TRANSPORT-DIFFUSION ET VISCOSITÉ ÉVANESCENTE

Taoufik Hmidi
Université de Rennes1
IRMAR.
Campus de Beaulieu
35042 rennes Cedex
e-mail : taoufik.hmidi@univ-rennes1.fr

Résumé. Dans cet article, nous étudions un modèle de transport-diffusion relatif à un champ log-lipschitzien. Plus précisément, on s'intéresse à la répartition visqueuse de la masse des solutions de l'équation correspondante. On démontre que la masse est quasiment concentrée autour du transporté du support initial par le flot. Ceci nous permet, dans le cas des poches de tourbillon bidimensionnelles non régulières, de montrer un résultat global de convergence L^p du tourbillon de Navier-Stokes ω_ν vers celui d'Euler ω, avec $p > 1$.

Abstract. In this paper, we study a convection-diffusion model with respect to a vector field having log-lipschitz regularity. More precisely, we are interested in the viscous repartition of the mass for the solutions of the corresponding equation. We prove that mass is essentially concentrated around the image, through the flow, of the initial support. This allows us, for non-regular bidimensional vortex patches, to prove the global L^p convergence of the Navier-Stokes vorticity ω_ν to the Eulerian one ω, with $p > 1$.

1. INTRODUCTION

Nous envisageons dans cet article de décrire les endroits où est concentrée la quasi-totalité des normes L^p de toute solution du modèle de transport-diffusion (TD_ν)

$$(TD_\nu)\begin{cases} \partial_t a_\nu + v_\nu \cdot \nabla a_\nu - \nu \Delta a_\nu = 0 \\ a_{\nu|t=0} = a^0. \end{cases}$$

Le champ de vecteurs v_ν est de divergence nulle, et supposé log-lipschitzien. Le paramètre qui est censé mesurer la concentration de la masse est la viscosité ν, qui est un scalaire strictement positif. La motivation principale de cette étude est un problème de convergence visqueuse du tourbillon du système de Navier-Stokes incompressible vers celui d'Euler incompressible, dans le cas des poches de tourbillon non régulières (ces systèmes seront introduits dans le prochain paragraphe).

D'abord, nous savons grâce aux travaux de Yudovich [8] que, dans le cadre des équations d'Euler incompressibles, la structure des poches de tourbillon est préservée pour tout temps. Autrement dit, si l'on part d'une donnée initiale dont le tourbillon est l'indicatrice d'un ouvert borné F_0, alors le tourbillon $\omega(t)$ associé à la solution d'Euler est pour tout temps l'indicatrice du transporté du support initial F_0 par le flot $\psi(t)$. Une telle considération cesse d'être valable lorsque l'on s'intéresse au système de Navier-Stokes incompressible à cause de l'effet régularisant résultant du terme visqueux. Il est alors naturel de savoir si le tourbillon visqueux ω_ν reste proche, dans un sens que l'on précisera, du tourbillon eulérien quand la viscosité est proche de zéro. Dans cette direction nous pouvons consulter l'article de R. Danchin [7] dans lequel il est démontré que si la poche de tourbillon initiale est de bord régulier, alors la solution v_ν du système (NS_ν) est lipschitzienne. De plus, la famille (v_ν) est uniformément contrôlée par rapport à ν dans l'espace de Lipschitz. C'est en se basant sur cette information cruciale que R. Danchin prouve que le tourbillon ω_ν est quasiment concentré autour du transporté du support initial par le flot visqueux $\psi_\nu(t)$. Plus exactement, il montre un résultat de décroissance exponentielle en la viscosité du tourbillon loin du transporté du support initial par le flot.

Notre objectif est d'étendre ces résultats de décroissance à des solutions de type Yudovich correspondant à une poche de tourbillon quelconque. Mais la principale difficulté à laquelle nous sommes confrontés réside dans la faible régularité de la vitesse v_ν qui n'est plus forcément lipschitzienne. Ainsi, pour contourner ce problème, nous avons régularisé le champ de vitesse v_ν via l'opérateur de troncature en fréquence sur des boules de taille λ, noté S_λ. Ensuite nous avons repris la méthode utilisée par R. Danchin qui consiste à tronquer la solution par des troncatures exponentielles adéquates et à utiliser des estimations d'énergie. Ce qui nous a permis de valider en premier temps seulement un résultat local de décroissance exponentielle. L'importante information dont nous nous servons pour la preuve est l'uniformité en la viscosité du contrôle de la famille (v_ν) dans la classe de Zygmund C^1_*.

Ayant établi un résultat local, on peut penser à une méthode itérative qui permet de propager la décroissance de proche en proche. Malheureusement, une telle procédure est vouée à l'echec vu que la troncature exponentielle contribue dans l'étape qui suit avec un grand facteur à cause de l'étalement du support, ce qui n'était pas le cas initialement. Mais en découpant l'intervalle de temps en des sous-intervalles, tout en ajustant convenablement les fonctions de troncature, qui ne sont plus exponentielles, à l'intervalle dans lequel on travaille, nous avons obtenu un résultat global de décroissance en la viscosité. En revanche, le prix qu'on paye avec cette méthode est évidemment lié au taux de décroissance qui n'est pas exponentiel mais polynomial en ν.

Nous signalons que les analyses sont faites directement sur le modèle (TD_ν) et que le champ de vecteurs v_ν est pris dans la classe des fonctions logarithmiquement lipschitziennes notée C_{LL}. Cet espace contient strictement la classe de Zygmund C^1_*.

En ce qui concerne la convergence forte L^p du tourbillon visqueux $\omega_\nu(t)$ du système de Navier-Stokes vers le tourbillon eulérien $\omega(t)$ pour des données de tourbillons non régulières, nous rappelons par exemple le résultat de P. Constantin et J. Wu [6] qui montre que si le tourbillon initial appartient à $L^1 \cap L^\infty \cap B^s_{2,\infty}$, pour un certain $s \in (0,\, 1)$, alors la convergence aura lieu mais localement en temps. Ici, on verra comment l'étude de la répartition de la norme L^p du tourbillon visqueux $\omega_\nu(t)$ permet de déduire, dans le cas des données de type poches de tourbillon à bord de mesure nulle, un résultat de convergence forte $L^\infty_{loc}(\mathbb{R}_+; L^p)$, pour tout $p > 1$. Nous prouvons également un résultat local de convergence "presque" $L^\infty(\mathbb{R}^2)$: si h est un petit paramètre alors la convergence en norme L^∞ a lieu en dehors de $\{x,\, \mathrm{dist}(x,\, \partial F_t) \leq h\}$, où ∂F_t désigne la frontière du support de $\omega(t)$. Pour établir ces résultats, Nous nous appuyons d'une part sur les estimations de décroissance et d'autre part sur un résultat de convergence uniforme du flot visqueux $\psi_\nu(t,\cdot)$ vers le flot eulérien $\psi(t,\cdot)$ qui permet de contrôler les solutions autour de la frontière.

2. **Enoncé des résultats et notations.**

On considère le système de Navier-Stokes (NS_ν) qui donne l'évolution du champ de vitesse $v_\nu(t,x)$ d'un fluide incompressible et homogène :

$$(NS_\nu)\begin{cases} \partial_t v_\nu + v_\nu\cdot\nabla v_\nu - \nu\Delta v_\nu = -\nabla p_\nu,\ t\in\mathbb{R}_+;\ x\in\mathbb{R}^2\\ \operatorname{div} v_\nu = 0\\ v_{\nu|t=0} = v^0,\end{cases}$$

où ν est un paramètre positif désignant la viscosité cinématique du fluide et p_ν est un scalaire qu'on appelle la pression. Nous rappelons aussi que l'opérateur de divergence est défini par :

$$\operatorname{div}\, v = \partial_1 v^1 + \partial_2 v^2 \quad \text{avec} \quad v = (v^1, v^2).$$

Lorsqu'il n'y a plus de forces de frottement visqueux alors le terme de dissipation disparaît et l'on a le système d'Euler incompressible :

$$(E)\begin{cases} \partial_t v + v\cdot\nabla v = -\nabla p\\ \operatorname{div} v = 0\\ v_{|t=0} = v^0.\end{cases}$$

Nous allons maintenant introduire une quantité physique qui joue un rôle important dans la mécanique des fluides, que l'on appelle le tourbillon et l'on note ω. On le définit à partir d'un champ de vecteurs $v = (v^1,\, v^2)$ par le scalaire

$$\omega = \partial_1 v^2 - \partial_2 v^1.$$

En dimension deux d'espace cette quantité satisfait dans le cadre du système (NS_ν) une équation simple de type transport-diffusion :

$$\partial_t\omega_\nu + v_\nu\cdot\nabla\omega_\nu - \nu\Delta\omega_\nu = 0.$$

Dans le cas eulérien le tourbillon vérifie une simple équation de transport. Nous soulignons que la vitesse peut être obtenue à partir du tourbillon par l'intermédiaire de la loi de Biot-Savart. Nous adopterons également le point de vue lagrangien pour décrire le fluide , c'est-à-dire, nous faisons appel au flot $\psi_\nu(t,\, x)$ qui obéit à l'équation intégrale suivante :

$$\psi_\nu(t,\, x) = x + \int_0^t v_\nu\big(\tau,\, \psi_\nu(\tau,\, x)\big)d\tau.$$

On le note simplement ψ lorsqu'il s'agit du flot de v. Signalons au passage que lorsque la vitesse est log-lipschitzienne alors on a un unique flot dans la classe des fonctions continues en temps et en espace. Nous verrons une formulation plus précise de ce résultat dans le théorème 4.
Considérons le système (TD_ν) et posons

$$F_0 = \operatorname{supp}(a^0) \quad \text{et} \quad F_{t,\nu} = \psi_\nu(t,\, F_0). \tag{1}$$

Nous faisons remarquer que lorsqu'il s'agit d'établir des résultats de décroissance, nous imposons à F_0 d'être uniquement un domaine borné sans aucune condition sur le bord. Par contre quand il s'agit de montrer des résultats de convergence visqueuse, nous supposons, pour avoir une description explicite de la convergence, que le bord de F_0 est une réunion finie de chemins rectifiables. Dans ce cas, on note L_0 la longueur de ∂F_0. Notons que cette hypothèse n'est pas nécessaire : on peut imposer uniquement au bord d'avoir une mesure de Lebesgue nulle.
Soit A un ensemble de $\mathbb{R}^d$ et h une longueur. On définit les ensembles

$$A_h^c = \big\{x\in\mathbb{R}^d,\, \operatorname{dist}(x,\, A)\geq h\big\} \quad \text{et} \quad (A^c)_h = \big\{x\in\mathbb{R}^d,\, \operatorname{dist}(x,\, A^c)\geq h\big\}.$$

On définit aussi pour tout s et t positifs et pour ℓ fixé dans $[\frac{1}{2},\, 1]$

$$V_\nu(t,s) = \Big|\int_s^t \|v_\nu(\tau)\|_{LL} d\tau\Big|,\; V_\nu(t) = V_\nu(t,0) \quad \text{et} \quad \delta_\nu(t,h) = e\ell\Big(\frac{h}{e\ell}\Big)^{\exp V_\nu(t)}.$$

On signale que le réel ℓ représente l'unité de longueur et nous l'avons introduit pour adimensionner les quantités mises en jeu. On désigne par $(C_{LL},\, \|\cdot\|_{LL})$ l'espace normé des fonctions v vérifiant

$$\|v\|_{LL} = \frac{\|v\|_{L^\infty}}{\ell} + \sup_{0<|x-x'|\leq \ell} \frac{|v(x)-v(x')|}{|x-x'|\log\frac{e\ell}{|x-x'|}} < \infty.$$

Nous allons dans la suite rappeler un résultat de décroissance exponentielle de toute solution de (TD_ν), où v_ν est un champ de vecteurs supposé lipschitzien. Une telle condition est satisfaite par exemple pour toute vitesse qui soit une solution du système de Navier-Stokes ou du système d'Euler incompressible avec des données initiales de type poche de tourbillon à bord de classe $C^{1+\epsilon}$, avec $\epsilon \in (0,1)$. Le cas eulérien est traité par J.-Y. Chemin dans [3], tandis que le cas visqueux est dû à R. Danchin [7] qui montre de plus un contrôle de Lipschitz sur la vitesse qui est uniforme en ν sur la vitesse. Dans ce même article on trouve le résultat de décroissance suivant :

Théorème 1. *Soient $\nu > 0$ et v_ν un champ de vecteurs appartenant à $L^\infty_{loc}(\mathbb{R}_+; \mathrm{Lip}(\mathbb{R}^d))$ et à divergence nulle. On suppose que a_ν vérifie (TD_ν) avec $a^0 \in L^2(\mathbb{R}^d)$. Alors on a pour tout $t > 0$ et $h > 0$:*

1. $\|a_\nu(t)\|_{L^2((F_{t,\nu})^c_h)} \leq e^{-\frac{h^2}{4\nu t}e^{-4\bar V_\nu(t)}}\|a^0\|_{L^2}.$
2. *Si $a^0 = 1_{F_0}$, alors*

$$\|a_\nu(t) - \mathbf{1}_{F_{t,\nu}}\|_{L^2((F^c_{t,\nu})_h)} \leq 2\|a^0\|_{L^2} \min\Big\{1, C\Big(\frac{\nu t}{h^2}\Big)^{\frac{1}{2}} e^{2\bar V_\nu(t)} e^{-\frac{h^2}{\nu t}e^{-4\bar V_\nu(t)}}\Big\}.$$

avec C est une constante universelle et $\bar V_\nu(t) = \int_0^t \|\nabla v_\nu(s)\|_{L^\infty} ds.$

Lorsque l'on se donne un tourbillon initial borné et intégrable alors l'existence et l'unicité de solutions globales pour les systèmes de Navier-Stokes et d'Euler incompressibles 2-D sont en fait assurées par le résultat de Yudovich [8]. En outre il est montré que la vitesse est uniformément contrôlée en temps et en viscosité dans l'espace de Zygmund C^1_*. Nous montrons ici que la décroissance du tourbillon visqueux loin du support a lieu malgré la faible régularité de la vitesse, et les résultats que nous allons énoncer sont directement établis pour le modèle de transport-diffusion (TD_ν) relativement à un champ logarithmiquement lipschitzien et où on n'exige aucun lien entre la vitesse et la solution. Notre premier résultat est le suivant :

Théorème 2. *Soit d un entier supérieur ou égal à 2 et p un réel appartenant à $[2, +\infty[$. Il existe deux constantes C_0 et C ne dépendant que de d, telles que si v_ν est un champ de vecteurs de divergence nulle, appartenant à $L^1_{loc}(\mathbb{R}_+; C_{LL})$ et si a_ν vérifie (TD_ν), avec a^0 dans $L^p(\mathbb{R}^d)$ alors, en posant*

$$T_\nu = \sup\Big\{t \geq 0, \int_0^t \|v_\nu(s)\|_{LL} ds \leq \frac{1}{C_0}\Big\},$$

on aura pour tout $t \in [0,\, T_\nu)$, pour tout $h \in [0,\, \ell]$ et pour tout ν vérifiant

$$\frac{\nu t}{\ell^2} \leq \Big(\frac{h}{C\ell}\Big)^{\frac{C}{1-C_0 V_\nu(t)}}, \tag{2}$$

l'estimation suivante

$$\big\|a_\nu(t)\big\|_{L^p((F_{t,\nu})^c_h)} \leq C\big\|a^0\big\|_{L^p} \exp\left(-\frac{e}{4}\Big(\frac{\ell^2}{\nu t}\Big)^{\frac14}\Big(\frac{h}{e\ell}\Big)^{\exp V_\nu(t)}\right).$$

De plus, si F_0 est un domaine borné de $\mathbb{R}^d$, alors, en posant $a^0 = \mathbf{1}_{F_0}$ et en se restreignant à des réels $t \in [0,\, T_\nu)$, $h \in [0,\, \ell]$ et ν satisfaisant (2), *on aura l'estimation suivante*

$$\big\|a_\nu(t) - \mathbf{1}_{F_{t,\nu}}\big\|_{L^p((F^c_{t,\nu})_h)} \leq C\|a^0\|_{L^p} \exp\Big(-\frac{e}{4}\Big(\frac{\ell^2}{\nu t}\Big)^{\frac14}\Big(\frac{h}{e\ell}\Big)^{\exp V_\nu(t)}\Big). \tag{3}$$

Les résultats de décroissance exponentielle que nous venons d'exposer sont valables sur un petit intervalle de temps qui est, dans le cadre des solutions de Yudovich, uniforme en la viscosité. Malheureusement la méthode employée ne permet pas de valider les estimations de décroissance pour des temps suffisamment grands. Cependant en modifiant légèrement les techniques utilisées, nous aboutissons à un résultat de décroissance globale en temps mais en une puissance fractionnaire de ν.

Théorème 3. *Soient (v_ν) une famille de champs de vecteurs de divergence nulle, appartenant à $L^1_{loc}(\mathbb{R}_+;\, C_{LL})$ et a_ν une solution de (TD_ν) avec $a^0 \in L^2(\mathbb{R}^d)$. On se donne un temps $T > 0$ et deux nombres réels $\alpha \in (0,\, 1)$ et $h \in [0,\, \ell]$. Si ν vérifie*

$$\frac{\nu T}{\ell^2} \leq \min\left\{\Big(\frac{h}{C\ell}\Big)^{C\exp\big(C_\alpha V^2_\nu(T)\big)},\, \Big(\frac{e^{1-\exp CV_\nu(T)}}{CV_\nu(T)}\Big)^{\frac{4}{1+\alpha}}\right\}, \tag{4}$$

alors on aura pour tout temps t appartenant à $[0,\, T]$

$$\|a_\nu(t)\|_{L^2((F_{t,\nu})^c_h)} \leq C\Big(\frac{\nu t}{\ell^2}\Big)^{\frac{\alpha}{2}}\Big(\frac{C\ell}{h}\Big)^{\exp\big(C_\alpha V^2_\nu(T)\big)}\|a^0\|_{L^2}.$$

De plus, considérons la donnée initiale $a^0 = \mathbf{1}_{F_0}$, avec F_0 un domaine borné. Alors pour tout h et ν vérifiant la condition (4) *et pour tout $t \in [0,\, T]$, on aura l'estimation suivante*

$$\|a_\nu(t) - \mathbf{1}_{F_{t,\nu}}\|_{L^2((F^c_{t,\nu})_h)} \leq C\Big(\frac{\nu t}{\ell^2}\Big)^{\frac{\alpha}{2}}\Big(\frac{C\ell}{h}\Big)^{\exp\big(C_\alpha V^2_\nu(T)\big)}\|a^0\|_{L^2}.$$

Nous avons posé $C_\alpha = C/(1-\alpha)^2$, avec C une constante qui ne dépend que de d.

Le corollaire suivant fournit un résultat de convergence forte du tourbillon ω_ν vers ω dans l'espace $L^\infty_{loc}(\mathbb{R}_+;\, L^2(\mathbb{R}^2))$, lorsque la viscosité tend vers zéro. Néanmoins, c'est un résultat restreint aux tourbillons initiaux de type $\omega^0 = \mathbf{1}_{F_0}$. Il est basé essentiellement sur le théorème 3 et sur un résultat de convergence de v_ν vers v dans l'espace $L^\infty_{loc}(\mathbb{R}_+;\, L^2)$. Le taux de convergence que l'on réussit à expliciter est une puissance de ν qui est décroissante par rapport au temps.

Corollaire 1. *Soient ω_ν et ω les tourbillons respectifs des solutions de (NS_ν) et de (E) tels que, $\omega_\nu(0) = \omega(0) = \omega^0 = \mathbf{1}_{F_0}$, avec F_0 un domaine borné ayant un bord de longueur finie L_0. Alors*

$$\lim_{\nu\to 0^+} \|\omega_\nu - \omega\|_{L^\infty_{loc}(\mathbb{R}_+;\, L^2(\mathbb{R}^2))} = 0.$$

Plus précisément, il existe une fonction f de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}_+$ strictement décroissante vers zéro et une constante C strictement positive, telles que pour tout réel T positif et pour tout nombre positif ν vérifiant

$$\frac{\nu T}{\ell^2} \leq f(T\|\omega^0\|_{L^1\cap L^\infty}),$$

on aura pour tout $t \in [0,T]$ l'estimation

$$\|\omega_\nu(t) - \omega(t)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^2)} \le C\|\omega^0\|^2_{L^1\cap L^\infty}(L_0\ell + \ell^2)\Big(\frac{\nu T}{\ell^2}\Big)^{C^{-1}\exp(-CT^2\|\omega^0\|^2_{L^1\cap L^\infty})}.$$

De plus, il existe une constante universelle $C_1 > 0$ telle que pour tout $h \in [0, \ell]$ et pour tout temps $t \in [0,\, C_1\|\omega^0\|^{-1}_{L^1\cap L^\infty}[$, on a

$$\lim_{\nu\to 0^+} \|\omega_\nu(t) - \omega(t)\|_{L^\infty(\mathcal{T}^c_{t,h})} = 0,$$

où l'on a posé

$$\mathcal{T}_{t,h} = \big\{x \in \mathbb{R}^2\ ; \mathrm{d}(x, \partial F_t) \le h\big\}.$$

Remarques.
• L'hypothèse que ∂F_0 est rectifiable n'est pas essentielle et on peut la remplacer par une hypothèse plus faible de type la mesure de Lebesgue de cet ensemble est nulle. Cependant on ne peut pas avoir un contrôle explicite. En fait, on doit échanger les quantités qui font appel à la mesure de surface en L_0 par des quantités qui font intervenir la mesure de Lebesgue de la surface tubulaire $\mathcal{T}_{0,h}$ d'épaississement h et qui s'organise autour du bord initial. Cette mesure tend vers zéro quand h tend vers zéro et c'est suffisant pour en déduire la convergence.
• La convergence du toutbillon visqueux vers celui d'Euler est en fait valable dans tous les espaces L^p, avec $1 < p < +\infty$. Pour ce faire on utilise un argument d'interpolation combiné avec la convergence L^2 et l'uniformité en ν du contrôle $L^1 \cap L^\infty$ du tourbillon visqueux.
• La convergence "presque" L^∞ mentionnée dans le corollaire 1 est assurée localement en temps grâce au théorème 2. En fait la méthode utilisée pour avoir des estimations globales ne permet pas d'obtenir des estimations L^p uniformes en p.

3. **Quelques outils de base**

Nous allons introduire dans ce paragraphe quelques outils de base qui seront utiles dans la suite. En premier lieu, nous étudions quelques propriétés fondamentales de l'espace des fonctions log-lipschitziennes, en donnant en particulier la caractérisation dyadique des éléments de cet espace. Ensuite, nous discutons l'existence de flot pour un champ log-lipschitzien, en détaillant certaines de ses importantes propriétés. Enfin nous clôturons cette brève excursion par quelques lemmes qui sont d'une utilité courante pour prouver les résultats énoncés.

Définition 1. *Fixons un réel $\ell \in [\frac{1}{2}, 1]$. Alors on désigne par C_{LL}(pour alléger les notations on omet l'indice ℓ) l'espace des fonctions v bornées sur $\mathbb{R}^d$ telles que*

$$\sup_{0<|x-x'|\le\ell} \frac{|v(x)-v(x')|}{|x-x'|(1+\log\frac{\ell}{|x-x'|})} < +\infty\cdot$$

La norme naturelle associée à cet espace est

$$\|v\|_{LL} = \frac{\|v\|_{L^\infty}}{\ell} + \sup_{0<|x-x'|\le\ell} \frac{|v(x)-v(x')|}{|x-x'|(1+\log\frac{\ell}{|x-x'|})}.$$

Avant d'aborder la caractérisation dyadique des éléments de C_{LL}, on va juste introduire les opérateurs de Littlewood-Paley dont la construction repose sur la proposition suivante :

Proposition 1. *Il existe deux fonctions χ et ϕ appartenant respectivement aux espaces $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ et $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d\backslash\{0\})$ telles que,*

$$\chi(\xi)+\sum_{q\geq 0}\phi(2^{-q}\xi)=1,\quad \frac{1}{3}\leq \chi^2(\xi)+\sum_{q\geq 0}\phi^2(2^{-q}\xi)\leq 1,$$
$$|p-q|\geq 2\Rightarrow \mathrm{supp}\ \phi(2^{-p}\cdot)\cap \mathrm{supp}\ \phi(2^{-q}\cdot)=\varnothing,$$

$$q\geq 1\Rightarrow \mathrm{supp}\ \chi\cap \mathrm{supp}\ \phi(2^{-q})=\varnothing.$$

On note

$$\Delta_{-1}v=\mathcal{F}^{-1}(\chi(\xi)\widehat{v}(\xi)),\quad \Delta_q v=\mathcal{F}^{-1}(\phi(2^{-q}\xi)\widehat{v}(\xi))\ \text{si}\ q\in\mathbb{N}.$$

$$\forall q\leq -2,\quad \Delta_q v=0\quad \text{ et pour tout } q\in\mathbb{Z},\ S_q v=\sum_{p\leq q-1}\Delta_p v.$$

Rappelons brièvement les espaces de Hölder :

Définition 2. *Soit r un nombre réel. On note C^r l'ensemble des distributions tempérées v telles que*

$$\|v\|_r=\sup_q 2^{qr}\|\Delta_q v\|_{L^\infty}<+\infty.$$

Si r est un entier on note C^r_* au lieu de C^r.

La proposition qui va suivre fournit une caractérisation des éléments de l'espace C_{LL} en termes d'estimations L^∞ de leurs troncatures en fréquence. Pour la preuve, voir par exemple [2].

Proposition 2. *Il existe une constante $C>0$ telle que pour toute fonction $v\in C_{LL}$ on ait :*

$$C^{-1}\|v\|_{LL}\leq \frac{\|\Delta_{-1}v\|_{L^\infty}}{\ell}+\sup_q\frac{\|\nabla S_q v\|_{L^\infty}}{2+q}\leq C\|v\|_{LL},$$
$$\|\Delta_q v\|_{L^\infty}\leq C\ell\|v\|_{LL}(2+q)2^{-q}.$$

Le lien entre l'espace de Zygmund C^1_* et C_{LL} est l'objet du corollaire suivant :

Corollaire 2. *L'espace C^1_* s'injecte continûment dans l'espace C_{LL}.*

Nous ferons usage à plusieurs reprises des deux lemmes suivants :

Lemme 1. *(Lemme de Gronwall) Soit f une fonction continue de $[0,\,T]$ dans $\mathbb{R}_+$et g, h deux fonctions de $L^1([0,\,T];\,\mathbb{R}_+)$. On suppose qu'il existe un réel positif a tel qu'on ait*

$$f(t)\leq a+\int_0^t g(\tau)d\tau+\int_0^t h(\tau)f(\tau)d\tau.$$

Alors, pour tout $t\in[0,T]$, on a

$$f(t)\leq e^{\int_0^t h(\tau)d\tau}\Big(a+\int_0^t e^{-\int_0^\tau h(\tau')d\tau'}g(\tau)d\tau\Big).$$

Le second lemme qu'on va énoncer, connu sous le nom du lemme d'Osgood, est une généralisation du lemme de Gronwall.

Lemme 2. *(Lemme d'Osgood) Soient ρ une fonction mesurable positive, γ une fonction positive localement intégrable et μ une fonction continue croissante positive. On suppose qu'il existe un réel positif a tel qu'on ait*

$$\rho(t) \leq a + \int_{t_0}^{t} \gamma(\tau)\mu(\rho(\tau))d\tau.$$

Si a est différent de zéro, alors on a

$$-\mathcal{M}(\rho(t)) + \mathcal{M}(a) \leq \int_{t_0}^{t} \gamma(\tau)d\tau \text{ avec } \mathcal{M}(x) = \int_x^1 \frac{dr}{\mu(r)}.$$

Si a est nul et si de plus $\displaystyle\int_0^1 \frac{dr}{\mu(r)} = +\infty$, alors ρ est identiquement nulle.

Dans ce qui suit nous allons fournir un lemme qui sera très présent dans la preuve des résultats de décroissance. On désigne par S_λ l'opérateur de troncature en fréquence défini par :

$$S_\lambda v = \sum_{p \leq [\log_2 \lambda \ell]} \Delta_p v. \tag{5}$$

La fonction $S_\lambda v$ est très régulière. Elle jouit en particulier des estimations décrites par le lemme ci-après, qui sont une conséquence de la proposition 2.

Lemme 3. *Il existe une constante $C_0 > 0$ telle que pour tout champ v dans C_{LL} et pour tout réel λ tel que $\lambda\ell \geq e$, on a*

$$\begin{aligned} \|S_\lambda v - v\|_{L^\infty} &\leq C_0 \lambda^{-1} \log(\lambda\ell) \|v\|_{LL}, \\ \|\nabla S_\lambda v\|_{L^\infty} &\leq C_0 \log(\lambda\ell) \|v\|_{LL}, \\ \|S_\lambda v\|_{LL} &\leq C_0 \|v\|_{LL}. \end{aligned}$$

Démonstration

D'après la proposition 2, on a

$$\begin{aligned} \|S_\lambda v - v\|_{L^\infty} &\leq \sum_{p > \log_2 \lambda\ell} \|\Delta_p v\|_{L^\infty} \\ &\leq C \sum_{p \geq \log_2 \lambda\ell} \frac{p}{2^p} \|v\|_{LL}. \end{aligned}$$

Le fait que $\displaystyle\sum_{p \geq n} \frac{p}{2^p} \approx \frac{n}{2^n}$ donne la première estimation. La deuxième estimation est donnée par la proposition 2. En ce qui concerne la preuve de la dernière inégalité il suffit, outre la caractérisation des éléments de C_{LL}, d'utiliser l'estimation $\|S_\lambda v\|_{L^\infty} \leq C\|v\|_{L^\infty}$.

Il s'agit maintenant d'introduire la notion de flot généralisé à deux paramètres et que l'on définit comme suit :

$$\psi_s(t,x) = x + \int_s^t v(\tau, \psi_s(\tau, x))d\tau, \quad \text{avec} \quad t,\, s \in \mathbb{R}_+ \text{ et } x \in \mathbb{R}^d. \tag{6}$$

Dans un écoulement fluide, $\psi_s(t,x)$ n'est autre que la position à l'instant t de la particule qui, à l'instant s, se trouve en x. Le théorème qu'on va énoncer répond à la question d'existence et d'unicité d'un flot à un champ de vecteurs qui n'est que logarithmiquement lipschitzien. Il décrit la dégradation de sa régularité en fonction du temps. Pour la preuve en détail, voir par exemple [3].

Théorème 4. *Soit v un champ de vecteurs appartenant à l'espace $L^1_{loc}(\mathbb{R}_+; C_{LL})$. Alors*

1. *pour tout $s \geq 0$, il existe une unique fonction ψ_s de $\mathcal{C}(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d; \mathbb{R}^d)$ solution de :*
$$\psi_s(t,x) = x + \int_s^t v(\tau, \psi_s(\tau,x))d\tau.$$
De plus, pour tout $t \in \mathbb{R}_+$
$$\psi_s(t,\cdot) - \mathrm{Id} \in C^{e^{-|\int_s^t \|v(\tau)\|_{LL}d\tau|}}.$$
De façon plus précise, on a
$$|x-y| \leq \ell e^{1-e^{V(t,s)}} \Rightarrow |\psi_s(t,x) - \psi_s(t,y)| \leq e\ell\Big(\frac{|x-y|}{e\ell}\Big)^{e^{-V(t,s)}}.$$
2. *Pour tout t et s positifs, $\psi_s(t,\cdot)$ est un homéomorphisme de $\mathbb{R}^d$ d'inverse $\psi_t(s,\cdot)$. De plus, si v est de divergence nulle, alors $\psi_s(t)$ laisse invariante la mesure de Lebesgue.*

Démonstration

On renvoie pour la preuve de la première partie au théorème 5.2.1 énoncé dans [3]. En ce qui concerne la conservation de la mesure, on utilise par exemple $S_\lambda v$ (donnée par (5)) comme une approximation régulière de la vitesse v et on montre que le flot correspondant converge uniformément vers le flot de v. Ceci est suffisant pour déduire que la propriété de conservation de la mesure, qui est vraie pour ces flots, est héritée par le flot limite.
En effet, Pour tout réel positif s et t, on désigne par $\psi_{s,\lambda}(t,.)$ le flot généralisé associé à $S_\lambda v$. Alors comme ce champ régularisé est lipschitzien et incompressible, on aura que le flot correspondant préserve la mesure de Lesbegue.
Dans ce qui suit on montrera un résultat de convergence uniforme de $\psi_{s,\lambda}(t)$ vers $\psi_s(t)$ et on verra comment ceci permet de conclure sur la conservation de la mesure par $\psi_s(t)$.
On a par l'inégalité triangulaire
$$|\psi_{s,\lambda}(t,x) - \psi_s(t,x)| \leq \epsilon(t,s)\Big(\int_s^t \|S_\lambda v(\tau) - v(\tau)\|_{L^\infty}d\tau + \int_s^t |v(\tau,\psi_{s,\lambda}(\tau,x)) - v(\tau,\psi_s(\tau,x)|d\tau\Big),$$
avec $\epsilon(t,s) = \mathrm{signe}(t-s)$. En posant $\rho_{s,\lambda}(t,x) = |\psi_{s,\lambda}(t,x) - \psi_s(t,x)|$, alors l'inégalité ci-dessus se réécrit grâce au lemme 3 sous la forme
$$\frac{\rho_{s,\lambda}(t,x)}{\ell} \leq V(t,s)\frac{\log\lambda\ell}{\lambda\ell} + \epsilon(t,s)\int_s^t \|v(\tau)\|_{LL}\mu\Big(\frac{\rho_{s,\lambda}(\tau,x)}{\ell}\Big)d\tau,$$
où l'on a posé $\mu(r) = r(1-\log r), 0 < r \leq 1$. Fixons un temps T strictement positif. Alors le lemme d'Osgood montre qu'il existe $\lambda(T)$ grand tel que, pour tout $\lambda \geq \lambda(T)$, pour tout $s,t \in [0,T]$, on a
$$\rho_{s,\lambda}(t,x) \leq C\ell\Big(V(t,s)\frac{\log\lambda\ell}{\lambda\ell}\Big)^{e^{-V(t,s)}}.$$
En fait, la contrainte sur λ provient de la condition $V(t,s)\frac{\log\lambda\ell}{\lambda\ell} \leq \exp\big(1-e^{V(t,s)}\big)$, qu'on peut l'avoir du moment qu'on a $V(T)\frac{\log\lambda\ell}{\lambda\ell} \leq \exp\big(1-e^{V(T)}\big)$. Sachant que $y \to y^{e^{-y}}$ est une fonction bornée sur $\mathbb{R}_+$, alors on aura
$$\forall\, s,\, t \in [0,T],\ \forall\lambda \geq \lambda(T),\ \|\rho_{s,\lambda}(t,.)\|_{L^\infty} \leq C\Big(\frac{\log\lambda\ell}{\lambda\ell}\Big)^{e^{-V(t,s)}}. \tag{7}$$

Par conséquent, pour tout t et s dans $[0,T]$ on a

$$\lim_{\lambda\to+\infty}\|\psi_{s,\lambda}(t,\cdot)-\psi_s(t,\cdot)\|_{L^\infty}=0.$$

Soit maintenant f une fonction continue et à support compact de $\mathbb{R}^d$ dans $\mathbb{R}$. Alors la conservation de la mesure par $\psi_{s,\lambda}(t)$ implique l'égalité

$$\int_{\mathbb{R}^d} f(\psi_{s,\lambda}(t,x))dx=\int_{\mathbb{R}^d} f(x)dx.$$

D'un autre côté, le théorème de la convergence dominée mène après un passage à la limite en λ à

$$\int_{\mathbb{R}^d} f(\psi_s(t,x))dx=\int_{\mathbb{R}^d} f(x)dx.$$

On peut étendre par de simples manipulations cette égalité à des fonctions de type $f=\mathbf{1}_\Omega$, où Ω est un ouvert borné. Ensuite par unicité du prolongement d'une mesure on montre l'identité pour des boréliens quelconques. ■

Comme conséquence de ce résultat, on a le corollaire suivant :

Corollaire 3. *Soit v un champ de vecteurs appartenant à l'espace $L^1_{loc}(\mathbb{R}_+; C_{LL})$. Alors pour tout $t\geq 0$,* $\psi(t,\cdot)$ et $\psi^{-1}(t,\cdot)$ appartiennent à $\mathrm{Id}+C^{e^{-V(t)}}$.

4. Propagé d'un ensemble par le flot.

La description de la manière dont se propage un ensemble donné par flot est d'une si grande importance. Elle permet de récupérer une minoration convenable dans le membre de gauche de l'inégalité (31). Elle est aussi d'un apport décisif lorsqu'on s'intéresse à l'extension de nos estimations à tout temps. Le lemme qu'on va présenter couvre plusieurs aspects de cette dynamique : nous faisons une description relative à des flots ψ et ψ_λ, associés respectivement à des champs de vecteurs v et $S_\lambda v$. Avant de fournir l'énoncé en question, nous définissons tout d'abord une quantité qui sera souvent intégrée dans nos estimations. On pose pour tout réel positif λ et pour tout temps $t\geq 0$

$$\bar\delta(t,\lambda)=2e\ell\Big(\frac{\log\lambda\ell}{\lambda\ell}\Big)^{\exp -C_0V(t)}.$$

Signalons d'un côté que cette quantité sera indexée par ν quand elle sera associée au champ de vecteurs v_ν et d'un autre côté que la constante C_0 est celle qui apparaît dans le lemme 3. Nous rappelons aussi la définition

$$\delta(t,h)=e\ell\big(\frac{h}{e\ell}\big)^{\exp V(t)}.$$

Lemme 4. *Il existe une constante $C_0>1$, telle que pour tout champ de vecteurs v appartenant à l'espace $L^1_{loc}(\mathbb{R}_+; C_{LL})$ et pour tout ensemble A de $\mathbb{R}^d$ on a*

1. $\psi(t,\,A)^c_h\subset\psi(t,\,A^c_{\delta(t,h)}),\ \forall h\in[0,\,\ell]$.
2. $\psi(t,\,A^c_h)\subset(\psi(t,\,A))^c_{\delta(t,h)},\ \forall h\in[0,\,\ell]$.
3. *Soient λ un réel tel que $\lambda\ell\geq e$ et $h\in[0,\,\ell]$. Alors pour tout temps positif t vérifiant*

$$C_0V(t)\frac{\log\lambda\ell}{\lambda\ell}<e^{1-\exp C_0V(t)},$$

on a

$$\psi_\lambda^{-1}(t)\circ\psi(t,\,A^c_h)\subset A^c_{h-\bar\delta(t,\lambda)}.$$

De plus, pour tout réel τ positif, on a

$$\psi_{\tau,\lambda}^{-1}(t) \circ \psi(t,\, A_h^c) \subset \psi(\tau,\, A)^c_{\delta(\tau,h)-\bar{\delta}(t,\lambda)},$$

avec $\psi_{\tau,\lambda}(t,\cdot)$ le flot associé à $S_\lambda v$ valant l'identité à l'instant τ et $\psi_\lambda(t) = \psi_{0,\lambda}(t,\cdot)$.

4. *Soient λ un nombre réel vérifiant les hypothèses de la partie 3. et $h \in [0,\, \ell]$. Alors pour tous les réels positifs $0 \le \tau \le t$, on a*

$$\psi_{\tau,\lambda}\Big(t,\, \big(\psi(\tau,\, A)\big)^c_h\Big) \subset \Big(\psi_\lambda(t,\, A)\Big)^c_{\delta^{(2)}(t,h)-2\bar{\delta}(t,\lambda)},$$

à condition que $2\bar{\delta}(t,\lambda) \le \delta^{(2)}(t,h)$. On note par $\delta^{(2)}(t,h) = \delta(t,\delta(t,h))$.

Démonstration

1. Considérons un élément y de $\psi(t,\, A)^c_h$. Alors il existe $x' \in \mathbb{R}^d$ tel qu'on ait $y = \psi(t,x')$. De plus, on a pour tout x dans A

$$|\psi(t,x') - \psi(t,x)| \ge h.$$

D'autre part le théorème 4 montre que

$$\frac{|x'-x|}{\ell} \le e^{1-e^{V(t)}} \Rightarrow \frac{|\psi(t,x') - \psi(t,x)|}{\ell} \le e\Big(\frac{|x'-x|}{\ell e}\Big)^{e^{-V(t)}}.$$

Donc si $|x'-x| \le e^{1-e^{V(t)}}\ell$, alors $|x'-x| \ge e\ell(\dfrac{h}{e\ell})^{e^{V(t)}}$. Dans l'autre cas on aura

$\dfrac{|x'-x|}{e\ell} \ge e^{-e^{V(t)}} \ge (\dfrac{h}{e\ell})^{e^{V(t)}}$, dès que $h \in [0,\, \ell]$. Ce qui donne le résultat.

2. La preuve se fait d'une façon identique à 1., sauf qu'on applique le théorème 4 dans le cas particulier correspondant à $\psi_t(0,\cdot) = \psi^{-1}(t,\cdot)$.

3. Soient $x \in A_h^c$ et $x_0 \in A$. Alors par une simple application de l'inégalité triangulaire on aura

$$\begin{aligned} |\psi_\lambda^{-1}(t) \circ \psi(t)(x) - x_0| &\ge |x - x_0| - |\psi_\lambda^{-1}(t) \circ \psi(t)(x) - x| \\ &\ge h - |\psi_\lambda^{-1}(t) \circ \psi(t)(x) - x|. \end{aligned}$$

L'objet de ce qui suit est de majorer la dernière quantité du membre de droite. Pour réaliser un tel objectif, on aura besoin d'une estimation uniforme en espace de la quantité

$$\rho_\lambda(t,x) \stackrel{déf}{=} |\psi(t,x) - \psi_\lambda(t,x)|.$$

Plus précisément, on va montrer que pour tout temps $t \ge 0$ et pour tout réel $\lambda \ge \dfrac{e}{\ell}$, tels que

$$C_0 V(t) \frac{\log \lambda\ell}{\lambda\ell} < e^{1-e^{V(t)}},$$

alors on aura l'estimation

$$\|\rho_\lambda(t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)} \le \bar{\delta}(t,\lambda). \tag{8}$$

Revenons à la formulation intégrale des flots et écrivons

$$\psi(t,x) - \psi_\lambda(t,x) = \int_0^t v(s,\psi(s,x)) - S_\lambda v(s,\psi_\lambda(s,x))ds.$$

Le module de cette dernière intégrale est majoré par

$$\int_0^t |v(s,\psi_\lambda(s,x)) - S_\lambda v(s,\psi_\lambda(s,x))|ds + \int_0^t |v(s,\psi(s,x)) - v(s,\psi_\lambda(s,x))|ds.$$

Ainsi la fonction ρ_λ vérifie grâce au lemme 3 l'inégalité fonctionnelle suivante

$$\rho_\lambda(t,x) \leq C_0 V(t)\frac{\log \lambda\ell}{\lambda} + \int_0^t |v(s,\psi(s,x)) - v\big(s,\psi_\lambda(s,x)\big)|ds.$$

Pour transformer l'intégrale en une expression rendant exploitable le lemme d'Osgood, nous devons prendre quelques précautions sur la taille de ρ_λ. Pour cela, on fixe un temps arbitraire positif T et on prend un réel λ satisfaisant

$$\lambda\ell \geq e \quad \text{et} \quad C_0 V(T)\frac{\log \lambda\ell}{\lambda\ell} < e^{1-\exp V(T)}. \tag{9}$$

On va montrer que dans un tel contexte $\rho_\lambda(t,x) < \ell$, pour tout temps t appartenant à $[0,T]$. Pour ce faire, on note

$$I = \big\{t \in [0,\, T];\, \forall t' \in [0,\, t],\, \rho_\lambda(t',\, x) < \ell\big\} \quad \text{et} \quad T^\star = \sup I.$$

Une simple constatation montre que I est un intervalle non vide de la forme $[0, T^*)$. On se propose dans ce qui suit de démontrer que $T^* \in I$. La continuité de ρ_λ implique que I est un ouvert de $[0,\, T]$. Donc si on démontre que $T^\star$ est dans I alors on a nécessairement $T^\star = T$. Pour tout $t < T^\star$, ρ_λ vérifie l'inégalité fonctionnelle suivante

$$\frac{\rho_\lambda(t,x)}{\ell} \leq C_0 V(T)\frac{\log \lambda\ell}{\lambda\ell} + \int_0^t \|v(s)\|_{LL}\mu\Big(\frac{\rho_\lambda(s,x)}{\ell}\Big)ds.$$

où l'on désigne par $\mu(r) = r(1-\log r), 0 < r \leq 1$. Une application du lemme d'Osgood donne

$$\forall t \in I, \quad \frac{\rho_\lambda(t,x)}{\ell} \leq e\Big(C_0 V(T)\frac{\log \lambda\ell}{\lambda\ell e}\Big)^{e^{-V(t)}}.$$

Ce qui entraîne, grâce à (9) et à la continuité de ρ_λ, que pour tout réel $t \in [0,\, T^\star]$, on a

$$\frac{\rho_\lambda(t,x)}{\ell} \leq e\Big(C_0 V(T)\frac{\log \lambda\ell}{\lambda\ell e}\Big)^{e^{-V(T)}} < 1.$$

Ce qui prouve que $T^\star \in I$. En particulier, pour tout t vérifiant $C_0 V(t)\frac{\log \lambda\ell}{\lambda\ell} < e^{1-e^{V(t)}}$, on a

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}^d, \quad \rho_\lambda(t,x) &\leq e\ell\Big(C_0 V(t)\frac{\log \lambda\ell}{\lambda\ell e}\Big)^{e^{-V(t)}} \\ &\leq \bar{\delta}(t,\lambda). \end{aligned} \tag{10}$$

Au passage, on a utilisé les deux faits suivants : pour tout réel positif y on a $y^{e^{-y}} \leq 2$. La fonction $y \to \alpha^{e^{-y}}$ est croissante si $\alpha \in [0,1]$. Ainsi la preuve de (8) est achevée.

Soit maintenant t un réel positif et $\lambda\ell \geq e$ satisfaisant

$$C_0 V(t)\frac{\log \lambda\ell}{\lambda\ell} < e^{1-e^{C_0 V(t)}}. \tag{11}$$

Dans ces conditions on peut écrire, grâce au théorème 4 appliqué avec le champ $S_\lambda v$, que

$$
\begin{aligned}
|\psi_\lambda^{-1}(t)\circ\psi(t)(x)-x| &= |\psi_\lambda^{-1}(t,\psi(t,x))-\psi_\lambda^{-1}(t,\psi_\lambda(t,x))|\\
&\le e\ell\Big(\frac{\rho_\lambda(t,x)}{e\ell}\Big)^{e^{-\int_0^t\|S_\lambda v(s)\|_{LL}ds}},
\end{aligned}
\tag{12}
$$

sous réserve que $\rho_\lambda(t,x)\le \ell e^{1-e^{\int_0^t\|S_\lambda v(s)\|_{LL}ds}}$. Or d'après (10) cette condition est satisfaite si

$$
C_0V(t)\frac{\log\lambda\ell}{\lambda\ell e}\le e^{-\exp\big(\int_0^t(\|v(s)\|_{LL}+\|S_\lambda v(s)\|_{LL})ds\big)}.
\tag{13}
$$

Quitte à utiliser la caractérisation dyadique des élements de C_{LL} et à ajuster les constantes, on en déduit alors (13) grâce à (11). Enfin, on aura par l'intermédiaire des inégalités (10) et (12)

$$
\begin{aligned}
\forall\, x\in\mathbb{R}^d\ ;\quad |\psi_\lambda^{-1}(t)\circ\psi(t)(x)-x| &\le e\ell\Big(C_0V(t)\frac{\log\lambda\ell}{\lambda\ell e}\Big)^{e^{-C_0V(t)}}\\
&\le \bar\delta(t,\lambda).
\end{aligned}
$$

Concernant le second point, on utilise la décomposition suivante

$$
\forall\,\tau,\,t\in\mathbb{R}_+;\quad \psi(t,\,x)=\psi_\tau(t,\,\psi(\tau,x)).
\tag{14}
$$

Ainsi, on déduit à partir de 2. du lemme 4 que

$$
\begin{aligned}
\psi_{\tau,\lambda}^{-1}(t)\circ\psi(t,\,A_h^c) &\subset \psi_{\tau,\lambda}^{-1}\circ\psi_\tau\big(t,(\psi(\tau,\,A))_{\delta(\tau,h)}^c\big)\\
&\subset \big(\psi(\tau,\,A)\big)^c_{\delta(\tau,h)-\bar\delta(t,\lambda)}.
\end{aligned}
$$

4. En utilisant successivement le premier point 1. du lemme 4 et l'identité (14) on aura l'inclusion suivante

$$
\psi_{\tau,\lambda}\Big(t,\big(\psi(\tau,\,A)\big)_h^c\Big)\subset\psi_{\tau,\lambda}\circ\psi_\tau^{-1}\Big(t,\psi(t,\,A^c_{\delta(\tau,h)})\Big).
$$

D'autre part le second point 2. et la première partie du 3. du même lemme permettent d'avoir

$$
\psi_{\tau,\lambda}\circ\psi_\tau^{-1}\Big(t,\psi(t,\,A^c_{\delta(\tau,h)})\Big)\subset\big(\psi(t,\,A)\big)^c_{\delta(t,\delta(\tau,h))-\bar\delta(t,\lambda)}.
$$

Enfin, on utilise le fait que $\delta^{(2)}(t,h)\le\delta(t,\,\delta(\tau,h))$, pour $0\le\tau\le t$ ainsi que l'inclusion

$$
(\psi(t,\,A))_h^c\subset\big(\psi_\lambda(t,\,A)\big)^c_{h-\bar\delta(t,\lambda)},
$$

pour déduire que

$$
\big(\psi(t,\,A)\big)^c_{\delta(t,\delta(\tau,h))-\bar\delta(t,\lambda)}\subset\big(\psi_\lambda(t,\,A)\big)_{\delta^{(2)}(t,h)-2\bar\delta(t,\lambda)}.
$$

Le lemme 4 est ainsi démontré.

5. **Preuve du théorème 2**

Nous allons dans cette section donner une preuve du théorème 2. Le plan de la démonstration s'organise de la manière suivante : on régularise en premier lieu le champ de vecteurs v_ν via l'opérateur S_λ défini par (5). Ensuite on tronque la solution par des fonctions exponentielles et on procède à une estimation d'énergie suivie d'une application du lemme 4. Enfin, on choisit judicieusement la valeur de λ en fonction des paramètres ν et t et on détermine le domaine de variations des paramètres ν et h.

Estimation en dehors du support $F_{t,\nu}$

On commence par écrire le système (TD_ν) sous la forme suivante

$$\begin{cases} \partial_t a_\nu + S_\lambda v_\nu \cdot \nabla a_\nu - \nu \Delta a_\nu = (S_\lambda - \mathrm{Id}) v_\nu \cdot \nabla a_\nu \\ a_{\nu|t=0} = a^0 \in L^p(\mathbb{R}^d). \end{cases}$$

On suppose dans ce qui suit que le support de la donnée initiale est un compact F_0 et l'on introduit la fonction g_λ, définie par :

$$g_\lambda(x) = \lambda \min\big\{\ell,\ \mathrm{dist}(x,\, F_0)\big\}\cdot$$

Cette fonction joue un rôle important dans la première phase de la preuve car les troncatures que nous allons introduire sont modelées sur cette fonction. L'une de ses particularités est qu'elle est nulle sur F_0 et constante loin de cet ensemble. Mais elle n'est pas partout dérivable : elle est seulement lipschitzienne. Donc, pour mener un calcul sans avoir de souci de régularité, on la régularise par un noyau de convolution (θ_λ) de type

$$\theta_\lambda(x) = \lambda^d \theta(\lambda \ell x), \tag{15}$$

où θ est une fonction régulière supportée dans $B(0,\ell)$, prenant ses valeurs dans $[0,\ 1]$ et vérifiant en plus $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^d} \theta(x) \frac{dx}{\ell^d} = 1$. Introduisons la fonction

$$f_\lambda = g_\lambda * \theta_\lambda.$$

Remarquons que cette fonction est de classe C^∞ et conserve en outre "quasiment" les mêmes propriétés de g_λ. Par exemple pour tout λ supérieur à ℓ^{-1}, elle vaut $\lambda\ell$ sur $(F_0)^c_{2\ell}$. On associe à f_λ la fonction $\phi_{\lambda,\nu}$, qui décrit son évolution par le flot $\psi_{\lambda,\nu}$ du champ régularisé $S_\lambda v_\nu$. Elle a pour expression

$$\phi_{\lambda,\nu}(t,x) = f_\lambda(\psi^{-1}_{\lambda,\nu}(t,x)).$$

Posons $\Phi_{\lambda,\nu}(t,x) = \exp\big(\phi_{\lambda,\nu}(t,x)\big)$. Alors on peut voir facilement qu'elle est constante le long des lignes de flot de $S_\lambda v_\nu$. Par conséquent, elle vérifie l'équation

$$\partial_t \Phi_{\lambda,\nu}(t,x) + S_\lambda v_\nu \cdot \nabla \Phi_{\lambda,\nu}(t,x) = 0.$$

Ainsi un calcul élémentaire montre que $a\Phi_{\lambda,\nu}$ vérifie l'équation suivante

$$\big(\partial_t + S_\lambda v_\nu \cdot \nabla - \nu\Delta\big)(a_\nu \Phi_{\lambda,\nu}) = \big((S_\lambda - \mathrm{Id})v_\nu \cdot \nabla a_\nu\big)\Phi_{\lambda,\nu} - \nu a_\nu \Delta\Phi_{\lambda,\nu} - 2\nu \nabla a_\nu \cdot \nabla \Phi_{\lambda,\nu}.$$

En faisant le produit scalaire L^2 avec $a_\nu \Phi_{\lambda,\nu} |a_\nu \Phi_{\lambda,\nu}|^{p-2}$ et en se servant de quelques intégrations par parties, utilisant l'incompressibilté de la vitesse régularisée $S_\lambda v_\nu = 0$, on trouve

$$\frac{1}{p}\frac{d}{dt}\|a_\nu \Phi_{\lambda,\nu}(t)\|^p_{L^p} + \nu(p-1)\big\|\nabla(a_\nu\Phi_{\lambda,\nu})|a_\nu\Phi_{\lambda,\nu}|^{\frac{p-2}{2}}\big\|^2_{L^2} = \sum_{j=1}^3 I_j, \tag{16}$$

où l'on a posé

$$\begin{aligned} I_1 &= p^{-1}\int (S_\lambda v_\nu - v_\nu)\cdot\nabla\big(|a^p_\nu|\big)\left|\Phi_{\lambda,\nu}\right|^p dx, \\ I_2 &= -\nu \int |a_\nu|^p\ \Phi_{\lambda,\nu}|\Phi_{\lambda,\nu}|^{p-2}\Delta\Phi_{\lambda,\nu}\, dx, \\ I_3 &= -2\nu\int \nabla a_\nu \cdot \nabla\Phi_{\lambda,\nu}\quad a_\nu\Phi_{\lambda,\nu}\left|a_\nu\Phi_{\lambda,\nu}\right|^{p-2} dx. \end{aligned}$$

La condition div $(S_\lambda - \mathrm{Id}\,)v_\nu = 0$, implique après une intégration par parties,

$$I_1 = -\int (S_\lambda v_\nu - v_\nu)\cdot\nabla\Phi_{\lambda,\nu}\;\;\Phi_{\lambda,\nu}\big|\Phi_{\lambda,\nu}\big|^{p-2}\big|a_\nu\big|^p dx.$$

Ainsi le fait que $\nabla\Phi_{\lambda,\nu}(t,x) = \Phi_\lambda(t,x)\nabla\phi_{\lambda,\nu}(t,x)$, permet d'avoir

$$I_1 = -\int (S_\lambda v_\nu - v_\nu)\cdot\nabla\phi_{\lambda,\nu}\big|a_\nu\Phi_{\lambda,\nu}\big|^p dx. \tag{17}$$

En ce qui concerne le second terme I_2, on utilise l'identité

$$\Delta\Phi_{\lambda,\nu} = (\Delta\phi_{\lambda,\nu} + |\nabla\phi_{\lambda,\nu}|^2)\Phi_{\lambda,\nu},$$

qui entraîne

$$I_2 = -\nu\int \big|a_\nu\Phi_{\lambda,\nu}\big|^p\big(\Delta\phi_{\lambda,\nu} + |\nabla\phi_{\lambda,\nu}|^2\big)dx. \tag{18}$$

Pour évaluer I_3, on recourt dans une première étape à une simple intégration par parties et l'on trouve

$$I_3 = \frac{2\nu}{p}\int |a_\nu|^p\ \mathrm{div}(\nabla\phi_{\lambda,\nu}|\Phi_{\lambda,\nu}|^p)\ dx.$$

En développant un calcul simple, on parvient à l'identité

$$\mathrm{div}\ \big(\nabla\phi_{\lambda,\nu}|\Phi_{\lambda,\nu}|^p\big) = \big(\Delta\phi_{\lambda,\nu} + p|\nabla\phi_{\lambda,\nu}|^2\big)|\Phi_{\lambda,\nu}|^p.$$

Ce qui donne

$$I_3 = \frac{2\nu}{p}\int \big|a_\nu\Phi_{\lambda,\nu}\big|^p\big(\Delta\phi_{\lambda,\nu} + p|\nabla\phi_{\lambda,\nu}|^2\big)dx. \tag{19}$$

Si l'on reporte dans (16) les nouvelles expressions des I_j données par (17), (18) et (19), alors on aura

$$\begin{aligned}\frac{1}{p}\frac{d}{dt}\|a_\nu\Phi_{\lambda,\nu}(t)\|_{L^p}^p \quad &+ \quad \nu(p-1)\big\|\nabla(a_\nu\Phi_{\lambda,\nu})|a_\nu\Phi_{\lambda,\nu}|^{\frac{p-2}{2}}\big\|_{L^2}^2 = \\ &- \quad \int (S_\lambda v_\nu - v_\nu)\cdot\nabla\phi_{\lambda,\nu}\big|a_\nu\Phi_{\lambda,\nu}\big|^p dx \\ &+ \quad \nu\int \big|a_\nu\Phi_{\lambda,\nu}\big|^p\big((\frac{2}{p}-1)\Delta\phi_{\lambda,\nu} + |\nabla\phi_{\lambda,\nu}|^2\big)\ dx.\end{aligned}$$

En conséquence on trouve

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\|a_\nu\Phi_{\lambda,\nu}(t)\|_{L^p}^p \le p\Big(\|S_\lambda v_\nu(t) - v_\nu(t)\|_{L^\infty}\|\nabla\phi_{\lambda,\nu}(t)\|_{L^\infty} \quad &+ \quad \nu\big(\|\nabla\phi_\lambda(t)\|_{L^\infty}^2 + \|\Delta\phi_{\lambda,\nu}\|_{L^\infty}\big)\Big) \\ &\times \quad \|a_\nu\Phi_{\lambda,\nu}(t)\|_{L^p}^p.\end{aligned} \tag{20}$$

Dans le but de pouvoir appliquer le lemme de Gronwall, nous allons fournir des estimations L^∞ de $\nabla\phi_{\lambda,\nu}$ et $\Delta\phi_{\lambda,\nu}$. Les lois de dérivations et d'estimations dans un produit de convolution et le fait que $\|\nabla g_\lambda\|_{L^\infty} \le \lambda$, permettent d'avoir

$$\begin{aligned}\|\nabla\phi_{\lambda,\nu}(t)\|_{L^\infty} \quad &\le \quad \|\nabla f_\lambda\|_{L^\infty}\|\nabla\psi_{\lambda,\nu}^{-1}(t)\|_{L^\infty}, \\ &\le \quad \lambda\|\nabla\psi_{\lambda,\nu}^{-1}(t)\|_{L^\infty}.\end{aligned} \tag{21}$$

De même, on a l'estimation

$$
\begin{aligned}
\|\nabla^2\phi_{\lambda,\nu}\|_{L^\infty} &\leq \|\nabla^2 f_\lambda\|_{L^\infty}\|\nabla\psi^{-1}_{\lambda,\nu}\|^2_{L^\infty}+\|\nabla f_\lambda\|_{L^\infty}\|\nabla^2\psi^{-1}_{\lambda,\nu}\|_{L^\infty}\\
&\leq \|\nabla g_\lambda\|_{L^\infty}\|\nabla\theta_\lambda\|_{L^1}\|\nabla\psi^{-1}_{\lambda,\nu}\|^2_{L^\infty}+\lambda\|\nabla^2\psi^{-1}_{\lambda,\nu}\|_{L^\infty}\\
&\leq C\lambda^2\|\nabla\psi^{-1}_{\lambda,\nu}\|^2_{L^\infty}+\lambda\|\nabla^2\psi^{-1}_{\lambda,\nu}\|_{L^\infty}. \qquad (22)
\end{aligned}
$$

Afin de parvenir à notre objectif, il nous reste d'établir des estimations sur les dérivées premières et secondes de l'inverse du flot. Le lemme 3 implique que pour tout t et s dans $\mathbb{R}$ on a

$$
\begin{aligned}
\|\nabla\psi_{\lambda,\nu}(s,t)\|_{L^\infty} &\leq e^{|\int_s^t\|\nabla S_\lambda v_\nu(\tau)\|_{L^\infty}d\tau|}\\
&\leq (\lambda\ell)^{C_0|V_\nu(t,s)|}. \qquad (23)
\end{aligned}
$$

Sachant que $\psi^{-1}_{\lambda,\nu}(t)=\psi_{\lambda,\nu}(t,0)$, alors on aura

$$
\begin{aligned}
\|\nabla\psi^{-1}_{\lambda,\nu}(t)\|_{L^\infty} &\leq e^{\int_0^t\|\nabla S_\lambda v_\nu(s)\|_{L^\infty}ds}\\
&\leq (\lambda\ell)^{C_0V_\nu(t)}. \qquad (24)
\end{aligned}
$$

En conséquence des estimations (21) et (24), on a pour tout t positif

$$
\|\nabla\phi_{\lambda,\nu}(t)\|_{L^\infty}\leq\lambda(\lambda\ell)^{C_0V_\nu(t)}. \qquad (25)
$$

Pour estimer $\nabla^2\psi^{-1}_{\lambda,\nu}$, on dérive deux fois l'équation (6) et l'on trouve

$$
\begin{aligned}
\|\nabla^2\psi_{\lambda,\nu}(s,t)\|_{L^\infty} &\leq \Big|\int_s^t\|\nabla^2\psi_{\lambda,\nu}(s,\tau)\|_{L^\infty}\|\nabla S_\lambda v_\nu(\tau)\|_{L^\infty}d\tau\Big|\\
&+\Big|\int_s^t\|\nabla\psi_{\lambda,\nu}(s,\tau)\|^2_{L^\infty}\|\nabla^2 S_\lambda v_\nu(\tau)\|_{L^\infty}d\tau\Big|.
\end{aligned}
$$

En utilisant les lemmes de Gronwall et Bernstein, combinés avec l'estimation (23), on trouve que pour tout temps positif t

$$
\begin{aligned}
\|\nabla^2\psi^{-1}_{\lambda,\nu}(t)\|_{L^\infty} &\leq \int_0^t e^{\int_\tau^t\|\nabla S_\lambda v_\nu(\tau')\|_{L^\infty}d\tau'}\|\nabla^2 S_\lambda v_\nu(\tau)\|_{L^\infty}\|\nabla\psi_{\lambda,\nu}(t,\tau)\|^2_{L^\infty}d\tau\\
&\leq C\lambda(\lambda\ell)^{3C_0V(t)}\int_0^t e^{-\int_0^\tau\|\nabla S_\lambda v_\nu(\tau')\|_{L^\infty}d\tau'}\|\nabla S_\lambda v_\nu(\tau)\|_{L^\infty}d\tau\\
&\leq C\lambda(\lambda\ell)^{3C_0V_\nu(t)}. \qquad (26)
\end{aligned}
$$

Si l'on insère les inégalités (24) et (26) dans l'estimation (22), alors on aura

$$
\|\nabla^2\phi_{\lambda,\nu}(t)\|_{L^\infty}\leq C\lambda^2(\lambda\ell)^{3C_0V_\nu(t)}. \qquad (27)
$$

Ainsi l'inégalité différentielle (20) qui régit l'énergie L^p peut se réécrire, via (25) et (27), sous la forme

$$
\frac{d}{dt}\|a_\nu\Phi_{\lambda,\nu}(t)\|^p_{L^p}\leq C\,p\Big(\|v_\nu(t)\|_{LL}(\lambda\ell)^{C_0V_\nu(t)}\log\lambda\ell+\nu\lambda^2(\lambda\ell)^{3C_0V_\nu(t)}\Big)\|a\Phi_{\lambda,\nu}(t)\|^p_{L^p}.
$$

Une application du Lemme de Gronwall associée à l'observation

$$
C_0\log(\lambda\ell)\int_0^t\|v_\nu(t')\|_{LL}(\lambda\ell)^{C_0V_\nu(t')}dt'=(\lambda\ell)^{C_0V_\nu(t)}-1,
$$

permet d'établir le résultat qui suit

$$
\|a_\nu\Phi_{\lambda,\nu}(t)\|_{L^p}\leq\|a^0e^{f_\lambda}\|_{L^p}\exp C\Big((\lambda\ell)^{C_0V_\nu(t)}+\nu t\lambda^2(\lambda\ell)^{3C_0V_\nu(t)}\Big). \qquad (28)
$$

Au passage, on a utilisé le fait que $t \to \lambda^{\alpha V_\nu(t)}$ est croissante pour tout réel positif α et pour tout $\lambda \geq 1$. Dans une première étape, on va montrer l'existence d'une constante strictement positive, notée toujours C, telle qu'on ait

$$\sup_{\lambda>0} \|e^{f_\lambda}\|_{L^\infty(F_0)} \leq C. \tag{29}$$

Pour ce faire, il suffit de montrer que pour tout $\lambda > 0$,

$$\|g_\lambda * \theta_\lambda - g_\lambda\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)} \leq C. \tag{30}$$

Cette alternative est justifiée par le fait que la fonction g_λ est, par construction, nulle sur F_0. Pour prouver (30), on écrit la différence sous une forme intégrale et on se sert du fait que la fonction g_λ est $\lambda-$lipschitzienne :

$$\begin{aligned} \Big| f_\lambda(x) - g_\lambda(x) \Big| &= \Big| \int \big(g_\lambda(x-y) - g_\lambda(x)\big)\theta_\lambda(y)dy \Big| \\ &\leq \lambda \int |y|\theta_\lambda(y)dy = \ell^{-1-d} \int |y|\theta(y)dy. \end{aligned}$$

Ainsi la preuve de (30) est achevée. En reportant (30) dans (28), on parvient à l'inégalité

$$\|a_\nu \Phi_{\lambda,\nu}(t)\|_{L^p(\psi_\nu(t,(F_0)^c_{\delta_\nu(t,h)}))} \leq C\|a^0\|_{L^p} \exp C\Big((\lambda\ell)^{C_0 V_\nu(t)} + \nu t \lambda^2 (\lambda\ell)^{3C_0 V_\nu(t)}\Big). \tag{31}$$

À ce stade de la démonstration, il s'agit de minorer adéquatement $\Phi_{\lambda,\nu}(t,\cdot)$ uniformément sur l'ensemble $\psi_\nu\big(t,(F_0)^c_{\delta_\nu(t,h)}\big)$. Pour y parvenir, rappelons tout d'abord l'inclusion citée dans la partie 3. du lemme 4 et qui est donnée, sous les mêmes conditions sur ν et h, par

$$\psi^{-1}_{\lambda,\nu}(t) \circ \psi_\nu\big(t,(F_0)^c_{\delta_\nu(t,h)}\big) \subset (F_0)^c_{\delta_\nu(t,h)-\bar{\delta}_\nu(t,\lambda)}. \tag{32}$$

Par conséquent, pour tout x appartenant à l'ensemble $\psi_\nu\big(t,(F_0)^c_{\delta_\nu(t,h)}\big)$, on a

$$g_\lambda(\psi^{-1}_{\lambda,\nu}(t,x)) \geq \lambda(\delta_\nu(t,h) - \bar{\delta}_\nu(t,\lambda)). \tag{33}$$

Ainsi en combinant les inégalités (30) et (33), on trouve que pour tout $x \in \psi_\nu\big(t,(F_0)^c_{\delta_\nu(t,h)}\big)$

$$\Phi_{\lambda,\nu}(t,x) \geq e^{\lambda(\delta_\nu(t,h)-\bar{\delta}_\nu(t,\lambda))-C}. \tag{34}$$

En reportant (34) dans (31) et en utilisant l'inclusion $(F_{t,\nu})^c_h \subset \psi_\nu\big(t,(F_0)^c_{\delta_\nu(t,h)}\big)$, on aboutit à

$$\begin{aligned} \big\|a_\nu(t)\big\|_{L^p((F_{t,\nu})^c_h)} \leq\; & C\big\|a^0\big\|_{L^p} \exp\bigg(C\lambda\ell\Big((\lambda\ell)^{(C_0V_\nu(t)-1)} + \frac{\nu t}{\ell^2}(\lambda\ell)^{1+3C_0V_\nu(t)} + \\ & + \frac{\bar{\delta}_\nu(t,\lambda) - \delta_\nu(t,h)}{C\ell}\Big)\bigg). \end{aligned} \tag{35}$$

En analysant l'expression (35) et essentiellement la quantité qui est à l'intérieure de l'exponentielle, on tire deux faits importants qui vont permettre d'établir un résultat local de décroissance exponentielle. Le premier fait concerne la possibilité d'avoir une puissance négative dans la quantité $(\lambda\ell)^{C_0V_\nu(t)-1}$ mais uniquement pour des temps proches de zéro. Alors que le second est relié à la présence d'une quantité négative de type $-\delta_\nu(t,h)$. Ainsi, la contrainte $C_0V_\nu(t) < 1$ paraît inévitable pour assurer la décroissance. Désormais, on se restreint à des temps satisfaisant la condition qu'on vient de mentionner et on choisit λ de la manière suivante

$$\lambda\ell = \Big(\frac{\ell^2}{\nu t}\Big)^{\frac{1}{2+2C_0V_\nu(t)}}. \tag{36}$$

En injectant (36) dans (35), on trouve

$$\big\|a_\nu(t)\big\|_{L^p((F_{t,\nu})^c_h)} \le C\|a^0\|_{L^p} \exp\Big(\Big(\frac{\ell^2}{\nu t}\Big)^{\frac{1}{2+2C_0V_\nu(t)}}\Big(C\big(\frac{\nu t}{\ell^2}\big)^{\frac{1-C_0V_\nu(t)}{2+2C_0V(t)}} + \frac{\bar{\delta_\nu}(t,\lambda)-\delta_\nu(t,h)}{\ell}\Big)\Big)\cdot$$

Si l'on impose successivement les conditions suivantes

$$\bar{\delta_\nu}(t,\lambda) \le \frac{1}{2}\delta_\nu(t,h) \quad \text{et} \quad \big(\frac{\nu t}{\ell^2}\big)^{\frac{1-C_0V_\nu(t)}{4}} \le \frac{\delta_\nu(t,h)}{4C\ell}, \tag{37}$$

alors on obtient l'estimation

$$\big\|a_\nu(t)\big\|_{L^p\big((F_{t,\nu})^c_h\big)} \le C\|a^0\|_{L^p} \exp\Big(-\big(\frac{\ell^2}{\nu t}\big)^{\frac{1}{2+2C_0V(t)}}\frac{\delta_\nu(t,h)}{4\ell}\Big)\cdot \tag{38}$$

Pour déduire l'estimation figurant dans le théorème 2, il suffit de remplacer $\delta_\nu(t,h)$ par son expression. Occupons-nous dans cette phase ultime de la preuve des conditions que doivent satisfaire les paramètres ν, λ et h. Elles sont données par

$$C_0V_\nu(t)\frac{\log\lambda\ell}{\lambda\ell} \le e^{1-\exp C_0V_\nu(t)}, \quad \lambda\ell = \Big(\frac{\ell^2}{\nu t}\Big)^{\frac{1}{2+2C_0V_\nu(t)}} \ge e \quad \text{et} \quad (37). \tag{39}$$

On rappelle que la première condition est dictée par la partie 3. du lemme 4.
Sachant que pour tout x positif, on a

$$\log x \le \sqrt{x},$$

alors la première condition mentionnée dans (39) est satisfaite du moment que

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda\ell}} \le \frac{e^{1-\exp C_0V_\nu(t)}}{C_0V_\nu(t)}\cdot$$

En remplaçant dans cette inégalité $\lambda\ell$ par son expression, on trouve que

$$0 \le \frac{\nu t}{\ell^2} \le \Big(\frac{e^{1-e^{C_0V_\nu(t)}}}{C_0V_\nu(t)}\Big)^{4+4C_0V_\nu(t)}.$$

Or $C_0V_\nu(t) \le 1$. Donc en prenant l'infimum de la quantité de droite, on voit qu'il suffit de prendre ν tel que

$$0 \le \frac{\nu t}{\ell^2} \le e^{-8e} \quad \text{et} \quad t \in [0,\, T_\nu]. \tag{40}$$

D'un autre côté, la première condition figurant dans (37) est réalisée si l'on impose

$$\frac{\nu t}{\ell^2} \le \Big(\frac{\delta_\nu(t,h)}{4e\ell}\Big)^{8e}\cdot$$

Cette contrainte est moins forte que celle déduite à partir de la seconde condition mentionnée dans (37). Celle dont il s'agit est décrite par

$$\frac{\nu t}{\ell^2} \le \Big(\frac{\delta_\nu(t,h)}{C\ell}\Big)^{\frac{C}{1-C_0V(t)}}. \tag{41}$$

Enfin quitte à prendre C suffisamment grande, la condition (40) devient alors une conséquence immédiate de (41). Ceci permet de retrouver la condition (2) mentionnée dans le théorème 2 et d'achever ainsi la preuve de la première partie.

Estimation à l'intérieur du support $F_{t,\nu}$

Pour démontrer un résultat de décroissance à l'intérieur de l'ensemble $F_{t,\nu}$, nous allons suivre une démarche similaire à la preuve précédente. La seule importante modification à souligner concerne les fonctions de troncature. Nous devons tronquer les fonctions de localisation exponentielle par des fonctions supportées dans $F_{t,\nu}$. Ce qui sera à l'origine de nouveaux termes qui ne vont pas heureusement nous gêner. Pour commencer, signalons que $\mathbf{1}_{F^\lambda_{t,\nu}} = \mathbf{1}_{\psi_{\lambda,\nu}(t,F_0)}$ est solution de l'équation de transport

$$\begin{cases} \partial_t u + S_\lambda v_\nu \cdot \nabla u = 0 \\ u_{|t=0} = \mathbf{1}_{F_0}. \end{cases}$$

On introduit les fonctions suivantes :

$$\Psi_\nu(t,\, x) = a_\nu(t,x) - \mathbf{1}_{F_{t,\nu}},\ \Psi_{\lambda,\nu}(t,\, x) = a_\nu(t,x) - \mathbf{1}_{F^\lambda_{t,\nu}} \quad \text{et} \quad \Phi_{\lambda,\nu}(t,x) = \widetilde{\phi_\lambda}(\psi^{-1}_{\lambda,\nu}(t,\, x)),$$

où $\psi_{\lambda,\nu}$ (à ne pas confondre avec les notations du lemme 4) désigne le flot associé au champ de vecteurs $S_\lambda v_\nu$, et $\widetilde{\phi}_\lambda$ est donnée par

$$g_\lambda(x) = \lambda \min\left\{\ell,\ \mathrm{dist}(x,\, F_0^c)\right\} \quad \text{et} \quad \widetilde{\phi_\lambda} = \chi \exp\left(g_\lambda * \theta_\lambda\right) = \chi \exp f_\lambda,$$

avec $(\theta_\lambda)_\lambda$ le noyau régularisant déjà introduit dans (15) et χ une fonction appartenant à l'espace $\mathcal{D}((F_0^c)_{h_0})$, à valeurs dans $[0,\, 1]$ construite de la manière suivante : pour tout réel h_0 qui sera fixé ultérieurement en fonction des variables t, h et λ, on prend $\widetilde{\chi}$ une fonction de $\mathcal{D}(B(0, \frac{1}{2}))$ d'intégrale égale à 1 et l'on définit la fonction

$$\chi(x) = \frac{1}{h_0^d}\widetilde{\chi}(h_0^{-1}\cdot) * \mathbf{1}_{(F_0^c)_{\frac{3h_0}{2}}}(x).$$

Alors, en posant $C = \|\nabla \widetilde{\chi}\|_{L^1}$, on constate que la fonction χ vérifie $\chi \equiv 1$ sur $(F_0^c)_{2h_0}$ et

$$\|\nabla \chi\|_{L^\infty} \leq C h_0^{-1},\ \|\nabla^2 \chi\|_{L^\infty} \leq C h_0^{-2}.$$

Nous allons désormais travailler sous les conditions suivantes :

$$2h_0 \leq \delta_\nu(t,h) - \bar{\delta_\nu}(t,\lambda) \quad \text{et} \quad \frac{1}{\lambda} \leq C h_0. \tag{42}$$

On verra au fil des pages suivantes les véritables raisons qui sont à la base de ces choix. Pour faciliter la manipulation, on introduit les notations :

$$\chi_{\lambda,\nu}(t) = \chi(\psi^{-1}_{\lambda,\nu}(t)) \quad \text{et} \quad \phi_{\lambda,\nu}(t) = f_\lambda(\psi^{-1}_{\lambda,\nu}(t)).$$

Comme le support de $\widetilde{\phi}_\lambda$ est inclus dans l'intérieur de F_0, alors le support de $\Phi_{\lambda,\nu}(t)$ est inclus dans l'intérieur de $F^\lambda_{t,\nu}$. Donc

$$\Phi_{\lambda,\nu}\Delta\Psi_{\lambda,\nu} = \Phi_{\lambda,\nu}\Delta a_\nu \quad \text{et} \quad \Phi_{\lambda,\nu}\nabla\Psi_{\lambda,\nu} = \Phi_{\lambda,\nu}\nabla a_\nu.$$

Or la fonction $\Phi_{\lambda,\nu}$ est conservée le long des lignes de flot $\psi_{\lambda,\nu}$. Donc elle vérifie l'équation de transport

$$\partial_t \Phi_{\lambda,\nu} + S_\lambda v_\nu \cdot \nabla \Phi_{\lambda,\nu} = 0.$$

Il s'ensuit que l'équation régissant $\Phi_\lambda \Psi_{\lambda,\nu}$ est donnée par

$$(\partial_t + S_\lambda v_\nu \cdot \nabla - \nu\Delta)(\Phi_{\lambda,\nu}\Psi_{\lambda,\nu}) = ((S_\lambda v_\nu - v_\nu)\cdot \nabla \Psi_{\lambda,\nu})\Phi_{\lambda,\nu} - 2\nu \nabla\Phi_{\lambda,\nu}\cdot\nabla\Psi_{\lambda,\nu} - \nu \Psi_{\lambda,\nu}\Delta\Phi_{\lambda,\nu}.$$

Par de simples estimations d'énergie L^p, analogues à celles utilisées dans la première partie, on trouve

$$\frac{d}{dt}\|\Phi_{\lambda,\nu}\Psi_{\lambda,\nu}(t)\|_{L^p}^p \leq p\|S_\lambda v_\nu(t) - v_\nu(t)\|_{L^\infty} I_1(t) + 2\nu I_2(t) + p\nu I_3(t), \tag{43}$$

avec,

$$\begin{aligned} I_1(t) &= \int_{\mathbb{R}^d} |\Psi_{\lambda,\nu}(t,x)|^p |\Phi_{\lambda,\nu}|^{p-1} |\nabla\Phi_{\lambda,\nu}(t,x)| dx, \\ I_2(t) &= \int_{\mathbb{R}^d} |\Psi_{\lambda,\nu}(t,x)|^p \ \ |\mathrm{div}\ (\Phi_{\lambda,\nu}|\Phi_{\lambda,\nu}|^{p-2}\nabla\Phi_{\lambda,\nu})| dx, \\ I_3(t) &= \int_{\mathbb{R}^d} |\Psi_{\lambda,\nu}(t,x)|^p |\Phi_{\lambda,\nu}^{p-1}\Delta\Phi_{\lambda,\nu}(t,x)| dx. \end{aligned}$$

ESTIMATION DE $I_1(t)$.

En revenant à l'expression de $\Phi_{\lambda,\nu}$ et en développant son gradient, on obtient suite à quelques majorations élémentaires

$$\begin{aligned} I_1(t) \ \leq\ & \|\nabla\psi_{\lambda,\nu}^{-1}\|_{L^\infty}\bigg(\int_{\mathbb{R}^d} |\Psi_{\lambda,\nu}(t,x)|^p |\Phi_{\lambda,\nu}(t,x)|^{p-1} |\nabla\chi(\psi_{\lambda,\nu}^{-1}(t,x))| e^{f_\lambda(\psi_{\lambda,\nu}^{-1}(t,x))} dx + \\ & +\|\nabla f_\lambda\|_{L^\infty}\|\Psi_{\lambda,\nu}\Phi_{\lambda,\nu}(t)\|_{L^p}^p\bigg). \end{aligned} \tag{44}$$

En faisant le changement de variable $x \to \psi_{\lambda,\nu}(t,x)$ qui préserve la mesure et en tenant compte du fait que $\nabla\chi$ est nul à une distance de ∂F_0 supérieure à $2h_0$, alors la première intégrale majorant $I_1(t)$ peut être dominée par

$$Ch_0^{-1}\|\widetilde{\phi_\lambda}^{p-1} e^{f_\lambda}\|_{L^\infty((\partial F_0^c)_{2h_0})}\|\Psi_{\lambda,\nu}(t)\|_{L^p}^p. \tag{45}$$

Or, on établit d'une manière similaire à (30) que $\left\|e^{f_\lambda - g_\lambda}\right\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)} \leq C$. Il s'ensuit donc que

$$\|\widetilde{\phi_\lambda}^{p-1} e^{f_\lambda}\|_{L^\infty((\partial F_0^c)_{2h_0})} \leq C^p e^{2p\lambda h_0}. \tag{46}$$

D'autre part, une estimation d'énergie L^p permet d'avoir

$$\|\Psi_{\lambda,\nu}(t)\|_{L^p} \leq 2\|a^0\|_{L^p}. \tag{47}$$

Ainsi en reportant les inégalités (45), (46 et (47) dans l'estimation (44), on obtient

$$\begin{aligned} I_1(t) \ &\leq\ \lambda(\lambda\ell)^{C_0 V_\nu(t)}\|\Phi_{\lambda,\nu}\Psi_{\lambda,\nu}(t)\|_{L^p}^p + C^p h_0^{-1}(\lambda\ell)^{C_0 V_\nu(t)} e^{2p\lambda h_0}\|a^0\|_{L^p}^p \\ &\leq\ \ell^{-1}(\lambda\ell)^{1+C_0 V_\nu(t)}\Big(\|\Phi_{\lambda,\nu}\Psi_{\lambda,\nu}(t)\|_{L^p}^p + e^{Cp\lambda h_0}\|a^0\|_{L^p}^p\Big), \quad \text{grâce à (42).} \end{aligned} \tag{48}$$

ESTIMATION DE $I_2(t)$.

Pour estimer convenablement I_2, on utilise les identités suivantes.

$$\mathrm{div}\ \big(\Phi_{\lambda,\nu}|\Phi_{\lambda,\nu}|^{p-2}\nabla\Phi_{\lambda,\nu}\big) = \Phi_{\lambda,\nu}|\Phi_{\lambda,\nu}|^{p-2}\Delta\Phi_{\lambda,\nu} + (p-1)|\Phi_{\lambda,\nu}|^{p-2}|\nabla\Phi_{\lambda,\nu}|^2, \tag{49}$$

$$\nabla\Phi_{\lambda,\nu}(t) = e^{\phi_{\lambda,\nu}(t)}\nabla\chi_{\lambda,\nu}(t) + \Phi_{\lambda,\nu}\nabla\phi_{\lambda,\nu}(t),$$

$$\Delta\Phi_{\lambda,\nu}(t) = \Phi_{\lambda,\nu}\big(\Delta\phi_{\lambda,\nu}(t) + |\nabla\phi_{\lambda,\nu}(t)|^2\big) + e^{\phi_{\lambda,\nu}(t)}\Delta\chi_{\lambda,\nu}(t) + 2e^{\phi_{\lambda,\nu}(t)}\nabla\chi_{\lambda,\nu}(t)\cdot\nabla\phi_{\lambda,\nu}(t).$$

Ainsi ces inégalités et le fait que la fonction $\chi_{\lambda,\nu}$ est bornée par 1 donnent

$$|\text{div } (\Phi_{\lambda,\nu}|\Phi_{\lambda,\nu}|^{p-2}\nabla\Phi_{\lambda,\nu})| \leq 2p\Big(|\Phi_{\lambda,\nu}(t)|^p \Big(|\Delta\phi_{\lambda,\nu}(t)| + |\nabla\phi_{\lambda,\nu}(t)|^2\Big)$$
$$+|\Phi_{\lambda,\nu}|^{p-2}e^{2\phi_{\lambda,\nu}(t)}\Big(|\Delta\chi_{\lambda,\nu}(t)| + |\nabla\chi_{\lambda,\nu}(t)|^2 + |\nabla\chi_{\lambda,\nu}\cdot\nabla\phi_{\lambda,\nu}(t)|\Big)\Big).$$

Or grâce aux inégalités (25) et (27), on a

$$|\Delta\phi_{\lambda,\nu}(t)| + |\nabla\phi_{\lambda,\nu}(t)|^2 \leq C\lambda^2(\lambda\ell)^{3C_0V_\nu(t)}. \tag{50}$$

D'autre part, en imitant les estimations de $\phi_{\lambda,\nu}$ décrites par (25) et (27) et en utilisant (42), on trouve

$$\begin{aligned} |\Delta\chi_{\lambda,\nu}(t)| + |\nabla\chi_{\lambda,\nu}(t)|^2 + |\nabla\chi_{\lambda,\nu}\cdot\nabla\phi_{\lambda,\nu}(t)| &\leq C\Big(\frac{1+\lambda h_0}{h_0^2}\Big)(\lambda\ell)^{3C_0V_\nu(t)} \\ &\leq C\lambda^2(\lambda\ell)^{3C_0V_\nu(t)}. \end{aligned} \tag{51}$$

En analysant les identités (49), on constate que les dérivations de $\chi_{\lambda,\nu}$ sont toujours associées à des quantités de type $e^{\phi_{\lambda,\nu}}$. Ce fait permet de reproduire les arguments qu'on a utilisés dans le passage de (44) à (45). Ce qui permet d'obtenir, via les inégalités (50) et (51)

$$I_2 \leq C\, p\, \lambda^2(\lambda\ell)^{3C_0V_\nu(t)}\Big(\|\Psi_{\lambda,\nu}\Phi_{\lambda,\nu}(t)\|_{L^p}^p + e^{Cp\lambda h_0}\|a^0\|_{L^p}^p\Big). \tag{52}$$

Concernant l'intégrale $I_3(t)$, elle se majore exactement comme I_2 et du coup en reportant les inégalités (48) et (52) dans (43), on aboutit à l'inégalité différentielle

$$\frac{d}{dt}\|\Psi_{\lambda,\nu}\Phi_{\lambda,\nu}(t)\|_{L^p}^p \leq \alpha_{\lambda,\nu}(t)\|\Psi_{\lambda,\nu}\Phi_{\lambda,\nu}(t)\|_{L^p}^p + \alpha_{\lambda,\nu}(t)e^{Cp\lambda h_0}\|a^0\|_{L^p}^p, \tag{53}$$

où l'on a posé

$$\alpha_{\lambda,\nu} = Cp\big(\|v_\nu(t)\|_{LL}(\lambda\ell)^{C_0V_\nu(t)}\log\lambda\ell + \nu\lambda^2(\lambda\ell)^{3C_0V_\nu(t)}\big).$$

Il suffit à ce stade d'appliquer le lemme de Gronwall à (53) et d'utiliser le fait que $\Psi_{\lambda,\nu}(0,x) = 0$, pour déduire enfin que

$$\|\Phi_\lambda\Psi_\lambda(t)\|_{L^p}^p \leq e^{C\,p\lambda h_0}\ \|a^0\|_{L^p}^p\ \ e^{\int_0^t\alpha_{\lambda,\nu}(s)ds}.$$

Donc, après un calcul élémentaire, nous trouvons

$$\|\Phi_{\lambda,\nu}\Psi_{\lambda,\nu}(t)\|_{L^p\big((F_{t,\nu}^c)_h\big)} \leq \|a^0\|_{L^p}\exp C\Big((\lambda\ell)^{C_0V_\nu(t)} + \nu t\lambda^2(\lambda\ell)^{3C_0V_\nu(t)} + \lambda h_0\Big). \tag{54}$$

Il s'agit maintenant de se procurer une minoration de la quantité de gauche dans (54). Pour ce faire, nous allons établir que pour tout x pris dans l'ensemble $(F_{t,\nu}^c)_h$, on a

$$\Phi_{\lambda,\nu}(t,x) \geq ce^{\lambda(\delta_\nu(t,h)-\bar{\delta_\nu}(t,\lambda))}. \tag{55}$$

En effet, en revenant à la partie 1. du lemme 4, on récupère l'inclusion suivante :

$$(F_{t,\nu}^c)_h = (F_{t,\nu}^c)_h^c \subset \psi_\nu(t,(F_0^c)_{\delta_\nu(t,h)}^c) = \psi_\nu(t,(F_0^c)_{\delta_\nu(t,h)}). \tag{56}$$

Ainsi donc pour avoir (55) il suffit de la vérifier pour les éléments x appartenant à $\psi_\nu\big(t,(F_0^c)_{\delta_\nu(t,h)}\big)$. Pour cela, nous allons commencer par la constatation suivante et qui était l'objet de la partie 3. du lemme 4 :

$$\psi_{\lambda,\nu}^{-1}(t)\circ\psi_\nu(t,(F_0^c)_{\delta_\nu(t,h)}) \subset (F_0^c)_{\delta_\nu(t,h)-\bar{\delta_\nu}(t,\lambda)}. \tag{57}$$

Ainsi pour tout x appartenant à $\psi_\nu\big(t,(F_0^c)_{\delta_\nu(t,h)}\big)$, on a

$$g_\lambda\big(\psi_{\lambda,\nu}^{-1}(t,x)\big)\geq\lambda\big(\delta_\nu(t,h)-\bar{\delta_\nu}(t,\lambda)\big). \tag{58}$$

D'autre part, la condition (42) combinée avec (57) montre que pour tout élément x choisi dans l'ensemble $\psi_\nu\big(t,(F_0^c)_{\delta_\nu(t,h)}\big)$, on a

$$\chi_{\lambda,\nu}(t,x)=1. \tag{59}$$

Par suite, l'estimation (55) devient une conséquence directe de (30), (58) et (59).
Faisons maintenant le choix suivant :

$$h_0=\frac{\delta_\nu(t,h)-\bar{\delta}_\nu(t,\lambda)}{2C}. \tag{60}$$

Il s'ensuit que la combinaison des inégalités (54) et (55) permet de tirer la conclusion ci-après.
(61)

$$\|\Psi_{\lambda,\nu}(t)\|_{L^p((F_{t,\nu}^c)_h)}\leq C\|a^0\|_{L^p}\exp\bigg(C\lambda\ell\Big((\lambda\ell)^{C_0V_\nu(t)-1}+\frac{\nu t}{\ell^2}(\lambda\ell)^{1+3C_0V_\nu(t)}-\frac{\delta_\nu(t,h)-\bar{\delta}_\nu(t,\lambda)}{2\ell}\Big)\bigg).$$

Choisissons maintenant λ de la manière suivante :

$$\lambda\ell=\big(\frac{\nu t}{\ell^2}\big)^{\frac{-1}{2+2C_0V_\nu(t)}}. \tag{62}$$

Ensuite on reporte cette expression dans (61) et on achève la preuve d'une manière similaire à la finition de la première partie, et l'on trouve que sous la même condition (41) imposée à ν et h,

$$\big\|a_\nu(t)-\mathbf{1}_{F_{t,\nu}^\lambda}\big\|_{L^p((F_{t,\nu}^c)_h)}\leq C\|a^0\|_{L^p}\exp\Big(-\big(\frac{\ell^2}{\nu t}\big)^{\frac{1}{2+2C_0V(t)}}\frac{\delta_\nu(t,h)}{4\ell}\Big). \tag{63}$$

L'estimation (63) n'est pas encore sous la forme souhaitée. Nous devons trouver un moyen qui nous permet de se débarrasser du λ résiduel. Ce que nous allons montrer est la chose suivante : sous des conditions supplémentaires sur λ, donc sur ν, on peut remplacer dans l'estimation précédente $\mathbf{1}_{F_{t,\nu}^\lambda}$ par $\mathbf{1}_{F_{t,\nu}}$. Plus précisément, on va établir que, pour tout λ grand devant h^{-1}, on a

$$(F_{t,\nu}^c)_h\subset F_{t,\nu}^\lambda. \tag{64}$$

Pour ce faire, on utilise principalement la convergence uniforme du flot régularisé $\psi_{\lambda,\nu}(t)$ vers le flot $\psi_\nu(t)$. En effet, un calcul simple mène à l'inclusion

$$(F_{t,\nu}^c)_h\subset((F_{t,\nu}^\lambda)^c)_{h-\|\psi_{\lambda,\nu}(t)-\psi_\nu(t)\|_{L^\infty}}.$$

Or d'après (8), on sait que si

$$C_0V_\nu(t)\frac{\log\lambda\ell}{\lambda\ell}\leq e^{-e^{V_\nu(t)}},$$

alors

$$\|\psi_{\lambda,\nu}(t)-\psi_\nu(t)\|_{L^\infty}\leq Ce\ell\Big(\frac{\log\lambda\ell}{\lambda\ell}\Big)^{e^{-V_\nu(t)}}.$$

Ainsi (64) a lieu si

$$\frac{\log\lambda\ell}{\lambda\ell}\leq e^{-\exp\frac{1}{C_0}}\quad\text{et}\quad Ce\ell\Big(\frac{\log\lambda\ell}{\lambda\ell}\Big)^{\exp-V_\nu(t)}\leq h.$$

En utilisant (62), on constate que les conditions ci-dessus sont réalisées si

$$\frac{\nu t}{\ell^2} \le \Big(\frac{h}{C\ell}\Big)^C, \tag{65}$$

où l'on désigne par C une constante suffisamment grande. La condition (65) est plus faible que (2), donc on peut l'ignorer.

6. **Preuve du théorème 3**

Nous allons dans ce qui suit fournir la preuve du théorème 3. Désormais et par souci de notations les fonctions qui interviennent ne sont pas indexées par ν.

Pour montrer un résultat de décroissance par rapport à la viscosité, global en temps, avec la seule hypothèse que v est localement intégrable en temps et à valeurs dans C_{LL}, on partage l'intervalle de temps $[0,\, T]$ en une subdivision $((T_i)_{i=0}^N)$, qui sera définie ultérieurement et dont le pas est indépendant des variables du problème. Dans chaque sous-intervalle on développe des estimations L^2 dont on abandonne la localisation exponentielle. En fait ce qui est gêne dans cette localisation est que le terme initial $a(T_i)e^{\phi_\lambda(T_i,\cdot)}$ ne peut pas être petit sur $\psi(T_i, F_0)_h^c$ à cause de l'étalement du support de $a(T_i)$. Dans l'intervalle $[0,\, T_1]$, nous n'avons pas ce problème car a^0 est supportée dans F_0, où la localisation exponentielle ne contribue qu'avec la constante 1. Dans chaque intervalle de temps de la forme $[T_i,\, T_{i+1}]$, on construit une troncature initiale en faisant appel à l'ensemble $\psi(T_i,\, F_0)$. Ensuite, on tronque la solution par le propagé de cette troncature par le flot régularisé $\psi_{T_i,\lambda}(t)$, noté aussi $\psi_{i,\lambda}$ et qui désigne dans ce cas le flot associé à $S_\lambda v$, fixant les points de l'espace à l'instant T_i. Après, on fait des estimations d'énergie L^2. Pour aboutir à une estimation locale souhaitée, on a besoin, pour le contrôle de certaines quantités, de décrire la dynamique du support initial F_0 à travers les flots mis en jeu. À cet effet, le lemme 4 est d'une importance cruciale.

On souligne que la relation de récurrence qu'on établit est de type arithmético-géométrique. Ce qui permet d'avoir une forme explicite de la suite. L'examen de cette formule montre que la décroissance globale à bien lieu, non pas sous une forme exponentielle, mais plutôt polynomiale en ν.

Pour ce faire, on fixe un temps T strictement positif et on choisit un réel $\alpha \in]0,\, 1[$. Ensuite, on partage l'intervalle $[0,\, T]$ en une subdivision $(T_i)_{i=0}^N$, qui vérifie

$$T_0 = 0 < T_1 < ... < T_N = T \quad \text{et} \quad V(T_i, T_{i+1}) = \frac{1-\alpha}{C_0(1+\alpha)}, \forall\, i \in [\![0,\, N-1]\!].$$

Nous rappelons que $V(T_i, T_{i+1}) = \displaystyle\int_{T_i}^{T_{i+1}} \|v(\tau)\|_{LL} d\tau$. Ainsi en sommant sur i ces quantités, on trouve $N \simeq \frac{C_0(1+\alpha)V(T)}{1-\alpha}$. Notons :

$$\delta_T(h) = e\ell\Big(\frac{h}{e\ell}\Big)^{\exp V(T)} \quad \text{et} \quad \delta_t^{(i)}(h) = \underbrace{\delta(t) \circ \cdot \cdot \circ \delta(t)}_{i \text{ fois}}(h).$$

Alors un calcul simple donne

$$\delta_t^{(i)}(h) = e\ell\Big(\frac{h}{e\ell}\Big)^{\exp iV(t)}.$$

Introduisons pour tout entier $i \in [\![0,\, N]\!]$ les fonctions suivantes :

$$f_i(x) = \frac{1}{\ell}\min\Big\{\ell,\ \mathrm{dist}\Big(x,\, F_{i;\frac{1}{2}\delta_T^{(2)}(h)}\Big)\Big\} \quad \text{et} \quad \phi_{i,\lambda}(t,x) = f_i(\psi_{T_i,\lambda}^{-1}(t,\, x)),$$

où l'on désigne

$$F_{i;h} = \Big(\psi(T_i,\, F_0)_h^c\Big)^c = \Big\{x \in \mathbb{R}^d,\ \ \mathrm{dist}(x,\, \psi(T_i,\, F_0)) \le h\Big\} \quad \text{et} \quad F_i = \psi(T_i,\, F_0).$$

On note aussi $\psi_{i,\lambda} = \psi_{T_i,\lambda}$. La fonction $\phi_{i,\lambda}$ est lipschitzienne et vérifie, en particulier, pour tout réel $t \ge T_i$ les contrôles

$$\|\phi_{i,\lambda}(t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)} \le 1 \quad \text{et} \quad \|\nabla\phi_{i,\lambda}(t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)} \le \frac{1}{\ell}(\lambda\ell)^{C_0V(T_i,t)}. \tag{66}$$

Cette dernière estimation découle de la suivante :

$$\begin{aligned}
\|\nabla\psi_{i,\lambda}^{-1}(t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)} &\le e^{\int_{T_i}^t \|\nabla S_\lambda v(s)\|_{L^\infty} ds}\\
&\le e^{C_0 \log(\lambda\ell) \int_{T_i}^t \|v(s)\|_{LL} ds}\\
&\le (\lambda\ell)^{C_0V(T_i,t)}.
\end{aligned}$$

La fonction $\phi_{i,\lambda}$ n'est pas dérivable dans tout l'espace. Donc, pour accorder un sens classique au calcul qui suivra, il convient de régulariser $\phi_{i,\lambda}$ par une approximation de l'identité comme on l'a déjà fait pour la preuve du deuxième théorème. Ici, on ne le fait pas par souci de simplification, mais on signale que les estimations importantes sont stables par passage à la limite. La fonction $a\phi_{i,\lambda}$ satisfait l'équation suivante

$$\partial_t(a\phi_{i,\lambda}) + S_\lambda v\cdot\nabla(a\phi_{i,\lambda}) - \nu\Delta(a\phi_{i,\lambda}) = ((S_\lambda v - v)\cdot\nabla a)\phi_{i,\lambda} - \nu a\Delta\phi_{i,\lambda} - 2\nu\nabla a\cdot\nabla\phi_{i,\lambda}. \tag{67}$$

En faisant le produit scalaire L^2 avec $a\phi_{i,\lambda}$, accompagné de quelques intégrations par parties, on obtient

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|a\phi_{i,\lambda}(t)\|_{L^2}^2 + \nu\|\nabla(a\phi_{i,\lambda})\|_{L^2}^2 = \int |(S_\lambda v - v)\cdot\nabla\phi_{i,\lambda}(t,x)||a^2\phi_{i,\lambda}(t,x)|dx + \nu\|a\nabla\phi_{i,\lambda}(t)\|_{L^2}^2.$$

Ainsi le lemme 3 et l'inégalité (66) auxquels on associe l'inégalité d'énergie

$$\forall t \in \mathbb{R}_+, \quad \|a(t)\|_{L^2} \le \|a^0\|_{L^2},$$

permettent d'avoir

$$\frac{d}{dt}\|a\phi_{i,\lambda}(t)\|_{L^2}^2 \le 2\|a_0\|_{L^2}^2\Big(C_0\|v(t)\|_{LL}(\lambda\ell)^{C_0V(T_i,t)-1}\log(\lambda\ell) + \frac{\nu}{\ell^2}(\lambda\ell)^{2C_0V(T_i,t)}\Big). \tag{68}$$

En intégrant cette inégalité entre les instants T_i et t, on trouve que pour tout $\lambda\ell \ge e$,

$$\|a\phi_{i,\lambda}(t)\|_{L^2}^2 \le \|a\phi_{i,\lambda}(T_i)\|_{L^2}^2 + 2\|a_0\|_{L^2}^2\Big((\lambda\ell)^{C_0V(T_i,t)-1} + \frac{\nu(t-T_i)}{\ell^2}(\lambda\ell)^{2C_0V(T_i,t)}\Big). \tag{69}$$

Si on prend $t \in [T_i,\, T_{i+1}]$, alors l'estimation ci-dessus devient, via le choix de $V(T_i,\, T_{i+1})$,

$$\|a\phi_{i,\lambda}(t)\|_{L^2}^2 \le \|a\phi_{i,\lambda}(T_i)\|_{L^2}^2 + 2\|a_0\|_{L^2}^2\Big(\big(\lambda\ell\big)^{\frac{-2\alpha}{1+\alpha}} + \frac{\nu T}{\ell^2}\big(\lambda\ell\big)^{2\frac{1-\alpha}{1+\alpha}}\Big). \tag{70}$$

Ainsi, en faisant le choix $\lambda\ell = (\frac{\ell^2}{\nu T})^{\frac{1+\alpha}{2}}$, l'estimation (70) se transforme en

$$\|a\phi_{i,\lambda}(t)\|^2_{L^2} \le \|a\phi_{i,\lambda}(T_i)\|^2_{L^2} + 4\|a_0\|^2_{L^2}\Big(\frac{\nu T}{\ell^2}\Big)^{\alpha}. \tag{71}$$

D'une part, en posant $\beta(T,h) = \dfrac{\delta^{(2)}_T(h)}{4}$ et en revenant à l'expression de $\phi_{i,\lambda}(t)$, on constate que le support de $\phi_{i,\lambda}(T_i)$ est inclus dans l'ensemble $(F_i)^c_{\beta(T,h)}$. Ce qui entraîne grâce à (66) que

$$\|a\phi_{i,\lambda}(T_i)\|_{L^2} \le \|a(T_i)\|_{L^2((F_i)^c_{\beta(T,h)})}.$$

D'autre part, la partie 3. du lemme 4 implique que pour tout temps t dans $[T_i,\, T_{i+1}]$, on a

$$\psi^{-1}_{i,\lambda}(t)\circ\psi\Big(t,\,(F_0)^c_{\delta(t,h)}\Big) \subset \Big(\psi(T_i,\,F_0)\Big)^c_{\delta^{(2)}_t(h)-\bar\delta(t,\lambda)} \subset \Big(F_{i;\delta^{(2)}_T(h)/2}\Big)^c_{\beta(T,h)}, \tag{72}$$

du moment que

$$\bar\delta(T,\lambda) \le \beta(T,h) \quad \text{ et } \quad C_0V(T)(\lambda\ell)^{-1}\log\lambda\ell \le e^{1-\exp C_0V(T)}.$$

Il découle de (72) que pour tout $t\in[T_i,\, T_{i+1}]$ et pour tout $x\in\psi\big(t,\,(F_0)^c_{\delta(t,h)}\big)$, on a

$$\ell^{-1}\beta(T,h) \le |\phi_{i,\lambda}(t,x)|.$$

Par conséquent, il vient que

$$\ell^{-1}\beta(T,h)\big\|a(t)\big\|_{L^2(\psi(t,\,(F_0)^c_{\delta(t,h)}))} \le \big\|a\phi_{i,\lambda}(t)\big\|_{L^2\big(\psi(t,\,(F_0)^c_{\delta(t,h)})\big)}.$$

En combinant ces résultats avec la partie 1. du lemme 4, l'inégalité (71) devient

$$\forall t\in[T_i,\, T_{i+1}],\quad \big\|a(t)\big\|_{L^2((F_t)^c_h)} \le \frac{\ell}{\beta(T,h)}\Big(\big\|a(T_i)\big\|_{L^2((F_i)^c_{\beta(T,h)})} + 4\Big(\frac{\nu T}{\ell^2}\Big)^{\frac{\alpha}{2}}\big\|a_0\big\|_{L^2}\Big), \tag{73}$$

sous réserve que

$$\bar\delta(T,\lambda) \le \beta(T,h) \quad \text{et} \quad \frac{\nu T}{\ell^2} \le \Big(\frac{e^{1-\exp C_0V(T)}}{C_0V(T)}\Big)^{\frac{4}{1+\alpha}}. \tag{74}$$

On pose pour tout entier i dans $[\![0,\, N-1]\!]$

$$a_i(h) = \|a(T_i)\|_{L^2((F_i)^c_h)}.$$

Alors l'inégalité (73) donne pour tout h satisfaisant $\bar\delta(T,\,\lambda) \le \beta(T,\,h)$,

$$\forall\, i\in[\![0,\, N-1]\!],\quad a_{i+1}(h) \le \frac{\ell}{\beta(T,\,h)}\Big(a_i(\beta(T,\,h)) + 4\Big(\frac{\nu T}{\ell^2}\Big)^{\frac{\alpha}{2}}\big\|a_0\big\|_{L^2}\Big).$$

Notons

$$\beta^{(j)}(T,\,h) = \underbrace{\beta\circ\cdot\cdot\circ\beta}_{j \text{ fois}}(T,\,h).$$

Comme $a_0(\bar{h}) = 0$, pour tout $\bar{h} > 0$, alors on peut démontrer par un argument de récurrence que, pour tout $n \in [\![1, N]\!]$ et pour tout réel positif h vérifiant $\bar{\delta}(T, \lambda) \leq \beta^{(n)}(T, h)$,

$$a_n(h) \leq 4\Big(\frac{\nu T}{\ell^2}\Big)^{\frac{\alpha}{2}} \|a_0\|_{L^2} \sum_{k=1}^{n} \prod_{j=1}^{k} \frac{\ell}{\beta^{(j)}(T, h)}.$$

En développant le calcul, on trouve que

$$\beta^{(j)}(T, h) = (\frac{1}{4})^{\sum_{m=0}^{j-1} e^{2mV(T)}} e\ell(\frac{h}{e\ell})^{\exp 2jV(T)}.$$

Or l'inégalité $\sum_{j=1}^{N} a^j \leq N a^N$, qui a lieu pour tout $a \geq 1$ permet d'avoir

$$\begin{aligned} \prod_{j=1}^{k} \frac{\ell}{\beta^{(j)}(T, h)} &= e^{-k} 4^{\sum_{j=1}^{k} \sum_{m=0}^{j-1} e^{2mV(T)}} (\frac{e\ell}{h})^{\sum_{j=1}^{k} e^{2jV(T)}} \\ &\leq e^{-k} (\frac{4e\ell}{h})^{k^2 e^{2kV(T)}}. \end{aligned}$$

Ainsi en sommant sur les indices k allant de 1 jusqu'à n, on trouve

$$\sum_{k=1}^{n} \prod_{j=1}^{k} \frac{\ell}{\beta^{(j)}(T, h)} \leq (\frac{4e\ell}{h})^{n^2 e^{2nV(T)}}.$$

D'où on aboutit, pour tout temps $t \in [0, T]$, à l'estimation

$$\|a(t)\|_{L^2((F_t)^c_h)} \leq 4\Big(\frac{\nu T}{\ell^2}\Big)^{\frac{\alpha}{2}} \Big(\frac{4e\ell}{h}\Big)^{N^2 e^{2NV(T)}} \|a_0\|_{L^2}, \tag{75}$$

qui a eu lieu si $\bar{\delta}(T, \lambda) \leq \beta^{(N)}(T, h)$. Sachant que $N \simeq \frac{C_0 V(T)(1+\alpha)}{1-\alpha}$, alors on déduit finalement à partir de (75) que pour tout $t \in [0, T]$,

$$\|a(t)\|_{L^2((F_t)^c_h)} \leq C\Big(\frac{\nu T}{\ell^2}\Big)^{\frac{\alpha}{2}} \Big(\frac{4e\ell}{h}\Big)^{\exp C\left(\frac{V(T)}{1-\alpha}\right)^2} \|a_0\|_{L^2}.$$

On va maintenant expliciter les conditions que doit vérifier ν. Nous venons de voir que

$$\begin{aligned} \beta^{(N)}(T, h) &= (4)^{-\sum_{j=0}^{N-1} e^{2jV(T)}} e\ell(\frac{h}{e\ell})^{\exp 2NV(T)} \\ &\geq 4^{-Ne^{2NV(T)}} e\ell(\frac{h}{4e\ell})^{\exp \frac{CV(T)^2}{1-\alpha}}. \end{aligned}$$

Or, on vérifie facilement que $4^{-Ne^{2NV(T)}} \geq 4^{-\exp C\left(\frac{V(T)}{1-\alpha}\right)^2}$. Ce qui implique que

$$\beta^{(N)}(T, h) \geq e\ell(\frac{h}{16e\ell})^{\exp C\left(\frac{V(T)}{1-\alpha}\right)^2}.$$

D'autre part, on peut écrire via l'inégalité $\log x \leq \sqrt{x}, \forall x \in \mathbb{R}_+$, que

$$\begin{aligned} \bar{\delta}(T, \lambda) &= 2e\ell\Big(\frac{\log \lambda\ell}{\lambda\ell}\Big)^{\exp -C_0 V(T)} \\ &\leq 2e\ell\big(\lambda\ell\big)^{-\frac{1}{2}\exp -C_0 V(T)}. \end{aligned}$$

Ainsi, en remplaçant λ par sa valeur, on constate qu'on peut choisir ν de manière à ce que

$$\frac{\nu T}{\ell^2} \leq \Big(\frac{h}{32e\ell}\Big)^{C\exp C\left(\frac{V(T)}{1-\alpha}\right)^2}. \tag{76}$$

En fait, il y a une autre condition imposée à ν provenant de (74). Elle est donnée par

$$\frac{\nu T}{\ell^2} \leq \Big(\frac{e^{1-\exp C_0 V(T)}}{C_0 V(T)}\Big)^{\frac{4}{1+\alpha}}. \tag{77}$$

Ainsi en associant (76) et (77), on retrouve la condition (4).

La preuve de la deuxième partie est identique à la première partie modulo quelques modifications qui portent essentiellement sur les troncatures qui sont choisies de manière à ce qu'elles détectent localement en temps des informations sur la solution au sein du support F_t. Ensuite on adapte, sans avoir de complications supplémentaires, la méthode utilisée dans la première partie. On pose comme dans la démonstration du théorème 2 :

$$\Psi(t,x) = a(t,x) - \mathbf{1}_{F_t}(x), \Psi_\lambda(t,x) = a(t,x) - \mathbf{1}_{F_{t,\lambda}}(x) \quad \text{et} \quad F^c_{i;h} = \Big\{x \in \mathbb{R}^d,\ \mathrm{dist}(x,\ F^c_i) \leq h\Big\}.$$

On considère le découpage en temps précédent et on pose pour tout entier $i \in [\![0,N]\!]$

$$f_i(x) = \frac{1}{\ell}\min\Big\{\ell,\ \mathrm{dist}\Big(x,\ F^c_{i;\frac{1}{2}\delta^{(2)}_T(h)}\Big)\Big\} \quad \text{et} \quad \phi_{i,\lambda}(t,x) = f_i(\psi^{-1}_{T_i,\lambda}(t,x)).$$

Alors

$$\mathrm{supp}\ f_i \subset (F^c_i)_{\frac{1}{2}\delta^{(2)}_T(h)} \quad \text{et} \quad \mathrm{supp}\ \phi_{i,\lambda}(t) \subset \psi_{T_i,\lambda}\Big(t, (F^c_i)_{\frac{1}{2}\delta^{(2)}_T(h)}\Big). \tag{78}$$

Or d'après la partie 4. du lemme 4, pour tout t appartenant à $[T_i, T_{i+1}]$ et pour tout λ vérifiant

$$\bar{\delta}(t,\lambda) \leq \frac{1}{2}\delta^{(2)}_T\big(\frac{1}{2}\delta^{(2)}_T(h)\big) = R_T(h),$$

on a

$$\begin{aligned} \psi_{T_i,\lambda}\Big(t, (F^c_i)_{\frac{1}{2}\delta^{(2)}_T(h)}\Big) &= \psi_{T_i,\lambda}\Big(t, \big(\psi(T_i, F^c_0)\big)^c_{\frac{1}{2}\delta^{(2)}_T(h)}\Big) \\ &\subset \Big(\psi_\lambda(t, F^c_0)\Big)^c_{2\left(R_T(h)-\bar{\delta}(T,\lambda)\right)} \subset\subset F_{t,\lambda}. \end{aligned}$$

On tire de ce dernier fait et de la dernière inclusion dans (78) les conséquences suivantes :

$$\phi_{i,\lambda}\Delta\Psi_\lambda = \phi_{i,\lambda}\Delta a \quad \text{et} \quad \phi_{i,\lambda}\nabla\Psi_\lambda = \phi_{i,\lambda}\nabla a.$$

Donc, en développant le calcul, on montre que $\Psi_\lambda\phi_{i,\lambda}$ vérifie l'équation suivante

$$\partial_t(\Psi_\lambda\phi_{i,\lambda}) + S_\lambda v\cdot\nabla(\Psi_\lambda\phi_{i,\lambda}) - \nu\Delta(\Psi_\lambda\phi_{i,\lambda}) = ((S_\lambda v - v)\cdot\nabla\Psi_\lambda)\phi_{i,\lambda} - \nu\Psi_\lambda\Delta\phi_{i,\lambda} - 2\nu\nabla\Psi_\lambda\cdot\nabla\phi_{i,\lambda}.$$

Faisons le produit scalaire L^2 de cette équation avec $\Psi_\lambda\phi_{i,\lambda}$. Alors, en procédant à des intégrations par parties auxquelles on associe le fait que v est à divergence nulle, on parvient à

$$\frac{d}{dt}\big\|\Psi_\lambda\phi_{i,\lambda}(t)\big\|^2_{L^2} \leq 2\int\Big|(S_\lambda v - v)\cdot\nabla\phi_{i,\lambda}(t,x)\Psi^2_\lambda\phi_{i,\lambda}(t,x)\Big|dx + 2\nu\int\Psi^2_\lambda(t,x)|\nabla\phi_{i,\lambda}(t,x)|^2dx.$$

D'un autre côté, on se sert d'une façon cruciale de l'inégalité $\|\Psi_\lambda(t)\|_{L^2}^2 \leq 2\|a_0\|_{L^2}^2$ et des estimations du lemme 3 pour déduire, suite à une intégration en temps, que

$$\|\Psi_\lambda \phi_{i,\lambda}(t)\|_{L^2}^2 \leq \|\Psi_\lambda \phi_{i,\lambda}(T_i)\|_{L^2}^2 + 4\|a_0\|_{L^2}^2 \Big((\lambda\ell)^{C_0 V(T_i,t)-1} + \frac{\nu|t-T_i|}{\ell^2}(\lambda\ell)^{2C_0 V(T_i,t)}\Big). \tag{79}$$

Or $$\operatorname{supp} \phi_{i,\lambda}(T_i) \subset (F^c_{i;\delta_T^2(h)/2})^c \subset (F_i^c)_{\beta(T,h)}.$$

Ce qui implique, grâce à une estimation analogue à (66), que

$$\|\Psi_\lambda \phi_{i,\lambda}(T_i)\|_{L^2} \leq \|\Psi_\lambda(T_i)\|_{L^2\big((F_i^c)_{\beta(T,h)}\big)}.$$

En remplaçant F_0 par F_0^c dans (72), alors on obtient pour tout temps t de $[T_i,\, T_{i+1}]$ et pour tout λ tel que $\bar\delta(T,\,\lambda) \leq \beta(T,\,h)$

$$\psi_{i,\lambda}^{-1}(t) \circ \psi\Big(t,\, (F_0^c)^c_{\delta(t,h)}\Big) \subset \Big(\psi(T_i,\, F_0)^c\Big)^c_{\delta_T^{(2)}(h)-\bar\delta(T,\,\lambda)} \subset \Big(F^c_{i;\delta_T^{(2)}(h)/2}\Big)^c_{\beta(T,\,h)}.$$

Ensuite, on imite la fin de la preuve de la première partie et l'on trouve, pour tout $t \in [0,\, T]$

$$\|\Psi_{\lambda_\nu}(t)\|_{L^2((F_t^c)_h)} \leq C\Big(\frac{\nu T}{\ell^2}\Big)^{\frac{\alpha}{2}} \Big(\frac{4e\ell}{h}\Big)^{\exp C\left(\frac{V(T)}{1-\alpha}\right)^2} \|a_0\|_{L^2},$$

avec $\lambda_\nu \ell = \Big(\dfrac{\ell^2}{\nu T}\Big)^{\frac{1+\alpha}{2}}$. Signalons que ν satisfait les mêmes conditions (76) et (77). En fait, on doit changer dans (76) la constante C par une qui soit plus grande. Maintenant, on a envie de remplacer $F_{t,\lambda}$ dans l'estimation de $\|a(t) - \mathbf{1}_{F_{t,\lambda}}\|_{L^2((F_t^c)_h)}$ par F_t. Pour ce faire, il nous suffit de montrer que pour des réels λ suffisamment grand, on a

$$(F_t^c)_h \subset F_{t,\lambda}. \tag{80}$$

Or, on peut montrer par le biais d'un calcul élémentaire que

$$(F_t^c)_h \subset (F_{t,\lambda}^c)_{h-\|\psi_\lambda(t)-\psi(t)\|_{L^\infty}}.$$

En combinant cette inclusion avec l'estimation (8), on constate que (80) a lieu dès que λ satisfait

$$\bar\delta(T,\,\lambda) \leq h.$$

Pour enfin conclure et achever ainsi la preuve du théorème, il ne reste que fournir la liste des conditions que doivent satisfaire les paramètres ν et h.

$$(76),\ (77),\ \lambda\ell = \Big(\frac{\ell^2}{\nu T}\Big)^{\frac{1+\alpha}{2}} \quad \text{et} \quad \bar\delta(T,\,\lambda) \leq h.$$

La dernière condition est réalisée si

$$\frac{\nu T}{\ell^2} \leq \Big(\frac{h}{2e\ell}\Big)^{\frac{4}{1+\alpha}\exp C_0 V(T)}.$$

C'est une condition plus faible que (76). Donc on ne la retient pas. Par conséquent, on retrouve la condition (4). Ceci achève la preuve du théorème.

7. Preuve du corollaire 1

Avant de donner la preuve du corollaire, nous allons présenter un nombre d'estimations portant sur les solutions de (NS_ν) et (E). Le premier résultat est décrit par le lemme suivant :

Lemme 5. *Soient v_ν et v respectivement les solutions de (NS_ν) et de (E) associées à une même donnée initiale v^0 de tourbillon $\omega^0 \in L^1 \cap L^\infty$. Alors, on a l'estimation*

$$\|(v_\nu; v)\|_{L^\infty(\mathbb{R}_+; C^1_*)} \leq C\ell\|\omega^0\|_{L^1\cap L^\infty},$$

où l'on note

$$\|\omega^0\|_{L^1\cap L^\infty} = \|\omega^0\|_{L^\infty} + \frac{1}{\ell^2}\int_{\mathbb{R}^2} |\omega^0(x)|dx.$$

Preuve :
Pour contrôler les hautes fréquences, on utilise principalement l'équation elliptique qui lie la vitesse au tourbillon. On obtient l'estimation suivante

$$\begin{aligned} \forall q \geq 0, \quad \|\Delta_q v_\nu(t)\|_{L^\infty} &\leq C\ell 2^{-q}\|\omega_\nu(t)\|_{L^\infty}, \\ &\leq C\ell 2^{-q}\|\omega^0\|_{L^\infty}. \end{aligned} \tag{81}$$

La dernière inégalité (81) provient d'une application du principe du maximum. Concernant l'estimation de $\|\Delta_{-1}v_\nu\|_{L^\infty}$, on utilise le fait suivant

$$\|\Delta_{-1}v_\nu\|_{L^\infty} \leq C\|v_\nu\|_{L^\infty}.$$

Ensuite, on se sert de la loi de Biot-Savart et de l'inégalité de Hölder qui permettent d'avoir

$$\begin{aligned} |v_\nu(t,x)| &\leq \int_{|x-y|\leq\ell} \frac{|\omega_\nu(t,y)|}{|x-y|}dy + \int_{|x-y|\geq\ell} \frac{|\omega_\nu(t,y)|}{|x-y|}dy \\ &\leq C\big(\ell\|\omega_\nu(t)\|_{L^\infty} + \ell^{-1}\|\omega_\nu(t)\|_{L^1}\big). \end{aligned}$$

Il ne reste qu'appliquer le fait que

$$\|\omega_\nu(t)\|_{L^r} \leq \|\omega^0\|_{L^r}, \forall r \in [1, +\infty]. \tag{82}$$

La même méthode est applicable dans le cas eulérien, vu que l'estimation (82) est alors vérifiée grâce à la méthode des caractéristiques et à la conservation de la mesure par le flot.■

Nous allons rappeler maintenant certains résultats de limite non visqueuse :

Théorème 5 ([4])**.** *Soit v^0 un champ de vecteurs de $\mathbb{R}^2$ à tourbillon $\omega^0 \in L^1 \cap L^\infty$. Notons respectivement par v_ν et v les solutions de (NS_ν) et (E) associées à la même donnée initiale v^0. Alors*

$$\lim_{\nu\to 0} \|v_\nu - v\|_{L^\infty_{loc}(\mathbb{R}_+; L^2)} = 0.$$

Plus précisément, pour tout temps T positif, si

$$\nu \leq \frac{\ell^2}{4T} e^{2-2\exp(CT\|\omega^0\|_{L^1\cap L^\infty})},$$

alors, on a

$$\|v_\nu - v\|^2_{L^\infty([0,T]; L^2)} \leq C\ell^2\Big(\frac{\nu T}{\ell^2}\Big)^{\exp(-C\|\omega^0\|_{L^1\cap L^\infty}T)}\|\omega^0\|^2_{L^1\cap L^\infty}.$$

Comme conséquence, on a

Proposition 3. *Soit v^0 une donnée initiale à tourbillon ω^0 dans $L^1 \cap L^\infty$. Alors*

$$\lim_{\nu\to 0} \|v_\nu - v\|_{L^\infty_{loc}(\mathbb{R}_+;\, L^\infty(\mathbb{R}^2))} = 0.$$

Plus précisément, pour tout t positif, si

$$\frac{4\nu t}{\ell^2} \leq e^{2-2\exp Ct\|\omega^0\|_{L^1\cap L^\infty}}, \tag{83}$$

alors, on aura

$$\|v_\nu - v\|^2_{L^\infty([0,t];\, L^\infty(\mathbb{R}^2))} \leq C\ell^2 \Big(\frac{\nu t}{\ell^2}\Big)^{\frac{1}{2}\exp(-C\|\omega^0\|_{L^1\cap L^\infty} t)} \|\omega^0\|^2_{L^1\cap L^\infty}.$$

Preuve : Nous avons par interpolation,

$$\|v_\nu(t) - v(t)\|^2_{L^\infty(\mathbb{R}^2)} \leq C\|v_\nu(t) - v(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}\|v_\nu(t) - v(t)\|_{C^1_*(\mathbb{R}^2)}.$$

Pour achever la preuve on utilise simplement le lemme 5 et le théorème 5.

Nous allons dans ce qui suit fournir la preuve du corollaire 1 qui consiste, d'une part, à trouver un moyen par lequel on peut remplacer dans les estimations du théorème 2 $F_{t,\nu}$ par F_t et d'autre part à analyser ce qui peut se passer autour de la frontière ∂F_t. L'information cruciale qui permettra de régler ces questions est la convergence uniforme des flots (ψ_ν) vers ψ. Pour l'établir, on écrit par l'intermédiaire de l'inégalité triangulaire :

$$|\psi_\nu(t,\, x) - \psi(t,\, x)| \leq \int_0^t \|v_\nu(s) - v(s)\|_{L^\infty} ds + \int_0^t |v(s,\, \psi_\nu(s,\, x)) - v(s,\, \psi(s,\, x))| ds.$$

En appliquant le lemme d'Osgood, on aboutit au fait suivant :

si
$$\|v_\nu - v\|_{L^1([0,t];\, L^\infty)} \leq \ell e^{1-\exp V(t)},$$

alors
$$\|\psi_\nu(t) - \psi(t)\|_{L^\infty} \leq e\ell\Big(\frac{1}{e\ell}\|v_\nu - v\|_{L^1([0,t];\, L^\infty)}\Big)^{\exp -V(t)} \overset{déf}{=} r_\nu(t).$$

D'un autre côté, un calcul simple montre

$$(F_t)^c_{h+r_\nu(t)} \subset (F_{t,\nu})^c_h \quad \text{et} \quad (F_t^c)_{h+r_\nu(t)} \subset (F^c_{t,\nu})_h \subset (F^c_t)_{h-r_\nu(t)}.$$

Ceci permet de remplacer dans le théorème 2, $F_{t,\nu}$ par F_t, dès qu'on prend $r_\nu \leq \frac{h}{2}$. Nous nous intéressons maintenant à ce qui se passe autour de ∂F_t et précisément nous allons contrôler les solutions dans cette région. Or le principe du maximum implique que $\|\omega_\nu(t)\|_{L^\infty} \leq \|\omega^0\|_{L^\infty}$. Donc il nous suffit d'estimer la surface du voisinage $\mathcal{T}_{t,h}$ que l'on définit par :

$$\mathcal{T}_{t,h} = \big\{x \in \mathbb{R}^2,\ \mathrm{dist}(x,\, \partial F_t) \leq h\big\}.$$

Pour mesurer des surfaces tubulaires, on dispose d'une estimation qui fait intervenir la courbure, la longueur et l'épaississement h. Il s'avère qu'on ne peut pas l'appliquer dans notre cas, vu qu'on ne sait rien sur la régularité de la frontière ∂F_t et si même elle a une longueur finie. Néanmoins on dispose d'une estimation grossière de cette surface qui fait appel uniquement à la longueur et à l'épaississement. Pour pouvoir l'appliquer dans notre situation, on montre tout d'abord que le tube $\mathcal{T}_{t,h}$ est contenu dans l'image, par le flot $\psi(t)$, d'un certain tube $\mathcal{T}_{0,h_1}$ qui s'organise autour de ∂F_0, dont on sait calculer la surface. Ensuite on utilise le fait que le flot préserve la mesure. Avant d'expliciter la surface voulue, on commence par

Définition 3. *Soient γ une courbe de $\mathbb{R}^2$ et r un réel positif. On définit le voisinage tubulaire $\mathcal{T}_r$ de γ, d'épaississement r par*

$$\mathcal{T}_r = \big\{x \in \mathbb{R}^2 \ ; \ \mathrm{dist}(x, \gamma) \leq r\big\}.$$

Dans le cas des courbes rectifiables, on dispose du lemme suivant.

Lemme 6. *Soit $\sigma \mapsto \gamma(\sigma)$ une courbe simple rectifiable définie de $[0,\, 1]$ dans $\mathbb{R}^2$, ayant pour longueur L. Alors pour tout $r \geq 0$*

$$|\mathcal{T}_r| \leq 4\pi(Lr + r^2).$$

Preuve :
Soit $(\gamma_i)_{0\leq i\leq n}$ une subdivision de la courbe γ telle que $\gamma_0 = \gamma(0),\ \gamma_n = \gamma(1)$, de sorte que la longueur de l'arc $[\gamma_i,\, \gamma_{i+1}]$ vaut r pour tout $0 \leq i \leq n-2$ et inférieure à r si $i = n-1$. Considérons maintenant les disques $D_{i,2r}$ centrés au points γ_i, $0 \leq i \leq n-1$ et ayant pour rayon $2r$. Un résultat classique montre que pour tout i

$$[\gamma_i,\, \gamma_{i+1}] \subset D_{i,r}.$$

Ceci conduit à la constatation suivante

$$\mathcal{T}_r \subset \cup_{i=0}^{n-1} D_{i,2r}.$$

Car si on prend $x \in \mathcal{T}_r$ alors il existe $x_1 \in \gamma$ tel que $d(x,\, x_1) \leq r$. D'autre part, il existe un certain j tel que $x \in [\gamma_j,\, \gamma_{j+1}]$. Il ne reste qu'appliquer l'inégalité triangulaire et le constat ci-dessus. Ainsi

$$|\mathcal{T}_r| \leq 4n\pi r^2.$$

Or $n \leq [\frac{L}{r}] + 1$. Donc en le reportant dans l'inégalité de dessus on trouve le contrôle souhaité.■

Posons

$$h_1 = e\ell\Big(\frac{h}{e\ell}\Big)^{\exp -V(t)}.$$

Alors, d'après la partie 2. du lemme 4, on a

$$\psi(t,\, (F_0)^c_{h_1}) \subset (F_t)^c_h \quad \text{et} \quad \psi(t,\, (F_0^c)_{h_1}) \subset (F_t^c)_h. \tag{84}$$

En conséquence, en posant

$$\mathcal{T}_{0,h_1} = \{x \in \mathbb{R}^2,\ \mathrm{dist}(x,\, \partial F_0) \leq h_1\},$$

on aura par la bijectivité du flot,

$$\mathcal{T}_{t,h} \subset \psi(t,\, \mathcal{T}_{0,h_1}).$$

On applique le lemme précédent, ainsi que la propriété de conservation de la mesure par le flot, on trouve

$$|\mathcal{T}_{t,h}| \leq 4\pi(L_0 h_1 + h_1^2).$$

Ainsi, le fait que

$$\|\omega_\nu(t)\|_{L^\infty} \leq \|\omega^0\|_{L^\infty},$$

permet d'avoir,

$$\|\omega_\nu(t) - \mathbf{1}_{F_t}\|^2_{L^2(\mathcal{T}_{t,h})} \leq C\|\omega^0\|^2_{L^\infty}(L_0\ell + \ell^2)\Big(\frac{h}{e\ell}\Big)^{\exp -V(t)}.$$

Ainsi en combinant cette estimation avec celles fournies par le théorème 3, on aura (avec $\alpha = 1/2$)
(85)
$$\|\omega_\nu(t)-\omega(t)\|_{L^2}^2 \leq C\|\omega^0\|_{L^\infty}^2 (L_0\ell+\ell^2)\Big(\frac{h}{e\ell}\Big)^{\exp -Ct\|\omega^0\|_{L^1\cap L^\infty}} + C\big(\frac{\nu t}{\ell^2}\big)^{\frac12}\big(\frac{C\ell}{h}\big)^{\exp C\|\omega^0\|_{L^1\cap L^\infty}^2 t^2},$$
sous les conditions
$$r_\nu(t) \leq \frac{h}{2} \quad \text{et} \quad (4). \tag{86}$$
Il s'agit maintenant d'évaluer $r_\nu(t)$. Donc en revenant à la définition de cette quantité et en se servant de la proposition 3, on trouve, vu que la fonction $x^{e^{-x}}$ est bornée sur $\mathbb{R}_+$
$$\begin{aligned} r_\nu(t) &\leq e\ell\Big(Ct\|\omega^0\|_{L^1\cap L^\infty}\big(\frac{\nu t}{\ell^2}\big)^{\frac14 e^{-Ct\|\omega^0\|_{L^1\cap L^\infty}}}\Big)^{e^{-Ct\|\omega^0\|_{L^1\cap L^\infty}}} \\ &\leq C\ell\big(\frac{\nu t}{\ell^2}\big)^{\frac14 e^{-Ct\|\omega^0\|_{L^1\cap L^\infty}}} \end{aligned}$$
Ainsi en faisant le choix :
$$\frac{\nu t}{\ell^2} = \big(\frac{h}{\tilde{C}\ell}\big)^{\tilde{C}\exp(\tilde{C}\|\omega^0\|_{L^1\cap L^\infty}^2 t^2)}, \tag{87}$$
avec $\tilde{C}$ une constante suffisamment grande, on voit que la première condition figurant dans (86) est satisfaite. D'un autre côté le dernier membre de l'inégalité (85) est majoré par
$$C\big(\frac{\nu t}{\ell^2}\big)^{\frac12-\tilde{C}^{-1}e^{-(\tilde{C}-C)t^2\|\omega^0\|_{L^1\cap L^\infty}^2}} \leq C\big(\frac{\nu t}{\ell^2}\big)^{\frac12-\tilde{C}^{-1}}$$
Ce qui permet d'avoir l'estimation du corollaire 1. Donc il ne reste plus que de remplir les conditions (83) et (4). Or une simple constatation montre qu'elles sont vérifiées si l'on a
$$\frac{\nu t}{\ell^2} \leq f\big(t\|\omega^0\|_{L^1\cap L^\infty}\big),$$
où f est une fonction positive strictement décroissante vers zéro. Ainsi la preuve de la première partie du corollaire 1 est achevée.

Convergence presque L^∞

En appliquant le théorème 2 aux systèmes (NS_ν) et (E) avec la donnée initiale $\omega^0 = \mathbf{1}_{F_0}$ et sachant que l'on peut remplacer $F_{t,\nu}$ par F_t (d'après la preuve de la première partie du corollaire 1), on obtient pour tout $p \geq 2$ et pour tout $t \in [0, C_1\|\omega^0\|_{L^1\cap L^\infty}^{-1}[$
$$\|\omega_\nu(t)-\omega(t)\|_{L^p(\mathcal{T}_{t,h}^c)} \leq C\|\omega^0\|_{L^1\cap L^\infty}\exp\Big(-\frac{e}{4}\Big(\frac{\ell^2}{\nu t}\Big)^{\frac14}\Big(\frac{h}{e\ell}\Big)^C\Big).$$
Il suffit maintenant d'utiliser le résultat classique suivant :

Lemme 7. *Soient X une parie mesurable de $\mathbb{R}^d$ et $f \in L^2(X)\cap L^\infty(X)$, alors*
$$\|f\|_{L^\infty(X)} = \lim_{p\to+\infty}\|f\|_{L^p(X)}.$$

Références

[1] J.-M. Bony, Calcul symbolique et propagation des singularités pour les équations aux dérivées partielles non linéaires, Ann. Sci. École Norm. Sup., **14**, pages 209-246, 1981.

[2] H. Bahouri et J.-Y. Chemin, Equations de transport relatives à des champs de vecteurs non-lipschitziens et mécanique des fluides, Arch. Rational Mech. Anal., **127**, pages 159-181, 1994.
Navier-Stokes. Diderot Editeur, Paris, 1995.

[3] J.-Y. Chemin, Perfect incompressible Fluids, Oxford University Press 1995.

[4] J.-Y. Chemin, A Remark on the inviscid limit for two-dimmensionnel incompressible fluid, Communication in Partial Differential Equations, **21**, pages 1771-1779, 1996.

[5] P. Constantin and J.Wu, Inviscid limit of vortex patches, Nonlinearity, **8**, no.5, pages 735-742, 1995.

[6] P. Constantin and J. Wu, The inviscid limit for non-smooth vorticity, Indiana Univ. Math. J., **45**, pages 67-81, 1996.

[7] R. Danchin, Poches de tourbillon visqueuses, Journal des Mathématiques Pures et Appliquées, **76**, issue 7, pages 609-647, 1997.

[8] V.I. Yudovich, Non-stationnary flows of an ideal incompressible fluid, Zhurnal Vych Matematika, **3**, pages 1032-106, 1963.