}^{[s+1]+4}\Big(\|u\|_{\widetilde{L}^1_T(H^{s+2-\alpha})}+\int_0^T\|B(t)\|_{H^s}\|\nabla B(t)\|_{H^{\frac32}\cap L^\infty}dt\Big)\Big\}.\tag{3.2}$$

Pour conclure la démonstration de la proposition il suffit d'interpoler avec l'estimation d'énergie suivante.

Lemme 3.1. *Soit $(\rho,u,\nabla\Pi,B)$ une solution sur $[0,T]$ du système suivant*

$$\begin{cases}\partial_t\rho+v\cdot\nabla\rho=0\\ \rho\big(\partial_t u+v\cdot\nabla u\big)+\nabla\Big(\Pi+\frac{B^2}{2}\Big)-2\,\mathrm{div}\big(\mu(\rho)\mathcal{M}\big)=\rho f+B\cdot\nabla B\\ \partial_t B+\mathrm{rot}\Big(\widetilde{\sigma}(a)\mathrm{rot}\,B\Big)=B\cdot\nabla u-u\cdot\nabla B\\ \mathrm{div}\,u=\mathrm{div}\,B=0\\ (\rho,u,B)_{|t=0}=(\rho_0,u_0,B_0),\end{cases}$$

avec $0<\underline{\mu}\le\mu$, $0<\underline{\sigma}\le\widetilde{\sigma}$ et v un champ de vecteurs régulier à divergence nulle. Alors pour tout $t\in[0,T]$ on a

$$\|\rho(t)\|_{L^p}\le\|\rho_0\|_{L^p};\quad\forall p\in[1,\infty],$$
$$\|(\sqrt{\rho}u)(t)\|_{L^2}+\|B(t)\|_{L^2}+\underline{\mu}\|\nabla u\|_{L^2_t(L^2)}+\underline{\sigma}\|\mathrm{rot}\,B\|_{L^2_t(L^2)}\lesssim\|\sqrt{\rho_0}u_0\|_{L^2}$$
$$+\|B_0\|_{L^2}+\int_0^t\|(\sqrt{\rho}f)(\tau)\|_{L^2}d\tau.$$

Démonstration. Nous avons par une simple intégration par parties,

$$2\Big(-\mathrm{div}\big(\mu(\rho)\mathcal{M}\big)|u\Big)=\int_{\mathbb{R}^3}\mu(\rho)\big[(\nabla u\cdot\nabla+{}^t\nabla u\cdot\nabla)\cdot u\big]\,dx\ge2\underline{\mu}\|\mathcal{M}\|^2_{L^2}.$$

De même, on a

$$2\|\mathcal{M}\|^2_{L^2}=\|\nabla u\|^2_{L^2}.$$

Ainsi en multipliant la deuxième équation du système par u et en faisant des intégrations par parties, on obtient

$$\frac12\frac{d}{dt}\|\sqrt{\rho}u\|^2_{L^2}+\underline{\mu}\|\nabla u\|^2_{L^2}\le\|\sqrt{\rho}f\|_{L^2}\|\sqrt{\rho}u\|_{L^2}+\int_{\mathbb{R}^3}\big[(B\cdot\nabla)B\big]\cdot u\,dx.$$

Pour estimer la fonction B dans L^2, on utilise l'identité $\mathrm{rot}(\mathrm{rot}\, B) = -\Delta B$ qui est valable car $\mathrm{div}\, B = 0$. On obtient

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|B\|_{L^2}^2 + \underline{\sigma}\Big\|\mathrm{rot}\, B\Big\|_{L^2}^2 \leq \int_{\mathbb{R}^3}[(B\cdot\nabla)u]\cdot B\, dx = -\int_{\mathbb{R}^3}[(B\cdot\nabla)B]\cdot u\, dx.$$

Ainsi en combinant ces deux estimations on parvient à,

$$\frac{d}{dt}\Big(\|\sqrt{\rho}u\|_{L^2}^2 + \|B\|_{L^2}^2\Big) + 2\underline{\mu}\|\nabla u\|_{L^2}^2 + 2\underline{\sigma}\Big\|\mathrm{rot}\, B\Big\|_{L^2}^2 \leq 2\|\sqrt{\rho}f\|_{L^2}\|\sqrt{\rho}u\|_{L^2}.$$

Pour conclure il suffit d'utiliser le lemme de Gronwall. ■

La suite de la démonstration est standard. On utilise un schéma itératif relevant de la méthode de Friedrich's. Ensuite on se sert des estimations a priori qui permettent de montrer que le système (M) est localement bien posé.

4 Démonstration du théorème 1.2

Nous allons procéder en deux temps. Nous démontrons en premier lieu l'unicité qui est principalement basée sur une estimation logarithmique et un lemme de type Gronwall, dit d'Osgood, qui est bien adapté à de telles estimations. La deuxième partie est consacrée à la preuve de l'existence de solutions.

4.1 Unicité

Soit $1 \leq p \leq 3$. On se donne deux solutions du système $\widetilde{MHD}$, notées $(a^i, u^i, \nabla\Pi^i)$ pour $1 \leq i \leq 2$, et appartenant à $L^\infty_T(\dot{B}^{\frac{3}{p}}_{p\infty}) \times L^\infty_T(\dot{B}^{\frac{3}{p}-1}_{p1})$. Posons

$$(\mathcal{M}^i, \delta\mathcal{M}) \overset{déf}{=} \big(\frac{1}{2}(\nabla u^i + {}^t\nabla u^i), \mathcal{M}^2 - \mathcal{M}^1\big);\ (\delta a, \delta u, \nabla\delta\Pi, \delta B) \overset{déf}{=} (a^2 - a^1, u^2 - u^1, \nabla\Pi^2 - \nabla\Pi^1, B^2 - B^1).$$

On vérifie aisément que

$$\begin{cases} \partial_t\delta a + u^2\cdot\nabla\delta a = -\delta u\cdot\nabla a^1 \\ \partial_t\delta u + u^2\cdot\nabla\delta u - \mu^1\Delta\delta u + \nabla\delta\Pi = H(a^i, u^i, \nabla\Pi^i, B^i) \\ \partial_t\delta B + u^2\cdot\nabla\delta B - \sigma^1\Delta\delta B = G(a^i, u^i, B^i) \\ \mathrm{div}\,\delta u = \mathrm{div}\,\delta B = 0, \end{cases}$$

où

$$\begin{aligned} H(a^i, u^i, \nabla\Pi^i, B^i) &= -\delta u\cdot\nabla u^1 + a^1(\mu^1\Delta\delta u - \nabla\delta\Pi) + \delta a(\mu^1\Delta u^2 - \nabla\Pi^2) \\ &+ 2\,\mathrm{div}\Big[\big(\widetilde{\mu}(a^1) - \mu^1\big)\delta\mathcal{M}\Big] + 2\,\delta a\,\mathrm{div}\Big[\big(\widetilde{\mu}(a^2) - \mu^1\big)\mathcal{M}^2\Big] + 2\,a^1\mathrm{div}\Big[\big(\widetilde{\mu}(a^1) - \mu^1\big)\delta\mathcal{M}\Big] \\ &+ 2\,\mathrm{div}\Big[\big(\widetilde{\mu}(a^2) - \widetilde{\mu}(a^1)\big)\mathcal{M}^2\Big] + 2\,a^1\mathrm{div}\Big[\big(\widetilde{\mu}(a^2) - \widetilde{\mu}(a^1)\big)\mathcal{M}^2\Big] - \frac{1}{2}\delta a\nabla(B^2)^2 \\ &- (1 + a^1)\sum_{j=1}^{3} B_j^2\nabla\delta B_j + \delta B_j\nabla B_j^1 + (1 + a^1)\big(B^2\cdot\nabla\delta B + \delta B\cdot\nabla B^1\big) + \delta a B^2\cdot\nabla B^2 \end{aligned}$$

et

$$G(a^i,u^i,B^i) = B^2\cdot\nabla\delta u + \delta B\cdot\nabla u^1 - \delta u\cdot\nabla B^1 - \mathrm{rot}\Big\{\big(\widetilde{\sigma}(a^2)-\widetilde{\sigma}(a^1)\big)\mathrm{rot}\,B^2\Big\}$$
$$- \mathrm{rot}\Big\{\big(\widetilde{\sigma}(a^1)-\sigma^1\big)\mathrm{rot}\,\delta B\Big\}.$$

Nous allons distinguer dans notre discussion deux cas : le premier traite de la situation où $1\le p<3$, alors que le deuxième concerne $p=3$. La distinction apparaît au niveau des lois de produit dont on fait usage.

Cas où $1 \le p < 3$.

Nous avons établi le résultat suivant.

Proposition 4.1. *Soient $(a^i,u^i,\nabla\Pi^i,B^i)$, avec $i\in\{1,2\}$, deux solutions de $(\widetilde{MHD})$ ayant les mêmes données initiales $a_0\in\dot B^{\frac3p}_{p\,\infty}(\mathbb{R}^3)\cap L^\infty(\mathbb{R}^3)$, $u_0,\,B_0\in\dot B^{\frac3p-1}_{p\,1}(\mathbb{R}^3)$ avec $\mathrm{div}\,u_0=\mathrm{div}\,B_0=0$ et un terme de force extérieure $f\in L^1_{loc}([0,T^*);\,\dot B^{\frac3p-1}_{p\,1}(\mathbb{R}^3))$ tel que $\mathcal{Q}f$ appartienne à $L^1_{loc}([0,T^\star);\,\dot B^{\frac3p-2}_{p\,1}(\mathbb{R}^3))$. Supposons que pour $i=1,2$ on ait*

$$\begin{aligned}
a^i &\in C([0,T^\star);\,\dot B^{\frac3p}_{p\,\infty})\cap L^\infty(0,T^\star;\,L^\infty),\\
u^i &\in C([0,T^\star);\,\dot B^{\frac3p-1}_{p\,1})\cap L^1_{Loc}([0,T^\star);\,\dot B^{\frac3p+1}_{p\,1}),\\
B^i &\in C([0,T^\star);\,\dot B^{\frac3p-1}_{p\,1})\cap L^1_{Loc}([0,T^\star);\,\dot B^{\frac3p+1}_{p\,1}),\\
\nabla\Pi^i &\in L^1_{Loc}([0,T^\star);\,\dot B^{\frac3p-1}_{p\,1}).
\end{aligned}$$

Il existe une constante c strictement positive telle que si l'on a

$$\|a^1\|_{L^\infty_{T^\star}(\dot B^{\frac3p}_{p\,\infty}\cap L^\infty)}\le c,$$

alors $(a^2,u^2,\nabla\Pi^2,B^2)=(a^1,u^1,\nabla\Pi^1,B^1)$.

Démonstration. La première étape de la preuve consiste à montrer que $(\delta a,\delta u,\nabla\delta\Pi,\delta B)\in F^p_T$, où

$$F^p_T = C\big([0,T];\,\dot B^{\frac3p-1}_{p\,\infty}\big)\times\big(L^1_T(\dot B^{\frac3p}_{p\,1})\cap C\big([0,T];\,\dot B^{\frac3p-2}_{p\,1}\big)\big)\times\big(L^1_T(\dot B^{\frac3p-2}_{p\,1})\big)$$
$$\times\, L^1_T\big(\dot B^{\frac3p}_{p\,1}\big)\cap C\big([0,T];\,\dot B^{\frac3p-2}_{p\,1}\big),$$

On définit pour tout $t\le T$ la quantité

$$\gamma(t)\overset{d\acute{e}f}{=}\|(\delta a,\delta u,\nabla\delta\Pi,\delta B)\|_{F^p_t}\overset{d\acute{e}f}{=}\|\delta a\|_{L^\infty_t(\dot B^{\frac3p-1}_{p\,\infty})}+\|\delta u\|_{L^\infty_t(\dot B^{\frac3p-2}_{p\,1})}+\mu^1\|\delta u\|_{L^1_t(\dot B^{\frac3p}_{p\,1})}$$
$$+\|\nabla\delta\Pi\|_{L^1_t(\dot B^{\frac3p-2}_{p\,1})}+\|\delta B\|_{L^\infty_t(\dot B^{\frac3p-2}_{p\,1})}+\sigma^1\|\delta B\|_{L^1_t(\dot B^{\frac3p}_{p\,1})}.$$

Pour démontrer l'appartenance à l'espace F^p_T, il suffit d'avoir $(a^i-a_0,\overline{u}^i,\nabla\overline{\Pi}^i,\overline{B}^i)\in F^p_T$, où l'on a définit $(\overline{u}^i,\nabla\overline{\Pi}^i,\overline{B}^i)$ par $u^i=u_L+\overline{u}^i$, $\nabla\Pi^i=\nabla\Pi^i_L+\nabla\overline{\Pi}^i$ et $B^i=B_L+\overline{B}^i$. Les quantités

u_L, $\nabla\Pi_L$ et B_L sont à leur tour définies par le système suivant.

$$\begin{cases} \partial_t u_L - \mu^1 \Delta u_L + \nabla\Pi_L = f \\ \partial_t B_L - \sigma^1 \Delta B_L = 0 \\ \operatorname{div} u_L = \operatorname{div} B_L = 0 \\ (u_L, B_L)_{|t=0} = (u_0, B_0). \end{cases}$$

En effet nous avons par la proposition 2.1 de [4] que u_L et B_L sont à coefficients dans l'espace $C([0,T];\, \dot{B}_{p\,1}^{\frac{3}{p}-1}) \cap L^1(0,T;\, \dot{B}_{p\,1}^{\frac{3}{p}+1})$ et $\nabla\Pi_L \in L^1(0,T;\, \dot{B}_{p\,1}^{\frac{3}{p}-1})$. Les quantités $(\overline{u}^i, \nabla\overline{\Pi}^i, \overline{B}^i)$ vérifient

$$(\mathrm{MHD}_{\mathrm{mod}}) \begin{cases} \partial_t \overline{u}^i - \mu^1 \Delta \overline{u}^i + \nabla\overline{\Pi}^i = K(a^i, u^i, \nabla\Pi^i, B^i) \\ \partial_t \overline{B}^i - \sigma^1 \Delta \overline{B}^i = L(u^i, B^i) \\ \operatorname{div} \overline{u}^i = \operatorname{div} \overline{B}^i = 0 \\ (\overline{u}^i, \overline{B}^i)_{|t=0} = (0,0), \end{cases}$$

où

$$\begin{aligned} K(a^i, u^i, \nabla\Pi^i, B^i) = &-u^i \cdot \nabla u^i + a^i\big(\mu^1 \Delta u^i - \nabla\Pi^i\big) + 2(1+a^i)\mathrm{div}\Big[\big(\widetilde{\mu}(a^i) - \mu^1\big)\mathcal{M}^i\Big] \\ &- \frac{1}{2}(1+a^i)\nabla {B^i}^2 + (1+a^i) B^i \cdot \nabla B^i \end{aligned}$$

et

$$L(u^i, B^i) = B^i \cdot \nabla u^i - u^i \cdot \nabla B^i - \mathrm{rot}\Big\{\big(\widetilde{\sigma}(a^i) - \sigma^1\big)\mathrm{rot}\, B^i\Big\}.$$

On applique à la première équation du système $(\mathrm{MHD}_{\mathrm{mod}})$ l'opérateur $\mathcal{P}$ et l'on obtient

$$\partial_t \overline{u}^i - \mu^1 \Delta \overline{u}^i = \mathcal{P}\Big(K(a^i, u^i, \nabla\Pi^i, B^i)\Big). \tag{4.1}$$

De même l'opérateur de divergence appliqué à cette même équation donne

$$\begin{aligned} \nabla\Pi^i = \mathcal{R}\mathcal{Q}f + \mathcal{R}(a^i \nabla\Pi^i) - \mathcal{R}\Big(u^i \cdot \nabla u^i + \frac{1}{2}(1+a^i)\nabla {B^i}^2 - (1+a^i) B^i \cdot \nabla B^i\Big) \\ + \mathcal{R}\Big(\mu^1 (a^i \Delta u^i) + 2(1+a^i)\mathrm{div}\Big[\big(\widetilde{\mu}(a^i) - \mu^1\big)\mathcal{M}^i\Big), \end{aligned} \tag{4.2}$$

avec $\mathcal{R} = \nabla(-\Delta)^{-1}\mathrm{div}$, qui est un opérateur de Riesz. En combinant l'inégalité (2.9) avec les hypothèses de départ sur les solutions on trouve u^i, $B^i \in L^2_T(\dot{B}_{p\,1}^{\frac{3}{p}})$. D'un autre côté l'inégalité (2.5) donne pour $p < 3$

$$u^i \cdot \nabla u^i,\ (1+a^i) B^i \cdot \nabla B^i \quad \text{et} \quad (1+a^i)\nabla {B^i}^2 \in L^2_T(\dot{B}_{p\,1}^{\frac{3}{p}-2}).$$

Par ailleurs en utilisant les inégalités (2.9) et (2.5), on obtient $a^i \Delta u^i \in L^2_T(\dot{B}_{p\,1}^{\frac{3}{p}-2})$. D'autre part, nous avons d'après [1] (dans la partie consacrée a l'unicité),

$$\Big\|(1+a^i)\mathrm{div}\Big[\big(\widetilde{\mu}(a^i)-\mu^1\big)\mathcal{M}^i\Big]\Big\|_{L^2_T(\dot B^{\frac{3}{p}-2}_{p\,1})} \lesssim \Big(1+\|a^i\|_{L^\infty_T(\dot B^{\frac{3}{p}}_{p\,\infty}\cap L^\infty)}\Big)\|a^i\|_{L^\infty_T(\dot B^{\frac{3}{p}}_{p\,\infty}\cap L^\infty)}\|u^i\|_{L^2_T(\dot B^{\frac{3}{p}}_{p\,1})}.$$

Ainsi nous concluons que le membre de gauche de l'égalité (4.2) appartient à $L^2_T(\dot B^{\frac{3}{p}-2}_{p\,1})$. D'autre part, on a l'inégalité (2.5)

$$\|a^i\nabla\Pi^i\|_{L^2_T\dot B^{\frac{3}{p}-2}_{p\,1}} \leq \|a^i\|_{L^\infty_T(\dot B^{\frac{3}{p}}_{p\,\infty}\cap L^\infty)}\|\nabla\Pi^i\|_{L^2_T\dot B^{\frac{3}{p}-2}_{p\,1}}.$$

En conséquence, la condition de petitesse sur a^i et le fait que $\mathcal{Q}f\in L^1_{loc}([0,T^\star);\,\dot B^{\frac{3}{p}-2}_{p\,1})$ donnent en vertu de (4.2), $\nabla\Pi^i\in L^1_T\,\dot B^{\frac{3}{p}-2}_{p\,1}$. Ceci permet d'obtenir à partir des hypothèses faites sur a^i et de l'inégalité (2.5) que $a^i\,\nabla\Pi^i\in L^1_T(\dot B^{\frac{3}{p}-2}_{p\,1})$. Donc on conclut que $K(a^i,u^i,\nabla\Pi^i,B^i)$ appartient à $L^1_T(\dot B^{\frac{3}{p}-2}_{p\,1})$. De manière analogue nous aurons $L(u^i,B^i)\in L^1_T(\dot B^{\frac{3}{p}-2}_{p\,1})$. Or l'opérateur $\mathcal{P}$ est continu sur les espaces $\dot B^s_{p\,r}$, donc le membre de gauche de l'égalité (4.1) appartient à $L^1_T(\dot B^{\frac{3}{p}-2}_{p\,1})$. Par suite, en appliquant la proposition 2.1 de [4], nous obtenons $\overline{u}^i,\overline{B}^i\in L^1_T(\dot B^{\frac{3}{p}}_{p\,1})\cap C([0,T];\,\dot B^{\frac{3}{p}-2}_{p\,1})$ et $\nabla\overline{\Pi}^i\in L^1_T(\dot B^{\frac{3}{p}-2}_{p\,1})$. En ce qui concerne a^i, nous écrivons $\partial_t a^i=-u^i\cdot\nabla a^i$. Ainsi les lois de produit (2.5) permettent d'avoir $\partial_t a^i$ appartient à $L^2_T(\dot B^{\frac{3}{p}-1}_{p\,\infty})$, ce qui donne par l'inégalité de Cauchy-Schwarz que $(a^i-a_0)\in C([0,T];\,\dot B^{\frac{3}{p}-1}_{p\,\infty})$. Finalement on a $(\delta a,\delta u,\nabla\delta\Pi,\delta B)\in F^p_T$.

Pour estimer $(\delta a,\delta u,\nabla\delta\Pi,\delta B)$ dans l'espace F^p_T, nous allons utiliser les propositions suivantes, qui nous donnent une estimation de la solution de l'équation de transport et de celle de l'équation de Stokes non stationnaire linéaire (voir propositions 3.2 et 3.3 [1]).

Proposition 4.2. *Soient $r\in[1,+\infty]$, $p\in[1,+\infty]$ et $s\in\mathbb{R}$ tel que $|s|<1+\frac{3}{p}$. Soit v un champ de vecteurs à divergence nulle tel que ∇v soit à coefficients dans $L^1(0,T;\,\dot B^{\frac{3}{p}}_{p\,r}\cap L^\infty)$. Supposons que $f_0\in\dot B^s_{p\,r}$, $F\in L^1(0,T;\,\dot B^s_{p\,r})$. Soit $f\in L^\infty(0,T;\,\dot B^s_{p\,r})\cap C([0,T];\,\mathcal{S}')$ une solution du système suivant*

$$(\mathcal{T})\qquad\left\{\begin{array}{l}\partial_t f+\mathrm{div}(vf)=F\\ f_{|t=0}=f_0.\end{array}\right.$$

Alors il existe une constante C strictement positive dépendant de s telle que

$$\|f\|_{\widetilde L^\infty_T(\dot B^s_{p\,r})}\leq e^{CV(t)}\Big(\|f_0\|_{\dot B^s_{p\,r}}+\int_0^t e^{-CV(\tau)}\|F(\tau)\|_{\dot B^s_{p\,r}}d\tau\Big),\tag{4.3}$$

où $V(t)=\int_0^t\|\nabla v(\tau)\|_{\dot B^{\frac{3}{p}}_{p\,r}\cap L^\infty}d\tau$. De plus $f\in C([0,T];\,\dot B^s_{p\,r})$ si $r<\infty$.

Proposition 4.3. *Soient s tel que $|s|<\frac{3}{p}$ si $2\leq p<\infty$, $-\frac{3}{p'}<s<\frac{3}{p}$ si $1<p\leq 2$, $r\in[1,+\infty]$, u_0 un champ de vecteurs à divergence nulle avec coefficients dans $\dot B^s_{p\,r}$ et g un*

champ de vecteurs à coefficients dans $\widetilde{L}^1_T(\dot{B}^s_{p\,r})$. *Soient* u *et* v *deux champs de vecteurs à divergence nulle tels que* ∇v *soit à coefficients dans* $L^1(0,T;\,\dot{B}^{\frac{3}{p}}_{p\,r}\cap L^\infty)$ *(resp.* $L^1(0,T;\,\dot{B}^{\frac{3}{p}}_{p\,1})$*) et* $u\in C([0,T;\,\dot{B}^s_{p\,r})\cap\widetilde{L}^1_T(\dot{B}^{s+2}_{p\,r})$ *soit une solution du système de Stokes non stationnaire*

$$
\text{(L)}\qquad \begin{cases}\partial_t u+v\cdot\nabla u-\nu\Delta u+\nabla\Pi=g\\ \operatorname{div}u=0\\ u_{|t=0}=u_0.\end{cases}
$$

Alors il existe C *dépendant de* s *tel que* u *vérifie l'estimation suivante*

$$
\|u\|_{\widetilde{L}^\infty_T(\dot{B}^s_{p\,r})}+\nu\|u\|_{\widetilde{L}^1_T(\dot{B}^{s+2}_{p\,r})}+\|\nabla\Pi\|_{\widetilde{L}^1_T(\dot{B}^s_{p\,r})}\le e^{C\|\nabla v\|_{L^1_T(\dot{B}^{\frac{3}{p}}_{p\,r}\cap L^\infty)}}\Big\{\|u_0\|_{\dot{B}^s_{p\,r}}+C\|g\|_{\widetilde{L}^1_T(\dot{B}^s_{p\,r})}\Big\}. \tag{4.4}
$$

Pour $p\ge 2$, *on a de plus l'estimation suivante :*

$$
\|u\|_{\widetilde{L}^\infty_T(\dot{B}^{-\frac{3}{p}}_{p\,\infty})}+\nu\|u\|_{\widetilde{L}^1_T(\dot{B}^{2-\frac{3}{p}}_{p\,\infty})}+\|\nabla\Pi\|_{\widetilde{L}^1_T(\dot{B}^{-\frac{3}{p}}_{p\,\infty})}\le e^{C\|\nabla v\|_{L^1_T(\dot{B}^{\frac{3}{p}}_{p\,1})}}\Big\{\|u_0\|_{\dot{B}^{-\frac{3}{p}}_{p\,\infty}}+C\|g\|_{\widetilde{L}^1_T(\dot{B}^{-\frac{3}{p}}_{p\,\infty})}\Big\}. \tag{4.5}
$$

En se servant de ces propositions on montre successivement que pour tout $t\le T$

$$
\|\delta a\|_{L^\infty_t(\dot{B}^{\frac{3}{p}-1}_{p\,\infty})}\le C\exp\Big(C\|\nabla u^2\|_{L^1_t(\dot{B}^{\frac{3}{p}}_{p\,\infty}\cap L^\infty)}\Big)\|\delta u\|_{L^1_t(\dot{B}^{\frac{3}{p}}_{p\,1})}\|\nabla a^1\|_{L^\infty_t(\dot{B}^{\frac{3}{p}-1}_{p\,\infty})},
$$

$$
\|\delta u\|_{L^\infty_t(\dot{B}^{\frac{3}{p}-2}_{p\,1})}+\mu^1\|\delta u\|_{L^1_t(\dot{B}^{\frac{3}{p}}_{p\,1})}+\|\nabla\delta\Pi\|_{L^1_t(\dot{B}^{\frac{3}{p}-2}_{p\,1})}\lesssim e^{C\|\nabla u^2\|_{L^1_t(\dot{B}^{\frac{3}{p}}_{p\,1})}}\|H(a^i,u^i,\nabla\Pi^i,B^i)\|_{L^1_t(\dot{B}^{\frac{3}{p}-2}_{p\,1})}
$$

et

$$
\|\delta B\|_{L^\infty_t(\dot{B}^{\frac{3}{p}-2}_{p\,1})}+\sigma^1\|\delta B\|_{L^1_t(\dot{B}^{\frac{3}{p}}_{p\,1})}\lesssim e^{C\|\nabla u^2\|_{L^1_t(\dot{B}^{\frac{3}{p}}_{p\,1})}}\|G(a^i,u^i,B^i)\|_{L^1_t(\dot{B}^{\frac{3}{p}-2}_{p\,1})}.
$$

Nous envisageons maintenant d'estimer $H(a^i,u^i,\nabla\Pi^i,B^i)$. Les inégalités (2.4) et (2.5) donnent pour $p<3$,

$$
\begin{aligned}
\Big\|-\delta u\cdot\nabla u^1+a^1(\mu^1\Delta\delta u-\nabla\delta\Pi)+\delta a(\mu^1\Delta u^2-\nabla\Pi^2)\Big\|_{L^1_T(\dot{B}^{\frac{3}{p}-2}_{p\,1})}&\lesssim\|\delta u\|_{L^\infty_T(\dot{B}^{\frac{3}{p}-2}_{p\,1})}\\
\times\|\nabla u^1\|_{L^1_T(\dot{B}^{\frac{3}{p}}_{p\,1})}+\|a^1\|_{L^\infty_T(\dot{B}^{\frac{3}{p}}_{p\,\infty}\cap L^\infty)}&\Big(\|\Delta\delta u\|_{L^1_T(\dot{B}^{\frac{3}{p}-2}_{p\,1})}+\|\nabla\delta\Pi\|_{L^1_T(\dot{B}^{\frac{3}{p}-2}_{p\,1})}\Big)\\
+\|\delta a\|_{L^\infty_T(\dot{B}^{\frac{3}{p}-1}_{p\,\infty})}&\Big(\|\Delta u^2\|_{L^1_T(\dot{B}^{\frac{3}{p}-1}_{p\,1})}+\|\nabla\Pi^2\|_{L^1_T(\dot{B}^{\frac{3}{p}-1}_{p\,1})}\Big).
\end{aligned}
$$

Une estimation établie dans [1] montre que

$$
\Big\|\operatorname{div}\Big[\big(\widetilde{\mu}(a^1)-\mu^1\big)\delta\mathcal{M}\Big]+a^1\operatorname{div}\Big[\big(\widetilde{\mu}(a^1)-\mu^1\big)\delta\mathcal{M}\Big]\Big\|_{L^1_T(\dot{B}^{\frac{3}{p}-2}_{p\,1})}\lesssim\|a^1\|_{L^\infty_T(\dot{B}^{\frac{3}{p}}_{p\,\infty}\cap L^\infty)}\|\delta u\|_{L^1_T(\dot{B}^{\frac{3}{p}}_{p\,1})}
$$

et

$$
\begin{aligned}
\Big\|\operatorname{div}\big[\big(\widetilde{\mu}(a^2)-\widetilde{\mu}(a^1)\big)\mathcal{M}^2\big]\Big\|_{L^1_T(\dot{B}^{\frac{3}{p}-2}_{p\,1})}&\lesssim\int_0^T\Big\|\widetilde{\mu}(a^2)-\widetilde{\mu}(a^1)\Big\|_{\dot{B}^{\frac{3}{p}-1}_{p\,1}}\|\nabla u^2\|_{\dot{B}^{\frac{3}{p}}_{p\,1}}\,dt\\
&\lesssim\int_0^T\|\delta a\|_{\dot{B}^{\frac{3}{p}-1}_{p\,\infty}}\log\Big(e+\frac{\alpha(T)}{\|\delta a\|_{\dot{B}^{\frac{3}{p}-1}_{p\,\infty}}}\Big)\|u^2\|_{\dot{B}^{\frac{3}{p}+1}_{p\,1}}dt,
\end{aligned}
$$

avec $\alpha(T)$ une fonction croissante qui dépend des normes des solutions dans l'espace de résolution. En combinant l'inégalité (2.4) avec un résultat d'interpolation dans la variable du temps, on démontre que

$$\left\|\delta a\nabla B^{2^2}\right\|_{L^1_T(\dot B^{\frac{3}{p}-2}_{p\,1})} \lesssim \|\delta a\|_{L^\infty_T(\dot B^{\frac{3}{p}-1}_{p\,\infty})}\|B^{2^2}\|_{L^1_T(\dot B^{\frac{3}{p}}_{p\,1})} \lesssim \|\delta a\|_{L^\infty_T(\dot B^{\frac{3}{p}-1}_{p\,\infty})}\|B^2\|_{L^\infty_T(\dot B^{\frac{3}{p}-1}_{p\,1})}\|B^2\|_{L^1_T(\dot B^{\frac{3}{p}+1}_{p\,1})}.$$

En procédant de manière semblable, on trouve

$$\begin{aligned}\Big\|(1+a^1)\sum_{j=1}^3 B^2_j\cdot\nabla\delta B_j + \delta B_j\cdot\nabla B^1_j\Big\|_{L^1_T(\dot B^{\frac{3}{p}-2}_{p\,1})} &\lesssim \Big(1+\|a^1\|_{L^\infty_T(\dot B^{\frac{3}{p}}_{p\,1})}\Big)\Big(\sum_{j=1}^3\|B^2_j\cdot\nabla\delta B_j\|_{L^1_T(\dot B^{\frac{3}{p}-2}_{p\,1})}\\
&\quad+\sum_{j=1}^3\|\delta B_j\cdot\nabla B^1_j\|_{L^1_T(\dot B^{\frac{3}{p}-2}_{p\,1})}\Big)\\
&\lesssim \Big(\|B^2\|^{\frac12}_{L^1_T(\dot B^{\frac{3}{p}+1}_{p\,1})}\|B^2\|^{\frac12}_{L^\infty_T(\dot B^{\frac{3}{p}-1}_{p\,1})}+\|B^1\|_{L^1_T(\dot B^{\frac{3}{p}+1}_{p\,1})}\Big)\Big(\|\delta B\|_{L^\infty_T(\dot B^{\frac{3}{p}-2}_{p\,1})}+\|\delta B\|_{L^1_T(\dot B^{\frac{3}{p}}_{p\,1})}\Big).\end{aligned}$$

Comme $p<3$, alors les inégalités (2.4) et (2.5), impliquent

$$\|\delta a\, B^2\cdot\nabla B^2\|_{L^1_T(\dot B^{\frac{3}{p}-2}_{p\,1})} \lesssim \|\delta a\|_{L^\infty_T(\dot B^{\frac{3}{p}-1}_{p\,\infty})}\|B^2\|_{L^\infty_T(\dot B^{\frac{3}{p}-1}_{p\,1})}\|B^2\|_{L^1_T(\dot B^{\frac{3}{p}+1}_{p\,1})}.$$

En associant les inégalités précédentes aux lemmes 3.1 et 3.2 [1], on trouve

$$\begin{aligned}\|H(a^i,u^i,\nabla\Pi^i,B^i)\|_{L^1_T(\dot B^{\frac{3}{p}-2}_{p\,1})} &\lesssim \gamma(t)\Big\{\|(u^1,u^2)\|_{L^1_T(\dot B^{\frac{3}{p}+1}_{p\,1})}+\|\nabla\Pi^2\|_{L^1_T(\dot B^{\frac{3}{p}-1}_{p\,1})}\\
&+\|(B^1,B^2)\|_{L^\infty_T(\dot B^{\frac{3}{p}-1}_{p\,1})}\|(B^1,B^2)\|_{L^1_T(\dot B^{\frac{3}{p}+1}_{p\,1})}+\|(B^1,B^2)\|^{\frac12}_{L^1_T(\dot B^{\frac{3}{p}+1}_{p\,1})}\|(B^1,B^2)\|^{\frac12}_{L^\infty_T(\dot B^{\frac{3}{p}-1}_{p\,1})}\\
&+\|a^1\|_{L^\infty_T(\dot B^{\frac{3}{p}}_{p\,\infty}\cap L^\infty)}\Big\}+\int_0^T\|\delta a(t)\|_{\dot B^{\frac{3}{p}-1}_{p\,\infty}}\log\Big(e+\frac{\alpha(T)}{\|\delta a(t)\|_{\dot B^{\frac{3}{p}-1}_{p\,\infty}}}\Big)\|u^2\|_{\dot B^{\frac{3}{p}+1}_{p\,1}}dt.\end{aligned}$$

Comme la fonction $x\mapsto x\log(e+\alpha(T)x^{-1})$ est croissante sur $\mathbb{R}_+$, alors on aura

$$\begin{aligned}\|H(a^i,u^i,\nabla\Pi^i,B^i)\|_{L^1_T(\dot B^{\frac{3}{p}-2}_{p\,1})} &\lesssim \gamma(t)\Big(\|(u^1,u^2)\|_{L^1_T(\dot B^{\frac{3}{p}+1}_{p\,1})}+\|\nabla\Pi^2\|_{L^1_T(\dot B^{\frac{3}{p}-1}_{p\,1})}\\
&+\|(B^1,B^2)\|_{L^\infty_T(\dot B^{\frac{3}{p}-1}_{p\,1})}\|(B^1,B^2)\|_{L^1_T(\dot B^{\frac{3}{p}+1}_{p\,1})}+\|(B^1,B^2)\|^{\frac12}_{L^1_T(\dot B^{\frac{3}{p}+1}_{p\,1})}\|(B^1,B^2)\|^{\frac12}_{L^\infty_T(\dot B^{\frac{3}{p}-1}_{p\,1})}\\
&+\|a^1\|_{L^\infty_T(\dot B^{\frac{3}{p}}_{p\,\infty}\cap L^\infty)}\Big)+\int_0^T\gamma(t)\log\Big(e+\frac{\alpha(T)}{\gamma(t)}\Big)\|u^2\|_{\dot B^{\frac{3}{p}+1}_{p\,1}}dt.\end{aligned}$$

Il s'agit maintenant d'estimer $G(a^i,u^i,B^i)$. Nous avons par l'inégalité (2.5) et via un argument d'interpolation

$$\begin{aligned}\|B^2\cdot\nabla\delta u\|_{L^1_T(\dot B^{\frac{3}{p}-2}_{p\,1})} &\lesssim \|B^2\|_{L^2_T(\dot B^{\frac{3}{p}}_{p\,1})}\|\delta u\|_{L^2_T(\dot B^{\frac{3}{p}-1}_{p\,1})}\\
&\lesssim \|B^2\|^{\frac12}_{L^1_T(\dot B^{\frac{3}{p}+1}_{p\,1})}\|B^2\|^{\frac12}_{L^\infty_T(\dot B^{\frac{3}{p}-1}_{p\,1})}\Big(\|\delta u\|_{L^\infty_T(\dot B^{\frac{3}{p}-2}_{p\,1})}+\|\delta u\|_{L^1_T(\dot B^{\frac{3}{p}}_{p\,1})}\Big).\end{aligned}$$

De même, on a

$$\|\delta B\cdot\nabla u^1-\delta u\cdot\nabla B^1\|_{L^1_T(\dot B^{\frac3p-2}_{p\,1})}\lesssim\|\delta B\|_{L^\infty_T(\dot B^{\frac3p-2}_{p\,1})}\|u^1\|_{L^1_T(\dot B^{\frac3p+1}_{p\,1})}+\|\delta u\|_{L^\infty_T(\dot B^{\frac3p-2}_{p\,1})}\|B^1\|_{L^1_T(\dot B^{\frac3p+1}_{p\,1})}.$$

Afin d'estimer le dernier terme de G, on applique le lemme 2.4 de [1], l'inégalité (2.5) et la formule de Taylor,

$$\Big\|\mathrm{rot}\Big\{\big(\widetilde\sigma(a^1)-\sigma^1\big)\mathrm{rot}\,\delta B\Big\}\Big\|_{L^1_T(\dot B^{\frac3p-2}_{p\,1})}\lesssim\|a^1\|_{L^\infty_T(\dot B^{\frac3p}_{p\,\infty}\cap L^\infty)}\|\delta B\|_{L^1_T(\dot B^{\frac3p}_{p\,1})}.$$

Nous déduisons ainsi en vertu des inégalités précédentes et des lemmes 3.1 et 3.2 [1], tout en procédent comme pour l'estimation de H,

$$\begin{aligned}&\|G(a^i,u^i,\nabla\Pi^i,B^i)\|_{L^1_T(\dot B^{\frac3p-2}_{p\,1})}\lesssim\gamma(t)\Bigg(\|(u^1,u^2)\|_{L^1_T(\dot B^{\frac3p+1}_{p\,1})}+\|\nabla\Pi^2\|_{L^1_T(\dot B^{\frac3p-1}_{p\,1})}\\&\|(B^1,B^2)\|_{L^\infty_T(\dot B^{\frac3p-1}_{p\,1})}\|(B^1,B^2)\|_{L^1_T(\dot B^{\frac3p+1}_{p\,1})}+\|(B^1,B^2)\|^{\frac12}_{L^1_T(\dot B^{\frac3p+1}_{p\,1})}\|(B^1,B^2)\|^{\frac12}_{L^\infty_T(\dot B^{\frac3p-1}_{p\,1})}\\&+\|a^1\|_{L^\infty_T(\dot B^{\frac3p}_{p\,\infty}\cap L^\infty)}\Bigg)+\int_0^T\gamma(t)\log\Big(e+\frac{\alpha(T)}{\gamma(t)}\Big)\|B^2\|_{\dot B^{\frac3p+1}_{p\,1}}dt.\end{aligned}$$

Ainsi donc en appliquant la proposition 4.3, sachant que $\gamma(0)=0$, on trouve pour tout $t\le T$

$$\begin{aligned}\gamma(t)&\lesssim\gamma(t)\exp\{C\|\nabla u^2\|_{L^1_T(\dot B^{\frac3p}_{p\,1})}\}\Bigg(\|(u^1,u^2)\|_{L^1_T(\dot B^{\frac3p+1}_{p\,1})}+\|\nabla\Pi^2\|_{L^1_T(\dot B^{\frac3p-1}_{p\,1})}+\|a^1\|_{L^\infty_T(\dot B^{\frac3p}_{p\,\infty}\cap L^\infty)}\\&+\|(B^1,B^2)\|_{L^\infty_T(\dot B^{\frac3p-1}_{p\,1})}\|(B^1,B^2)\|_{L^1_T(\dot B^{\frac3p+1}_{p\,1})}+\|(B^1,B^2)\|^{\frac12}_{L^1_T(\dot B^{\frac3p+1}_{p\,1})}\|(B^1,B^2)\|^{\frac12}_{L^\infty_T(\dot B^{\frac3p-1}_{p\,1})}\Bigg)\\&+\int_0^T\gamma(t)\log\Big(e+\frac{\alpha(T)}{\gamma(t)}\Big)\|(u^2,B^2)\|_{\dot B^{\frac3p+1}_{p\,1}}dt.\end{aligned}$$

On choisit un temps $T_1\le T$ petit de manière à ce que on ait, pour une constante c aussi petite que l'on veut,

$$\begin{aligned}\exp\{C\|\nabla u^2\|_{L^1_{T_1}(\dot B^{\frac3p}_{p\,1})}\}\le2,\quad&\|(u^1,u^2)\|_{L^1_{T_1}(\dot B^{\frac3p+1}_{p\,1})}+\|\nabla\Pi^2\|_{L^1_{T_1}(\dot B^{\frac3p-1}_{p\,1})}\le c\\\text{et}\quad&\|(B^1,B^2)\|_{L^\infty_{T_1}(\dot B^{\frac3p-1}_{p\,1})}\|(B^1,B^2)\|_{L^1_{T_1}(\dot B^{\frac3p+1}_{p\,1})}\le c.\end{aligned}$$

Sachant qu'on a par hypothèse $\|a^1\|_{L^\infty_{T_1}(\dot B^{\frac3p}_{p\,\infty}\cap L^\infty)}\le c$, alors $\forall t\le T_1$, on a

$$\gamma(t)\le C\int_0^t\gamma(t)\log\Big(e+\frac{\alpha(T)}{\gamma(t)}\Big)\|(u^2,B^2)\|_{\dot B^{\frac3p+1}_{p\,1}}dt.$$

Comme $t\mapsto\|u^2\|_{\dot B^{\frac3p+1}_{p\,1}}+\|B^2\|_{\dot B^{\frac3p+1}_{p\,1}}$ est localement intégrable, alors on conclut par le lemme d'Osgood (voir par exemple [3]) que $\gamma(t)=0$ pour tout $t\in[0,T_1]$. Il es aisé de voir que cette propriété se propage de proche en proche et l'on obtient que $\gamma(t)=0$ pour tout $t\in[0,T]$. Ainsi la démonstration est achevée pour $1<p<3$. Les calculs que l'on vient d'effectuer sont valables pour $p\ne1$ (car ils reposent sur la proposition 4.3). Le cas $p=1$ se déduit par injection.

Cas $p = 3$.

Pour établir l'unicité dans ce cas critique, la condition de petitesse de a^1 dans l'espace $L^\infty_{T^\star}(\dot{B}^{\frac{3}{p}}_{p\,\infty} \cap L^\infty)$ s'avère insuffisante à cause des limitations des lois de produit. Pour y parvenir nous avons dû remplacer cet espace par un autre sous-espace de type $L^\infty_{T^\star}(\dot{B}^{\frac{3}{p}}_{p\,1})$. Plus précisément, nous avons

Proposition 4.4. *Soient $(a^1, u^1, \nabla\Pi, B^1)$ et $(a^2, u^2, \nabla\Pi^2, B^2)$ deux solutions de $(\widetilde{MHD})$ avec donnée initiale $a_0 \in \dot{B}^1_{3\,1}$, u_0, $B_0 \in \dot{B}^0_{3\,1}(\mathbb{R}^3)$ avec $\operatorname{div} u_0 = \operatorname{div} B_0 = 0$ et f à coefficients dans l'espace $L^1_{loc}([0,T^*); \dot{B}^0_{3\,1}(\mathbb{R}^3))$ tel que $\mathcal{Q}f$ appartient à $L^1_{loc}([0,T^\star); \dot{B}^{-1}_{3\,1}(\mathbb{R}^3))$. Supposons que pour $i = 1, 2$ on ait*

$$
\begin{aligned}
a^i &\in C([0,T^\star); \mathcal{S}') \cap L^\infty_{loc}([0,T^\star); \dot{B}^1_{3\,1}),\\
u^i &\in C([0,T^\star); \dot{B}^0_{3\,1}) \cap L^1_{loc}([0,T^\star); \dot{B}^2_{3\,1}),\\
B^i &\in C([0,T^\star); \dot{B}^0_{3\,1}) \cap L^1_{loc}([0,T^\star); \dot{B}^2_{3\,1}),\\
\nabla\Pi^i &\in L^1_{loc}([0,T^\star); \dot{B}^0_{3\,1}).
\end{aligned}
$$

Alors il existe une constante c strictement positive indépendantes de ces solutions, telle que si on a

$$\|a^1\|_{\widetilde{L}^\infty_{T^\star}(\dot{B}^1_{3\,1})} \leq c,$$

alors $(a^2, u^2, \nabla\Pi^2, B^2) = (a^1, u^1, \nabla\Pi^1, B^1)$.

Démonstration. Il s'agit de montrer d'abord que $(\delta a, \delta u, \nabla\delta\Pi, \delta B) \in G_T$, où

$$G_T = C\big([0,T]; \dot{B}^0_{3\,\infty}\big) \times \widetilde{L}^1_T\big(\dot{B}^1_{3\,\infty}\big) \cap C\big([0,T]; \dot{B}^{-1}_{3\,\infty}\big) \times \widetilde{L}^1_T\big(\dot{B}^{-1}_{3\,\infty}\big) \times \widetilde{L}^1_T\big(\dot{B}^1_{3\,\infty}\big) \cap C\big([0,T]; \dot{B}^{-1}_{3\,\infty}\big).$$

Les estimations obtenues dans un tel espace permettent de récupérer l'unicité via le lemme d'Osgood. On pose

$$\gamma(t) \overset{déf}{=} \|\delta u\|_{L^\infty_T(\dot{B}^{-1}_{3\,\infty})} + \|\delta u\|_{\widetilde{L}^1_T(\dot{B}^1_{3\,\infty})} + \|\nabla\delta\Pi\|_{\widetilde{L}^1_T(\dot{B}^{-1}_{3\,\infty})} + \|\delta B\|_{L^\infty_T(\dot{B}^{-1}_{3\,\infty})} + \|\delta B\|_{\widetilde{L}^1_T(\dot{B}^1_{3\,\infty})}.$$

L'appartenance à G_T s'effectue de manière identique à celle donnée pour le cas $p < 3$. La seule différence à noter apparaît dans le traitement des produits de type $a^i\nabla\Pi^i$. Pour ce faire, les inégalités (2.6), (2.7) et la remarque 2.1 seront de bon usage et assurent que le membre de gauche de l'égalité (4.1) appartient à $L^2_T(\dot{B}^{-1}_{3\,\infty})$. Ainsi l'inégalité de Cauchy-Schwarz implique que cette quantité appartient à $\widetilde{L}^1_T(\dot{B}^{-1}_{3\,\infty})$. Il suffit d'appliquer la proposition 2.1 de [4] pour conclure que $(\delta a, \delta u, \nabla\delta\Pi, \delta B) \in G_T$. Il s'agit maintenant d'estimer la fonction $\gamma(t)$.
Par les propositions 4.2 et 4.3, on a

$$\|\delta a\|_{L^\infty_t(\dot{B}^0_{3\,\infty})} \leq e^{C\|\nabla u^2\|_{L^1_t(\dot{B}^1_{3\,1})}} \|\delta u \cdot \nabla a^1\|_{L^1_t(\dot{B}^0_{3\,\infty})},$$

$$\|\delta u\|_{L^\infty_t(\dot{B}^{-1}_{3\,\infty})} + \mu^1\|\delta u\|_{\widetilde{L}^1_t(\dot{B}^1_{3\,\infty})} + \|\nabla\delta\Pi\|_{\widetilde{L}^1_t(\dot{B}^{-1}_{3\,\infty})} \leq Ce^{C\|\nabla u^2\|_{L^1_t(\dot{B}^1_{3\,1})}} \|H(a^i, u^i, \nabla\Pi^i, B^i)\|_{\widetilde{L}^1_T(\dot{B}^{-1}_{3\,\infty})} \tag{4.6}$$

et

$$\|\delta B\|_{L^\infty_t(\dot{B}^{-1}_{3\,\infty})} + \sigma^1\|\delta u\|_{\widetilde{L}^1_t(\dot{B}^1_{3\,\infty})} \leq Ce^{C\|\nabla u^2\|_{L^1_t(\dot{B}^1_{3\,1})}} \|G(a^i, u^i, B^i)\|_{\widetilde{L}^1_T(\dot{B}^{-1}_{3\,\infty})}. \tag{4.7}$$

Concernat l'estimation de δa, les inégalités (2.5), de Bernstein, de Minkowski et (2.10) donnent

$$\|\delta u\cdot\nabla a^1\|_{L^1_t(\dot B^0_{3\,\infty})}\lesssim\|\delta u\|_{L^1_t(\dot B^1_{3\,1})}\|a^1\|_{\widetilde L^\infty_t(\dot B^1_{3\,1})}$$

et

$$\|\delta u\|_{L^1_t(\dot B^1_{3\,1})}\lesssim\|\delta u\|_{\widetilde L^1_t(\dot B^1_{3\,\infty})}\log\Big(e+\frac{\|\delta u\|_{\widetilde L^1_t(\dot B^0_{3\,\infty})}+\|\delta u\|_{\widetilde L^1_t(\dot B^2_{3\,\infty})}}{\|\delta u\|_{\widetilde L^1_t(\dot B^1_{3\,\infty})}}\Big).$$

Or, nous avons par les inégalités de Hölder et de Minkowski

$$\|\delta u\|_{\widetilde L^1_t(\dot B^0_{3\,\infty})}\le t\sum_{i=1}^2\|u^i\|_{L^\infty_t(\dot B^0_{3\,1})}\quad\text{et}\quad\|\delta u\|_{\widetilde L^1_t(\dot B^2_{3\,\infty})}\le\sum_{i=1}^2\|u^i\|_{L^1_t(\dot B^2_{3\,1})}.$$

Donc

$$\begin{aligned}\|\delta a\|_{L^\infty_t(\dot B^0_{3\,\infty})}&\le e^{C\|\nabla u^2\|_{L^1_t(\dot B^1_{3\,1})}}\|a^1\|_{\widetilde L^\infty_t(\dot B^1_{3\,1})}\|\delta u\|_{\widetilde L^1_t(\dot B^1_{3\,\infty})}\\&\times\log\Big(e+\frac{t\|(u^1,u^2)\|_{L^\infty_t(\dot B^0_{3\,1})}+\|(u^1,u^2)\|_{L^1_t(\dot B^2_{3\,1})}}{\|\delta u\|_{\widetilde L^1_t(\dot B^1_{3\,\infty})}}\Big).\end{aligned}\tag{4.8}$$

On se propose maintenant d'estimer $H(a^i,u^i,\nabla\Pi^i,B^i)$. On a par l'inégalité Bernstein et la remarque 2.1

$$\begin{aligned}\Big\|-\delta u\cdot\nabla u^1+a^1\big(\mu^1\Delta\delta u-\nabla\delta\Pi\big)+\delta a\big(\mu^1\Delta u^2-\nabla\Pi^2\big)\Big\|_{\widetilde L^1_t(\dot B^{-1}_{3\,\infty})}&\lesssim\|u^1\|_{L^1_t(\dot B^2_{3\,1})}\|\delta u\|_{L^\infty_t(\dot B^{-1}_{3\,\infty})}\\&+\|a^1\|_{\widetilde L^\infty_t(\dot B^1_{3\,1})}\Big(\|\delta u\|_{\widetilde L^1_t(\dot B^1_{3\,\infty})}+\|\nabla\delta\Pi\|_{\widetilde L^1_t(\dot B^{-1}_{3\,\infty})}\Big)\\&+\int_0^t\|\delta a\|_{\dot B^0_{3\,\infty}}\Big(\|u^2\|_{\dot B^2_{3\,1}}+\|\nabla\Pi^2\|_{\dot B^0_{3\,1}}\Big)d\tau.\end{aligned}$$

Les inégalités de Minkowski, (2.6), (2.2), (2.4) et le lemme 2.3 [1] impliquent

$$\begin{aligned}\Big\|\delta a\,\mathrm{div}\Big[\big(\widetilde\mu(a^2)-\mu^1\big)\mathcal M^2\Big]\Big\|_{\widetilde L^1_t(\dot B^{-1}_{3\,\infty})}&\lesssim\int_0^t\|\delta a\|_{\dot B^0_{3\,\infty}}\Big\|\big(\widetilde\mu(a^2)-\mu^1\big)\mathcal M^2\Big\|_{\dot B^1_{3\,1}}d\tau\\&\lesssim\int_0^t\|\delta a\|_{\dot B^0_{3\,\infty}}\|\widetilde\mu(a^2)-\mu^1\|_{\dot B^1_{3\,1}}\|\nabla u^2\|_{\dot B^1_{3\,1}}d\tau\\&\lesssim\|a^2\|_{L^\infty_t(\dot B^1_{3\,1})}\int_0^t\|\delta a\|_{\dot B^0_{3\,\infty}}\|u^2\|_{\dot B^2_{3\,1}}d\tau.\end{aligned}$$

En se servant de l'inégalité (2.2), remarque 2.1 et lemme 2.3 [1], on trouve

$$\begin{aligned}\Big\|\mathrm{div}\Big[\big(\widetilde\mu(a^1)-\mu^1\big)\delta\mathcal M\Big]\Big\|_{\widetilde L^1_t(\dot B^{-1}_{3\,\infty})}&\lesssim\|\widetilde\mu(a^1)-\mu^1\|_{\widetilde L^\infty_t(\dot B^1_{3\,1})}\|\nabla\delta u\|_{\widetilde L^1_t(\dot B^0_{3\,\infty})}\\&\lesssim\|a^1\|_{\widetilde L^\infty_t(\dot B^1_{3\,1})}\|\delta u\|_{\widetilde L^1_t(\dot B^1_{3\,\infty})}.\end{aligned}\tag{4.9}$$

Ceci donne en vertu de la remarque 2.1 et du lemme 2.4 de [1] auxquels on associe les inégalités de Bernstein et de Minkowski,

$$\begin{aligned}\Big\|a^1\mathrm{div}\Big[\big(\widetilde\mu(a^2)-\widetilde\mu(a^1)\big)\mathcal M^2\Big]\Big\|_{\widetilde L^1_t(\dot B^{-1}_{3\,\infty})}&\lesssim\int_0^t\|a^1\|_{\dot B^1_{3\,1}}\Big\|\big(\widetilde\mu(a^2)-\widetilde\mu(a^1)\big)\mathcal M^2\Big\|_{\dot B^0_{3\,\infty}}d\tau\\&\lesssim\int_0^t\|a^1\|_{\dot B^1_{3\,1}}\big\|\widetilde\mu(a^2)-\widetilde\mu(a^1)\big\|_{\dot B^0_{3\,\infty}}\|\nabla u^2\|_{\dot B^1_{3\,\infty}\cap L^\infty}d\tau\\&\lesssim\|a^1\|_{\widetilde L^\infty_t(\dot B^1_{3\,1})}\|a^2\|_{L^\infty_t(\dot B^1_{3\,1})}\int_0^t\|\delta a\|_{\dot B^0_{3\,\infty}}\|u^2\|_{\dot B^2_{3\,1}}d\tau.\end{aligned}\tag{4.10}$$

De la même manière on aura les deux estimation suivantes

$$\begin{aligned}\Big\|a^1\mathrm{div}\Big[\big(\widetilde{\mu}(a^1)-\mu^1\big)\delta\mathcal{M}\Big]\Big\|_{\widetilde{L}^1_t(\dot{B}^{-1}_{3\,\infty})} &\lesssim \|a^1\|_{\widetilde{L}^\infty_t(\dot{B}^1_{3\,1})}\Big\|\big(\widetilde{\mu}(a^1)-\mu^1\big)\delta\mathcal{M}\Big\|_{\widetilde{L}^1_t(\dot{B}^0_{3\,\infty})}\\ &\lesssim \|a^1\|^2_{\widetilde{L}^\infty_t(\dot{B}^1_{3\,1})}\|\delta u\|_{\widetilde{L}^1_t(\dot{B}^1_{3\,\infty})}\end{aligned}$$

et

$$\Big\|\mathrm{div}\Big[\big(\widetilde{\mu}(a^2)-\widetilde{\mu}(a^1)\big)\mathcal{M}^2\Big]\Big\|_{\widetilde{L}^1_t(\dot{B}^{-1}_{3\,\infty})} \lesssim \|a^2\|_{L^\infty_t(\dot{B}^1_{3\,1})}\int_0^t \|\delta a\|_{\dot{B}^0_{3\,\infty}}\|u^2\|_{\dot{B}^2_{3\,1}}d\tau. \tag{4.11}$$

En utilisant les inégalités de Minkowski et de (2.4) on obtient du fait que $\dot{B}^1_{3,1}$ est une algèbre

$$\|\delta a\nabla {B^2}^2\|_{\widetilde{L}^1_t(\dot{B}^{-1}_{3\,\infty})} \lesssim \int_0^t \|\delta a\|_{\dot{B}^0_{3\,\infty}}\|B^2\|^2_{\dot{B}^1_{3\,1}}d\tau \lesssim \int_0^t \|\delta a\|_{\dot{B}^0_{3\,\infty}}\|B^2\|_{\dot{B}^0_{3\,1}}\|B^2\|_{\dot{B}^2_{3\,1}}d\tau.$$

De manière analogue, en utilisant en particulier (2.5), on obtient

$$\|\delta a B^2\cdot\nabla B^2\|_{\widetilde{L}^1_t(\dot{B}^{-1}_{3\,\infty})} \lesssim \int_0^t \|\delta a\|_{\dot{B}^0_{3\,\infty}}\|B^2\|_{\dot{B}^0_{3\,1}}\|B^2\|_{\dot{B}^2_{3\,1}}d\tau.$$

L'identité $B^2_j\nabla\delta B_j = \nabla(B^2_j\delta B_j)-\delta B_j\nabla B^2_j$, permet d'avoir suite à une combinaison de la remarque 2.1 avec celle de Minkowski et un argument d'interpolation classique,

$$\begin{aligned}\Big\|\big(1+a^1\big)\big(-\sum_{j=1}^3 B^2_j\cdot\nabla\delta B_j + B^2\cdot\nabla\delta B\big)\Big\|_{\widetilde{L}^1_t(\dot{B}^{-1}_{3\,\infty})} &\lesssim \Big(1+\|a^1\|_{\widetilde{L}^\infty_t(\dot{B}^1_{3\,1})}\Big)\\ &\times\Big(\sum_{j=1}^3\|B^2_j\otimes\delta B_j\|_{\widetilde{L}^1_t(\dot{B}^0_{3\,\infty})}+\|B^2\otimes\delta B\|_{\widetilde{L}^1_t(\dot{B}^0_{3\,\infty})}+\|\delta B_j\cdot\nabla B^2_j\|_{\widetilde{L}^1_t(\dot{B}^{-1}_{3\,\infty})}\Big)\\ &\lesssim \Big(\|B^2\|^{\frac12}_{L^\infty_t(\dot{B}^0_{3\,1})}\|B^2\|^{\frac12}_{L^1_t(\dot{B}^2_{3\,1})}+\|B^2\|_{L^1_t(\dot{B}^2_{3\,1})}\Big)\Big(\|\delta B\|_{L^\infty_t(\dot{B}^{-1}_{3\,\infty})}+\|\delta B\|_{\widetilde{L}^1_t(\dot{B}^1_{3\,\infty})}\Big).\end{aligned}$$

D'autre part la remarque 2.1 permet d'avoir

$$\Big\|\big(1+a^1\big)\big(-\sum_{j=1}^3\delta B_j\cdot\nabla B^1_j+\delta B\cdot\nabla B^1\big)\Big\|_{\widetilde{L}^1_t(\dot{B}^{-1}_{3\,\infty})}\lesssim\|\delta B\|_{L^\infty_t(\dot{B}^{-1}_{3\,\infty})}\|B^1\|_{L^1_t(\dot{B}^2_{3\,1})}.$$

En combinant toutes ces estimations nous parvenons à établir

$$\begin{aligned}\|H(a^i,u^i,\nabla\Pi^i,B^i)\|_{\widetilde{L}^1_t(\dot{B}^{-1}_{3\,\infty})}\lesssim\gamma(t)\Bigg(&\|u^1\|_{L^1_t(\dot{B}^2_{3\,1})}+\|a^1\|_{\widetilde{L}^\infty_t(\dot{B}^1_{3\,1})}+\|u^2\|_{L^1_t\dot{B}^2_{3\,1}}\\ &+\|(B^1,B^2)\|_{L^1_t(\dot{B}^2_{3\,1})}+\|(B^1,B^2)\|^{\frac12}_{L^1_t(\dot{B}^2_{3\,1})}\Bigg)+\int_0^t\|\delta a\|_{\dot{B}^0_{3,\infty}}g(\tau)d\tau,\end{aligned}\tag{4.12}$$

avec g une fonction localement intégrable.
Nous allons maintenant estimer G. En utilisant l'inégalité de Bernstein et remarque 2.1, on

obtient par interpolation

$$\begin{aligned}\Big\|B^2\cdot\nabla\delta u+\delta B\cdot\nabla u^1-\delta u\cdot\nabla B^1\Big\|_{\widetilde{L}^1_t(\dot B^{-1}_{3\,\infty})} &\lesssim \|B^2\otimes\delta u+\delta B\otimes u^1-\delta u\otimes B^1\|_{\widetilde{L}^1_t(\dot B^0_{3\,\infty})}\\
&\lesssim \|(B^1,B^2)\|_{L^2_t(\dot B^1_{3\,\infty}\cap L^\infty)}\|\delta u\|_{\widetilde{L}^2_t(\dot B^0_{3\,\infty})}+\|\delta B\|_{\widetilde{L}^2_t(\dot B^0_{3\,\infty})}\|u^1\|_{L^2_t(\dot B^1_{3\,\infty}\cap L^\infty)}\\
&\lesssim \Big(\|(B^1,B^2)\|^{\frac12}_{L^1_t(\dot B^2_{3\,1})}+\|u^1\|^{\frac12}_{L^1_t(\dot B^2_{3\,1})}\Big)\Big(\|\delta B\|_{L^\infty_t(\dot B^{-1}_{3\,\infty})}+\|\delta B\|_{\widetilde{L}^1_t(\dot B^1_{3\,\infty})}\\
&+\|\delta u\|_{L^\infty_t(\dot B^{-1}_{3\,\infty})}+\|\delta u\|_{\widetilde{L}^1_t(\dot B^1_{3\,\infty})}\Big).\end{aligned}$$

Nous obtenons de manière identique à (4.11) et (4.9),

$$\Big\|\mathrm{rot}\Big[\big(\widetilde\sigma(a^2)-\widetilde\sigma(a^1)\big)\mathrm{rot}\,B^2\Big]\Big\|_{\widetilde{L}^1_t(\dot B^{-1}_{3\,\infty})} \lesssim \|a^2\|_{L^\infty_t(\dot B^1_{3\,1})}\int_0^t\|\delta a\|_{\dot B^0_{3\,\infty}}\|B^2\|_{\dot B^2_{3\,1}}d\tau$$

et

$$\Big\|\mathrm{rot}\Big[\big(\widetilde\sigma(a^1)-\sigma^1\big)\mathrm{rot}\,\delta B\Big]\Big\|_{\widetilde{L}^1_t(\dot B^{-1}_{3\,\infty})}\lesssim\|a^1\|_{\widetilde{L}^\infty_t(\dot B^1_{3\,1})}\|\delta B\|_{\widetilde{L}^1_t(\dot B^1_{3\,\infty})}.$$

Nous déduisons de ces estimations que

$$\|G(a^i,u^i,B^i)\|_{\widetilde{L}^1_t(\dot B^{-1}_{3\,\infty})}\lesssim\gamma(t)\Big(\|(B^1,B^2)\|^{\frac12}_{L^1_t(\dot B^2_{3\,1})}+\|u^1\|^{\frac12}_{L^1_t(\dot B^2_{3\,1})}+\|a^1\|_{\widetilde{L}^\infty_t(\dot B^1_{3\,1})}\Big)+\|B^2\|_{\dot B^2_{3\,1}}d\tau\Big).$$

En associant la proposition 4.3 avec l'estimation ci-dessus et celle donnée par (4.12), nous aurons

$$\begin{aligned}\gamma(t)\lesssim\gamma(t)\Big(\|u^1\|_{L^1_t(\dot B^2_{3\,1})}+\|a^1\|_{\widetilde{L}^\infty_t(\dot B^1_{3\,1})}+\|u^2\|_{L^1_t(\dot B^2_{3\,1})}+\|(B^1,B^2)\|_{L^1_t(\dot B^2_{3\,1})}+\|(B^1,B^2)\|^{\frac12}_{L^1_t(\dot B^2_{3\,1})}\Big)\\
+\int_0^t\|\delta a\|_{\dot B^0_{3,1}}g(\tau)d\tau.\end{aligned}$$

En choisissant un temps T_1 suffisamment petit et en servant de l'inégalité (4.8), on obtient pour tout $t\in[0,T_1]$ et grâce à la petitesse de a^1,

$$\gamma(t)\lesssim\int_0^t\log\Big(e+\frac{\alpha(T)}{\|\delta u\|_{\widetilde{L}^1_\tau(\dot B^1_{3\,\infty})}}\Big)\|\delta u\|_{\widetilde{L}^1_\tau(\dot B^1_{3\,\infty})}g(\tau)d\tau,$$

avec $\alpha(T)=T\|(u^1,u^2)\|_{L^\infty_T(\dot B^0_{3,1})}+\|(u^1,u^2)\|_{\widetilde{L}^1_T(\dot B^2_{3,1})}$. Comme la fonction $x\to x\log(e+\frac{\alpha(T)}{x})$ est croissante sur $\mathbb{R}_+$, alors on aura pour tout $t\in[0,T_1]$

$$\gamma(t)\lesssim\int_0^t\gamma(\tau)\log\Big(e+\frac{\alpha(T)}{\gamma(\tau)}\Big)g(\tau)d\tau.$$

Ainsi nous déduisons par le lemme d'Osgood que $\gamma(t)=0$, pour tout $t\in[0,T_1]$. Ceci donne par l'inégalité (4.8) que $\delta a=0$. En procédant à un argument de proche en proche on déduit la proposition.

4.2 Existence

La démonstration de l'existence s'effectue de manière standard. On commence par résoudre un problème approché et on montre que la famille de solutions est uniformément bornée. La dernière étape consiste à étudier la convergence vers une solution du problème initial.

Première étaoe : construction d'une solution approchée régulière.

Tout d'abord on rappelle le résultatt suivant (voir lemme 4.2 [1]).

Lemme 4.1. *On se donne* $s_i \in \mathbb{R}$, *et* $(p_i, r_i) \in [1, \infty[^2$, *avec* $i = 1, 2$. *Soit* $G \in \dot{B}^{s_1}_{p_1\, r_1}(\mathbb{R}^3)$. *Alors il existe* $G^n \in H^\infty(\mathbb{R}^3)$, *tel que pour tout* $\varepsilon > 0$ *il existe* n_0 *tel que*

$$\|G^n - G\|_{\dot{B}^{s_1}_{p_1\, r_1}} \leq \varepsilon \quad \textit{pour tout}\, n \geq n_0.$$

Si de plus $\operatorname{div} G = 0$ *et* $\mathcal{Q}G \in \dot{B}^{s_2}_{p_2\, r_2}$, *alors on peut choisir* G^n *telle que* $\operatorname{div} G^n = 0$ *et* $\mathcal{Q}G^n$ *bornée uniformément en* n *dans* $\dot{B}^{s_2}_{p_2\, r_2}$.

D'après ce lemme il existe $a_0^n, u_0^n, B_0^n \in H^\infty(\mathbb{R}^3)$ et f^n appartenant à $L^1_{loc}(\mathbb{R}_+; H^\infty(\mathbb{R}^3))$ telles que on ait

$$\|a_0^n\|_{L^\infty} \lesssim \|a_0\|_{L^\infty}, \quad \operatorname{div} u_0^n = \operatorname{div} B_0^n = 0 \quad \text{et} \quad \|\mathcal{Q}f^n\|_{L^1_{loc}(\mathbb{R}_+;\, \dot{B}^{\frac{3}{p}-2}_{p\,1})} \lesssim \|\mathcal{Q}f\|_{L^1_{loc}(\mathbb{R}_+;\, \dot{B}^{\frac{3}{p}-2}_{p\,1})}.$$

Maintenant grâce au théorème 1.1 on peut déduire que le système $(\widetilde{MHD})$ avec données $(a_0^n, u_0^n, B_0^n, f^n)$ admet une solution locale unique $(a^n, u^n, \nabla\Pi^n, B^n)$ vérifiant

$$a^n \in C([0, T^n); H^{s+1}(\mathbb{R}^3)),\ u^n,\ B^n \in C([0, T^n);\ H^s(\mathbb{R}^3)) \cap \widetilde{L}^1_{T^n}(H^{s+2})$$
$$\text{et} \quad \nabla\Pi^n \in L^1([0, T^n);\ H^s(\mathbb{R}^3)) \quad \text{avec} \quad s > \frac{1}{2}.$$

Deuxième étape : estimation de la solution régularisée.

Soit $T \in [0, +\infty]$ un minorant de $\inf_{n\in\mathbb{N}} T^n$. Notre premier objectif est de démontre l'existence de $T > 0$ tel que $(a^n, u^n, \nabla\Pi^n)$ appartient et soit uniformément bornée dans

$$E_T = \widetilde{L}^\infty_T(\dot{B}^{\frac{3}{p}}_{p\,1}) \times L^1_T(\dot{B}^{\frac{3}{p}+1}_{p\,1}) \cap \widetilde{L}^\infty_T(\dot{B}^{\frac{3}{p}-1}_{p\,1}) \times L^1_T\big(\dot{B}^{\frac{3}{p}-1}_{p\,1}\big) \times L^1_T(\dot{B}^{\frac{3}{p}+1}_{p\,1}) \cap \widetilde{L}^\infty_T(\dot{B}^{\frac{3}{p}-1}_{p\,1}).$$

Soit (u_L^n, Π_L^n) la solution du système de Stokes non-stationnaire suivant

$$(\mathrm{L}) \quad \left\{ \begin{array}{l} \partial_t u_L^n - \mu^1 \Delta u_L^n + \nabla\Pi_L^n = f^n \\ \partial_t B_L^n - \sigma^1 \Delta B_L^n = 0 \\ \operatorname{div} u_L^n = \operatorname{div} B_L^n = 0 \\ (u_L^n, B_L^n)_{|t=0} = (u_0^n, B_0^n). \end{array} \right.$$

Par construction, $u_0^n,\ B_0^n \in \dot{B}^{\frac{3}{p}-1}_{p\,1} \cap H^s$ et $f^n \in L^1_{loc}(\mathbb{R}_+;\ \dot{B}^{\frac{3}{p}-1}_{p\,1} \cap H^s)$. Donc, d'après la proposition 2.3 [8], on a $(u_L^n, \nabla\Pi_L^n, B_L^n) \in L^\infty_T(\dot{B}^{\frac{3}{p}-1}_{p\,1} \cap H^s) \times L^1_T(\dot{B}^{\frac{3}{p}-1}_{p\,1} \cap H^s) \times L^\infty_T(\dot{B}^{\frac{3}{p}-1}_{p\,1} \cap H^s)$ et de plus $u_L^n,\ B_L^n \in L^1_T(\dot{B}^{\frac{3}{p}+1}_{p\,1})$ pour tout $T > 0$.
Soient $u^n = u_L^n + \overline{u}^n$, $\nabla\Pi^n = \nabla\Pi_L^n + \nabla\overline{\Pi}^n$ et $B^n = B_L^n + \overline{B}^n$. Alors

$$(a^n, \overline{u}^n, \nabla\overline{\Pi}^n, \overline{B}^n) \in C([0, T^n);\ H^{s+1}) \times C([0, T^n);\ H^s) \cap \widetilde{L}^1_{T^n}(H^{s+2}) \times \widetilde{L}^1_{T^n}(H^s)$$
$$\times\, C([0, T^n);\ H^s) \cap \widetilde{L}^1_{T^n}(H^{s+2})$$

et vérifie

$$
\text{(NL)} \quad \begin{cases}
\partial_t a^n + u^n \cdot \nabla a^n = 0 \\
\partial_t \overline{u}^n + u^n \cdot \nabla \overline{u}^n - \mu^1 \Delta \overline{u}^n + \nabla \overline{\Pi}^n = H(a^n, u^n, \nabla \Pi^n, B^n) \\
\partial_t \overline{B}^n + u^n \cdot \nabla \overline{B}^n - \sigma^1 \Delta \overline{B}^n = -\mathrm{rot}\Big[\big(\widetilde{\sigma}(a^n) - \sigma^1\big)\mathrm{rot}\, B^n\Big] + B^n \cdot \nabla u^n - u^n \cdot \nabla B^n_L \\
\mathrm{div}\, \overline{u}^n = \mathrm{div}\, \overline{B}^n = 0 \\
(a^n, \overline{u}^n, \overline{B}^n)_{|t=0} = (a^n_0, 0, 0),
\end{cases}
$$

avec $H(a^n, u^n, \nabla \Pi^n, B^n) = -u^n \cdot \nabla u^n_L + a^n(\mu^1 \Delta u^n - \nabla \Pi^n) + 2(1+a^n)\mathrm{div}\Big\{\big(\widetilde{\mu}(a^n) - \mu^1\big)\mathcal{M}^n\Big\}$ $+ (1+a^n)\big(B^n \cdot \nabla B^n - \frac{1}{2}\nabla B^{n2}\big)$. On va démontrer dans la suite que $(a^n, \overline{u}^n, \nabla\overline{\Pi}^n, \overline{B}^n) \in E_{T^n}$. Dans le cas $2 \leq p < 6$ on utilise le fait que $(a^n, \overline{u}^n, \nabla\overline{\Pi}^n, \overline{B}^n)$ appartient a $C([0, T^n);\, H^{s+1}) \times C([0, T^n);\, H^s) \times L^1_{T^n}(H^s) \times C([0, T^n);\, H^s)$ et l'inégalité de Bernstein, qui entraîne $H^s(\mathbb{R}^3) \hookrightarrow \dot{B}^{s_0}_{p\,1}(\mathbb{R}^3)$ dès que $s_0 > \frac{3}{p} - \frac{3}{2}$ et $s > s_0 + \frac{3}{2} - \frac{3}{p}$, car

$$
\sum_{q \in \mathbb{Z}} 2^{s_0 q} \|\Delta_q h\|_{L^p} \lesssim \sum_{q \leq -1} 2^{q(s_0 + \frac{3}{2} - \frac{3}{p})} \|\Delta_q h\|_{L^2} + \sum_{0 \leq q} 2^{qs} 2^{q(-s+s_0+\frac{3}{2}-\frac{3}{p})} \|\Delta_q h\|_{L^2} \lesssim \|h\|_{H^s}.
$$

Donc $(a^n, u^n, \nabla \Pi^n, B^n) \in E_{T^n}$ pour $2 \leq p < 6$. Lorsque $1 < p < 2$, on utilise l'inégalité (2.8), le fait que $H^s(\mathbb{R}^3) \hookrightarrow \dot{B}^{s_0}_{2\,r}(\mathbb{R}^3)$ pour $s > s_0 > 0$. Mais tout d'abord on rappelle le résultat suivant qui donne une majoration des solutions de système de Stokes non stationnaire dans les espaces de Besov homogènes construits sur les espaces de Lebesgue L^2 (voir lemme 4.3 [1]).

Lemme 4.2. *Soient $p \in]1, \infty[$, $0 < s + 1 + N - \frac{N}{p}$, u_0 un champ de vecteurs à divergence nulle avec coefficients dans $\dot{B}^s_{p\,1}$ et g un champ de vecteurs à coefficients dans $\widetilde{L}^1_T(\dot{B}^s_{p\,1})$. Soient u et v des champs de vecteurs à divergence nulle tels que $v \in L^1_T(\dot{B}^{s+1+N-\frac{N}{p}}_{2\,1} \cap L^2)$ et $u \in L^\infty_T(\dot{B}^{s+1+N-\frac{N}{p}}_{2\,1} \cap L^2)$ une solution de système de Stokes non stationnaire*

$$
\text{(L)} \qquad \begin{cases}
\partial_t u + v \cdot \nabla u - \nu \Delta u + \nabla \Pi = g \\
\mathrm{div}\, u = 0 \\
u_{|t=0} = u_0.
\end{cases}
$$

Alors il existe C dépendant de p et s tel que u vérifie l'estimation suivante

$$
\|u\|_{\widetilde{L}^\infty_T(\dot{B}^s_{p\,1})} + \nu \|u\|_{\widetilde{L}^1_T(\dot{B}^{s+2}_{p\,1})} + \|\nabla \Pi\|_{\widetilde{L}^1_T(\dot{B}^s_{p\,1})} \leq \|u_0\|_{\dot{B}^s_{p\,1}} + C\|g\|_{\widetilde{L}^1_T(\dot{B}^s_{p\,1})} + C\|u\|_{L^\infty_T(L^2 \cap \dot{B}^{s+1+N-\frac{N}{p}}_{2\,1})} \times \|v\|_{L^1_T(L^2 \cap \dot{B}^{s+1+N-\frac{N}{p}}_{2\,1})}.
$$

De même on a une estimation analogue pour l'équation de transport, plus exactement on a pour $s + 1 + N - \frac{N}{p} > 0$

$$
\|f\|_{\widetilde{L}^\infty_T(\dot{B}^s_{p\,1})} \leq \|f_0\|_{\dot{B}^s_{p\,1}} + \int_0^t \|F(\tau)\|_{\dot{B}^s_{p\,1}} d\tau + C\|f\|_{L^\infty_T(L^2 \cap \dot{B}^{s+1+N-\frac{N}{p}}_{2\,1})} \|v\|_{L^1_T(L^2 \cap \dot{B}^{s+1+N-\frac{N}{p}}_{2\,1})}.
$$

Comme application de lemme précédent on prend $u = \overline{u}^n$, (resp. $\overline{B}^n$) $v = u^n$, $F = 0$, $g = H(a^n, u^n, \nabla \Pi^n, B^n)$ (resp. $-\mathrm{rot}\Big[\big(\widetilde{\sigma}(a^n) - \sigma^1\big)\mathrm{rot}\, B^n\Big] + B^n \cdot \nabla u^n - u^n \cdot \nabla B^n_L$) et $s = \frac{3}{p} - 1$. Et par suite le lemme 4.2 et l'inégalité (2.8) impliquent implique que $(a^n, u^n, \nabla\Pi^n, B^n) \in E_{T^n}$ pour $1 < p < 6$.

Maintenant on va démontrer l'existence de $T > 0$ telle que que $(a^n, u^n, \nabla\Pi^n, B^n)$ est bornée dans E_T.
D'après la proposition 4.2, on a

$$\|a^n\|_{\widetilde{L}^\infty_{T^n}(\dot{B}^{\frac{3}{p}}_{p\,1})} \leq e^{C\|\nabla u^n\|_{L^1_{T^n}(\dot{B}^{\frac{3}{p}}_{p\,1})}}\|a_0^n\|_{\dot{B}^{\frac{3}{p}}_{p\,1}} \leq Ce^{C\|\nabla u^n\|_{L^1_{T^n}(\dot{B}^{\frac{3}{p}}_{p\,1})}}\|a_0\|_{\dot{B}^{\frac{3}{p}}_{p\,1}}.$$

Dans la suite on pose

$$\mathcal{B}^n(t) = \|\overline{B}^n\|_{\widetilde{L}^\infty_t(\dot{B}^{\frac{3}{p}-1}_{p\,1})} + \|\overline{B}^n\|_{L^1_t(\dot{B}^{\frac{3}{p}+1}_{p\,1})} \text{ et } U^n(t) = \|\overline{u}^n\|_{\widetilde{L}^\infty_t(\dot{B}^{\frac{3}{p}-1}_{p\,1})} + \|\overline{u}^n\|_{L^1_t(\dot{B}^{\frac{3}{p}+1}_{p\,1})} + \|\nabla\overline{\Pi}^n\|_{L^1_t(\dot{B}^{\frac{3}{p}-1}_{p\,1})}.$$

La proposition 4.3 implique que

$$U^n(T^n) \leq Ce^{C\|\nabla u^n\|_{L^1_{T^n}(\dot{B}^{\frac{3}{p}}_{p\,1})}}\|H(a^n, u^n, \nabla\Pi^n, B^n)\|_{L^1_{T^n}(\dot{B}^{\frac{3}{p}-1}_{p\,1})}.$$

D'après la remarque 2.1, on a

$$\begin{aligned}\Big\| - u^n\cdot\nabla u_L^n + a^n(\mu^1\Delta u^n - \nabla\Pi^n)\Big\|_{L^1_{T^n}(\dot{B}^{\frac{3}{p}-1}_{p\,1})} &\lesssim \|u^n\|_{\widetilde{L}^\infty_{T^n}(\dot{B}^{\frac{3}{p}-1}_{p\,1})}\|\nabla u_L^n\|_{L^1_{T^n}(\dot{B}^{\frac{3}{p}}_{p\,1})} \\ &+ \|a^n\|_{L^\infty_{T^n}(\dot{B}^{\frac{3}{p}}_{p\,\infty}\cap L^\infty)}\Big(\|u^n\|_{L^1_{T^n}(\dot{B}^{\frac{3}{p}+1}_{p\,1})} + \|\nabla\Pi^n\|_{L^1_{T^n}(\dot{B}^{\frac{3}{p}-1}_{p\,1})}\Big).\end{aligned} \tag{4.13}$$

L'inégalité de Bernstein, remarque 2.1 et le lemme 2.3 [1] impliquent

$$\Big\|(1+a^n)\mathrm{div}\big\{\big(\widetilde{\mu}(a^n) - \mu^1\big)\mathcal{M}^n\big\}\Big\|_{L^1_{T^n}(\dot{B}^{\frac{3}{p}-1}_{p\,1})} \lesssim \big(1 + \|a^n\|_{L^\infty_{T^n}(\dot{B}^{\frac{3}{p}}_{p\,1})}\big)\|a^n\|_{\widetilde{L}^\infty_{T^n}(\dot{B}^{\frac{3}{p}}_{p\,1})}\|u^n\|_{L^1_{T^n}(\dot{B}^{\frac{3}{p}+1}_{p\,1})}$$

et

$$\Big\|(1+a^n)\big(B^n\cdot\nabla B^n - \frac{1}{2}\nabla B^{n2}\big)\Big\|_{L^1_{T^n}(\dot{B}^{\frac{3}{p}-1}_{p\,1})} \lesssim \big(1 + \|a^n\|_{L^\infty_{T^n}(\dot{B}^{\frac{3}{p}}_{p\,1})}\big)\|B^n\|_{L^\infty_{T^n}(\dot{B}^{\frac{3}{p}-1}_{p\,1})}\|B^n\|_{L^1_{T^n}(\dot{B}^{\frac{3}{p}+1}_{p\,1})}.$$

Pour $\overline{B}^n$, on a

$$\partial_t\overline{B}^n + u^n\cdot\nabla\overline{B}^n - \sigma^1\Delta\overline{B}^n = -\mathrm{rot}\Big[\big(\widetilde{\sigma}(a^n) - \sigma^1\big)\mathrm{rot}\,B^n\Big] + \overline{B}^n\cdot\nabla u^n + B_L^n\cdot\nabla u^n - u^n\cdot\nabla B_L^n,$$

Nous déduisons à partir de la proposition 4.3, l'inégalite (2.4) et la remarque 2.1 que pour $t \in [0, T^n]$

$$\begin{aligned}\mathcal{B}^n(t) \leq Ce^{C\|\nabla u^n\|_{L^1_t(\dot{B}^{\frac{3}{p}}_{p\,1})}}\Big\{&\|B_L^n\|_{L^2_t(\dot{B}^{\frac{3}{p}}_{p\,1})}\|u^n\|_{L^2_t(\dot{B}^{\frac{3}{p}}_{p\,1})} + \|a^n\|_{\widetilde{L}^\infty_t(\dot{B}^{\frac{3}{p}}_{p\,1})}\|B^n\|_{L^1_t(\dot{B}^{\frac{3}{p}+1}_{p\,1})} \\ &+ \|u^n\|_{L^\infty_t(\dot{B}^{\frac{3}{p}-1}_{p\,1})}\|B_L^n\|_{L^1_t(\dot{B}^{\frac{3}{p}+1}_{p\,1})}\Big\}.\end{aligned}$$

Ainsi nous obtenons par interpolation,

$$\mathcal{B}^n(t) \leq Ce^{C\|\nabla u^n\|_{L^1_t(\dot B^{\frac{3}{p}}_{p\,1})}}\Big\{\|B^n_L\|^{\frac12}_{L^\infty_t(\dot B^{\frac{3}{p}-1}_{p\,1})}\|B^n_L\|^{\frac12}_{L^1_t(\dot B^{\frac{3}{p}+1}_{p\,1})}\|u^n\|^{\frac12}_{L^\infty_t(\dot B^{\frac{3}{p}-1}_{p\,1})}\|u^n\|^{\frac12}_{L^1_t(\dot B^{\frac{3}{p}+1}_{p\,1})}$$
$$+\|a^n\|_{\widetilde L^\infty_t(\dot B^{\frac{3}{p}}_{p\,1})}\|B^n\|_{L^1_t(\dot B^{\frac{3}{p}+1}_{p\,1})}+\|u^n\|_{L^\infty_t(\dot B^{\frac{3}{p}-1}_{p\,1})}\|B^n_L\|_{L^1_t(\dot B^{\frac{3}{p}+1}_{p\,1})}\Big\}.$$

De même, on a

$$U^n(t) \leq Ce^{C\|\nabla u^n\|_{L^1_t(\dot B^{\frac{3}{p}}_{p\,1})}}\Big[\|u^n\|_{\widetilde L^\infty_t(\dot B^{\frac{3}{p}-1}_{p\,1})}\|\nabla u^n_L\|_{L^1_t(\dot B^{\frac{3}{p}}_{p\,1})}+\|a^n\|_{\widetilde L^\infty_t(\dot B^{\frac{3}{p}}_{p\,1})}\Big(1+\|a^n\|_{L^\infty_t(\dot B^{\frac{3}{p}}_{p\,1})}\Big)$$
$$\times\Big(\|u^n\|_{L^1_t(\dot B^{\frac{3}{p}+1}_{p\,1})}+\|\nabla\Pi^n\|_{L^1_t(\dot B^{\frac{3}{p}-1}_{p\,1})}\Big)+\big(1+\|a^n\|_{L^\infty_t(\dot B^{\frac{3}{p}}_{p\,1})}\big)\|B^n\|_{L^\infty_t(\dot B^{\frac{3}{p}-1}_{p\,1})}\|B^n\|_{L^1_t(\dot B^{\frac{3}{p}+1}_{p\,1})}\Big]. \tag{4.14}$$

Soit ζ un réel strictement positif petit. Il existe alors $T_1 > 0$ tel que

$$\|(u_L, B_L)\|_{L^1_{T_1}(\dot B^{\frac{3}{p}+1}_{p\,1})}+\|\nabla\Pi_L\|_{L^1_{T_1}(\dot B^{\frac{3}{p}-1}_{p\,1})} \leq \zeta. \tag{4.15}$$

En effet, on applique l'opérateur $\mathcal{Q}$ à l'equation (L) et l'on obtient

$$\|\nabla\Pi_L\|_{L^1_{T_1}(\dot B^{\frac{3}{p}-1}_{p\,1})} \leq \|\mathcal{Q}f\|_{L^1_{T_1}(\dot B^{\frac{3}{p}-1}_{p\,1})} \leq \|f\|_{L^1_{T_1}(\dot B^{\frac{3}{p}-1}_{p\,1})} \leq \zeta \tag{4.16}$$

On a aussi

$$\begin{aligned}\|u_L\|_{L^1_t(\dot B^{\frac{3}{p}+1}_{p\,1})}+\|B_L\|_{L^1_t(\dot B^{\frac{3}{p}+1}_{p\,1})} &\leq C\Big\{\sum_{q\in\mathbb{Z}}2^{q(\frac{3}{p}-1)}\Big(\frac{1-e^{-K\mu^1 t2^{2q}}}{K}\Big)\Big(\|\dot\Delta_q u_0\|_{L^p}\\ &+\|\dot\Delta_q\mathcal{P}f\|_{L^1_t(L^p)}\Big)+\sum_{q\in\mathbb{Z}}2^{q(\frac{3}{p}-1)}\frac{1-e^{-K\sigma^1 t2^{2q}}}{K}\|\dot\Delta_q B_0\|_{L^p}\Big\} \overset{déf}{=} F(t) \leq \zeta,\end{aligned} \tag{4.17}$$

pour t assez petit car le théorème de Lebesgue implique $t \longmapsto F(t)$ est continue et clairement $F(0) = 0$. De même la proposition 2.3 de [8] implique

$$\|u_L\|_{\widetilde L^\infty_{T_1}(\dot B^{\frac{3}{p}-1}_{p\,1})} \leq \|u_0\|_{\dot B^{\frac{3}{p}-1}_{p\,1}}+\|\mathcal{P}f\|_{L^1_{T_1}(\dot B^{\frac{3}{p}-1}_{p\,1})} \overset{déf}{=} U_0.$$

En conséquence, on aura

$$\|u^n_L\|_{L^1_{T_1}(\dot B^{\frac{3}{p}+1}_{p\,1})}+\|\nabla\Pi^n_L\|_{L^1_{T_1}(\dot B^{\frac{3}{p}-1}_{p\,1})} \leq C\zeta \quad \text{et} \quad \|u^n_L\|_{\widetilde L^\infty_{T_1}(\dot B^{\frac{3}{p}-1}_{p\,1})} \leq CU_0 \tag{4.18}$$

et

$$\|B^n_L\|_{L^1_{T_1}(\dot B^{\frac{3}{p}+1}_{p\,1})} \leq C\zeta \quad \text{et} \quad \|B^n_L\|_{\widetilde L^\infty_{T_1}(\dot B^{\frac{3}{p}-1}_{p\,1})} \leq C\|B_0\|_{\dot B^{\frac{3}{p}-1}_{p\,1}}. \tag{4.19}$$

Dans la suite on peut supposer que $T^n \leq T_1$, sinon on diminue T^n. Soit $t \leq T^n$, alors

$$\mathcal{B}^n(t) \leq Ce^{C\left(\zeta+\|\overline{u}^n\|_{L^1_t(\dot{B}^{\frac{3}{p}+1}_{p\,1})}\right)}\Big\{\zeta^{\frac{1}{2}}\|B_0\|^{\frac{1}{2}}_{\dot{B}^{\frac{3}{p}-1}_{p\,1}}\Big(U_0+\|\overline{u}^n\|_{L^\infty_t(\dot{B}^{\frac{3}{p}-1}_{p\,1})}\Big)^{\frac{1}{2}}\Big(\zeta+\|\overline{u}^n\|_{L^1_t(\dot{B}^{\frac{3}{p}+1}_{p\,1})}\Big)^{\frac{1}{2}}$$
$$+\|a^n\|_{\widetilde{L}^\infty_t(\dot{B}^{\frac{3}{p}}_{p\,1})}\Big(\zeta+\|\overline{B}^n\|_{L^1_t(\dot{B}^{\frac{3}{p}+1}_{p\,1})}\Big)+\zeta\Big(U_0+\|\overline{u}^n\|_{L^\infty_t(\dot{B}^{\frac{3}{p}-1}_{p\,1})}\Big)\Big\}$$

et

$$\|a^n\|_{\widetilde{L}^\infty_t(\dot{B}^{\frac{3}{p}}_{p\,1})} \leq Ce^{C\left(\zeta+\|\overline{u}^n\|_{L^1_t(\dot{B}^{\frac{3}{p}+1}_{p\,1})}\right)}\|a_0\|_{\dot{B}^{\frac{3}{p}}_{p\,1}}. \tag{4.20}$$

Choisissons $T_2 > 0$ tel que

$$\exp\Big(C\big(\zeta+\|\overline{u}^n\|_{L^1_{T_2}(\dot{B}^{\frac{3}{p}+1}_{p\,1})}\big)\Big) < 2. \tag{4.21}$$

Donc si

$$C\|a_0\|_{\dot{B}^{\frac{3}{p}}_{p\,1}} \leq 1,$$

alors pour tout $t \leq T_2$,

$$\mathcal{B}^n(t) \leq C\Big\{\zeta^{\frac{1}{2}}\|B_0\|^{\frac{1}{2}}_{\dot{B}^{\frac{3}{p}-1}_{p\,1}}\big(U_0+U^n(t)\big)^{\frac{1}{2}}\big(\zeta+U^n(t)\big)^{\frac{1}{2}}+\zeta\big(U_0+\|\overline{u}^n\|_{L^\infty_t(\dot{B}^{\frac{3}{p}-1}_{p\,1})}\big)\Big\} \tag{4.22}$$

et

$$\|a^n\|_{\widetilde{L}^\infty_{T_1}(\dot{B}^{\frac{3}{p}}_{p\,1})} \leq C\|a_0\|_{\dot{B}^{\frac{3}{p}}_{p\,r}}. \tag{4.23}$$

En reportant l'inégalite (4.22) vérifiée par $B^n = B^n_L + \overline{B}^n$ dans (4.14) on trouve

$$\begin{aligned} U^n(t) \quad &\leq \quad C\Big\{\zeta\Big(U^n(t)+U_0\Big)+\|a^n\|_{\widetilde{L}^\infty_t(\dot{B}^{\frac{3}{p}}_{p\,1})}\Big(1+\|a^n\|_{L^\infty_t(\dot{B}^{\frac{3}{p}}_{p\,1})}\Big)\Big(\zeta+U^n(t)\Big) \\ &+ \quad \zeta\|B_0\|_{\dot{B}^{\frac{3}{p}-1}_{p\,1}}\Big(1+\|a^n\|_{L^\infty_t(\dot{B}^{\frac{3}{p}}_{p\,1})}\Big)\Big(U_0^2+\zeta^2+U^n(t)^2\Big)\Big)\Big\}. \end{aligned}$$

Et utilisant (4.23) et la petitesse de a_0, on obtient pour ζ assez petit,

$$U^n(T_2) \leq \zeta C\Big(U_0, \|a_0\|_{\dot{B}^{\frac{3}{p}}_{p\,1}}, \|B_0\|_{\dot{B}^{\frac{3}{p}-1}_{p\,1}}\Big), \tag{4.24}$$

de même pour $\mathcal{B}^n$. En prenant ζ suffisamment petit on constate que l'inégalité (4.21) est satisfaite. ainsi par une méthode standard de connexité on montre que $T_2 = T^n$. Le même type de raisonnement permet aussi d'avoir $T^n = T^1$, avec des contrôles uniformes.
Nous allons dans ce qui suit donner une estimation précisée sur le terme de pression. Pour celà en utilise le fait

$$\mathrm{div}\big((1+a^n)\nabla\Pi^n\big) = \mathrm{div}\Big(\mathcal{Q}f^n - u^n\cdot\nabla u^n + 2\big(1+a^n\big)\big[\mathrm{div}\{\widetilde{\mu}(a^n)\mathcal{M}^n\} + B^n\cdot\nabla B^n - \frac{1}{2}\nabla B^{n2}\big]\Big),$$

$\|a^n\|_{\widetilde{L}^\infty_{T_1}(\dot{B}^{\frac{3}{p}}_{p\,1})} \lesssim \|a_0\|_{\dot{B}^{\frac{3}{p}}_{p\,1}} << 1$ et $\mathcal{Q}f^n$ est uniformément bornée dans $L^1_{T_1}(\dot{B}^{\frac{3}{p}-1}_{p\,1}) \cap L^2_{T_1}(\dot{B}^{\frac{3}{p}-2}_{p\,1})$.
On en déduit par intérpolation et grâce aux lois de produits le lemme suivant.

Lemme 4.3. *Soient* $1 < p < 6$ *et* $0 < \eta < \inf(1, \frac{6-p}{2p})$. *Alors* $\nabla\Pi^n$ *est uniformément bornée dans* $\Big(L^{\frac{2}{2-\eta}}_{T_1}(\dot B^{\frac{3}{p}-1-\eta}_{p\,1})\Big)^3$.

D'autre part les inégalités (4.16) et (4.17) montrent que si

$$\|u_0\|_{\dot B^{\frac{3}{p}-1}_{p\,1}} + \|B_0\|_{\dot B^{\frac{3}{p}-1}_{p\,1}} + \|f\|_{L^1(\mathbb{R}_+;\dot B^{\frac{3}{p}-1}_{p\,1})} \leq c' \inf(\mu^1, \sigma^1),$$

alors $T_1 = +\infty$.

Troisième étape : passage à la limite.

Notons d'abord que par construction de (u_0^n, f^n), le couple $(u_L^n, \nabla\Pi_L^n, B_L^n)$ converge fortement vers la solution $(u_L, \nabla\Pi_L, B_L)$ du système (L). Par contre pour montrer que la limite faible de $(a^n, \overline{u}^n, \nabla\overline{\Pi}^n, \overline{B}^n)$, est une solution du système (NL), il va falloir recourir à des arguments de compacité.
Nous avons déjà établi que $(a^n, \overline{u}^n, \nabla\overline{\Pi}^n, \overline{B}^n)$ est uniformément bornée dans E_{T_1}, de plus $\nabla\Pi^n$ est uniformément bornée dans $L^{\frac{2}{2-\eta}}_{T_1}(\dot B^{\frac{3}{p}-1-\eta}_{p\,1})$. Donc pour pouvoir utiliser le théorème d'Ascoli, il suffit d'estimer la dérivée par rapport au temps de a^n, $\overline{u}^n$ et $\overline{B}^n$ (voir par exemple [9]).

Lemme 4.4.
(i) La suite $(\partial_t a^n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est uniformément bornée dans* $L^2_{T_1}(\dot B^{\frac{3}{p}-1}_{p\,r})$.
(ii) La suite $(\partial_t \overline{u}^n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est uniformément bornée dans* $\big(L^{\frac{2}{2-\eta}}_{T_1}(\dot B^{\frac{3}{p}-1-\eta}_{p\,1})\big)^3$ *pour* $0 < \eta$ $< \inf(1, \frac{6-p}{2p})$.
(iii) La suite $(\partial_t \overline{B}^n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est uniformément bornée dans* $\big(L^{\frac{2}{2-\eta}}_{T_1}(\dot B^{\frac{3}{p}-1-\eta}_{p\,1})\big)^3$ *pour* $0 < \eta$ $< \inf(1, \frac{6-p}{2p})$.

Preuve. Rappelons que

$$\partial_t a^n = -u^n \cdot \nabla a^n.$$

Nous déduisons par un argument d'interpolation combiné avec l'inégalité (2.5), c'est à ce niveau qu'apparaît la restriction $p < 6$

$$\|\partial_t a^n\|_{L^2_{T_1}(\dot B^{\frac{3}{p}-1}_{p\,r})} \lesssim \|u^n\|_{L^2_{T_1}(\dot B^{\frac{3}{p}}_{p\,1})} \|\nabla a^n\|_{L^\infty_{T_1}(\dot B^{\frac{3}{p}-1}_{p\,r})} \lesssim \|u^n\|^{\frac12}_{L^\infty_{T_1}(\dot B^{\frac{3}{p}-1}_{p\,1})} \|u^n\|^{\frac12}_{L^1_{T_1}(\dot B^{\frac{3}{p}+1}_{p\,1})} \|a^n\|_{L^\infty_{T_1}(\dot B^{\frac{3}{p}}_{p\,r})}.$$

Pour $\overline{u}^n$, on a

$$\partial_t\overline{u}^n = -\mathcal{P}\big(u^n\cdot\nabla u^n\big) - \mu^1\Delta u_L^n - \mathcal{P}\big(a^n\nabla\Pi^n\big) + \mathcal{P}\Big[\Big(1+a^n\Big)\Big(2\,\mathrm{div}\big\{\widetilde\mu(a^n)\mathcal{M}^n\big\} + B^n\cdot\nabla B^n - \frac12 B^{n2}\Big)\Big].$$

Comme l'opérateur de Leray est continu sur les espaces de Besov homogènes, alors par intérpolation et grâce aux lois de produits, on aura l'estimation. De même pour $\partial_t\overline{B}^n$, on écrit

$$\partial_t\overline{B}^n = \mathcal{P}\big(B^n\cdot\nabla u^n - u^n\cdot\nabla B^n\big) - \sigma^1\Delta B_L^n - \mathcal{P}\Big[\mathrm{rot}\big\{\widetilde\sigma(a^n)\mathrm{rot}\,B^n\big\}\Big].$$

D'où le lemme. ■

Nous déduisons du lemme précédent et des inégalités de Cauchy-Schwarz et de Hölder le corollaire suivant.

Corollaire 4.1.
(i) La suite $(a^n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est uniformément bornée dans* $C^{\frac12}\Big([0,T_1];\ \dot B_{p\,1}^{\frac3p-1}\Big)$.
(ii) La suite $(\overline{u}^n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est uniformément bornée dans* $C^{\frac\eta2}\Big([0,T_1];\ \dot B_{p\,1}^{\frac3p-2}\Big)$ *pour tout* η *appartenant à* $]0,\inf(1,\frac{6-p}{2p})[$.
(iii) La suite $(\overline{B}^n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est uniformément bornée dans* $C^{\frac\eta2}\Big([0,T_1];\ \dot B_{p\,1}^{\frac3p-2}\Big)$ *pour tout* η *appartenant à* $]0,\inf(1,\frac{6-p}{2p})[$.

Rappelons que l'injection de $\dot B^{s+\varepsilon}_{p\,q,loc}$ dans $B^{s}_{p\,q,loc}$ ($B^{s}_{p\,q,loc}$ espace de Besov inhomogène) est compacte pour tout $\varepsilon>0$ (voir par exemple [15]). Il existe donc une sous-suite notée encore $(a^n,\overline{u}^n,\nabla\overline{\Pi}^n,\overline{B}^n)$ qui converge vers $(a,\overline{u},\nabla\overline{\Pi},\overline{B})$. Par conséquent, $(a,u,\nabla\Pi,B)$ est une solution du système $(\widetilde{MHD})$ appartenant à

$$\widetilde{L}^\infty_{T_1}(\dot B_{p\,1}^{\frac3p})\times\widetilde{L}^\infty_{T_1}(\dot B_{p\,1}^{\frac3p-1})\cap L^1_{T_1}(\dot B_{p\,1}^{\frac3p+1})\times L^1_{T_1}(\dot B_{p\,1}^{\frac3p-1})\times\widetilde{L}^\infty_{T_1}(\dot B_{p\,1}^{\frac3p-1})\cap L^1_{T_1}(\dot B_{p\,1}^{\frac3p+1}).$$

Concernant la continuite de u voir [9]. Pour montrer que a est continue et que sa norme L^∞ est conservée, on utilise que $a=a_0\circ\Psi^{-1}$ avec Ψ est le flot de u. D'où le théorème 1.2. ■

Références

[1] H. Abidi : *Équation de Navier-Stokes avec densité et viscosité variables dans l'espace critique.* Preprint. Laboratoire J.-L. Lions (2004).

[2] J.-M. Bony : *Calcul symbolique et propagation des singularités pour les équations aux dérivées partielles non linéaires.* Annales scientifiques de l'école Normale supérieure, 14, (1981), 209-246.

[3] J.-Y. Chemin : *Fluides parfaits incompressibles.* Astérisque, 230, 1995.

[4] J.-Y. Chemin : *Théorèmes d'unicité pour le système de Navier-Stokes tridimensionnel.* Journal d'analyse mathématique, 77 (1999), 25-50.

[5] J.-Y. Chemin et N. Lerner : *Flot de champs de vecteurs non-lipschitziens et équations de Navier-Stokes.* J. Differential equations 121 (1995), 247-286.

[6] R. Danchin : *Density-dependent incompressible viscous fluids in critical spaces.* Proceedings of the royal society of Edinburgh, 133A (2003), 1311-1334.

[7] R. Danchin : *The inviscid limit for density-dependent incompressible fluids.* A paraître aux Annales de la Faculté de Sciences de Toulouse.

[8] R. Danchin : *Local theory in critical spaces for compressible viscous and heat-conductive gases.* [Commun. Partial differential equations 26 (2001), 7-8, 1183-1233]. Commun. Partial differential equations 27 (2002), 11-12, 2531-2532.

[9] R. Danchin : *Global existence in critical spaces for compressible Navier-Stokes equations.* Invent. Math, 141 (2000), 579-614.

[10] B. Desjardins, C. Le Bris : *Remarks on a nonhomogeneous model of magnetohydrodynamics.* Differential and integral equations, 11 (1998), 3, 377-394.

[11] G. Duvaut, J.-L. Lions : *Inéquations en thermoélasticité et magnétohydrodynamique.* Arch. Rat. Mech. Anal, 46, 241-279.

[12] H. Fujita, T. Kato : *On the Navier-Stokes initial value problem I.* Archive for rational mechanics and analysis 16 (1964), 269-315.

[13] J.-F. Gerbeau, C. Le Bris : *Existence of solution for a density-dependant magnetohydrodynamic equation.* Adv. Differential equations, 2(3) (1997), 427-452.

[14] J. Peetre : *New thoughts on Besov spaces.* Duke University Mathematical Series 1, Durham N. C. 1976.

[15] T. Runst et W. Sickel : *Sobolev spaces of fractional order, nemytskij operators, and nonlinear partial differential equations.* De Gruyter series in nonlinear analysis and applications, 3. Walter de Wruyter and Co. Berlin 1996.

[16] M. Sermange, R. Temam : *Some mathematical questions related to the MHD equations.* Comm. Pure appl. Math, XXXVI (1983), 635-664.