Université de Rennes 1
Institut Mathématique de Rennes

Chapitre 1 : Les nombres complexes

Exercice 1.1. Donner le module et un argument du nombre complexe $z = 1 - i$. Donner son conjugué. Ecrire z, $\bar{z}$ et $1/z$ sous forme trigonométrique.

Solution

(*solution complète*) $|z| = \sqrt{2}$; $\dfrac{z}{|z|} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} - i\dfrac{1}{\sqrt{2}}$. On cherche θ tel que $\cos\theta = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ et $\sin\theta = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$: $\arg(z) \equiv -\dfrac{\pi}{4}(2\pi)$. $\bar{z} = 1 + i$.

$\dfrac{z}{|z|} = \cos\left(-\dfrac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)$ donc $z = \sqrt{2}\left[\cos\left(-\dfrac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)\right]$.

$\bar{z} = \sqrt{2}\left[\cos\left(\dfrac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\dfrac{\pi}{4}\right)\right]$. $\dfrac{1}{z} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\left[\cos\left(\dfrac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\dfrac{\pi}{4}\right)\right]$.

Exercice 1.2. Donner la forme exponentielle des nombres complexes suivantes

1) $(4+4i)^2$ 2) $(4+4i)(1-i\sqrt{3})$ 3) $\dfrac{4+4i}{1-i\sqrt{3}}$, 4) $4-4i$.

Solution

$z_1 = 4 + 4i = 4\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$, $z_2 = 1 - i\sqrt{3} = 2e^{-i\frac{\pi}{3}}$.

1) $z_1^2 = 32e^{i\frac{\pi}{2}} = 32i$; 2) $z_1 z_2 = 8\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{12}}$; 3) $z_1/z_2 = 2\sqrt{2}e^{i\frac{7\pi}{12}}$; 4) $\bar{z}_1 = 4\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$.

Exercice 1.3. Calculer les racines carrées de

1) $2i$ 2) $1 + i\sqrt{3}$ 3) $-3 - 4i$ 4) $15 + 8i$.

Solution

1) $z = i$ (*solution complète*) :

Forme algébrique : on cherche $\omega = x + iy$ tel que $\omega^2 = z$. Pour cela on résout le système :

$$\left\{\begin{array}{c} \omega^2 = z \\ |\omega|^2 = |z| \end{array}\right\} \leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} x^2 - y^2 = 0 \ (1) \\ 2xy = 1 \ (2) \\ x^2 + y^2 = 1 \ (3) \end{array}\right\}$$

$(1) + (3)$ donne $x = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$; $(3) - (1)$ donne $y = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$; on déduit de (2) que $xy \geq 0$, donc les racines carrées sont donc $\omega_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$ et $\omega_2 = -\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2} = -\omega_1$.

(*Variante* : $(1) + (3)$ donne $x_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $x_2 = -\frac{\sqrt{2}}{2}$. (2) donne $y_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $y_2 = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.)

Forme exponentielle : on cherche $\omega = \rho e^{i\alpha}$, $\rho \in \mathbb{R}^+$ tel que $\omega^2 = z$ c'est-à-dire tel que $\rho^2 e^{i2\alpha} = e^{i\frac{\pi}{2}}$. Pour cela on résout le système :

$$\left\{ \begin{array}{c} \rho \in \mathbb{R}^+ \\ \rho^2 = 1 \\ 2\alpha \equiv \frac{\pi}{2}\,(2\pi) \end{array} \right\} \leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} \rho = 1 \\ \alpha = \frac{\pi}{4}\,[\pi]. \end{array} \right\}$$

Les racines carrées de $i = e^{i\frac{\pi}{2}}$ sont donc $\omega_1 = e^{i\frac{\pi}{4}}$ et $\omega_2 = e^{i\frac{5\pi}{4}} = -\omega_1$.

2) $z = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$. Les deux méthodes donnent $\omega_{1,2} = \pm e^{i\frac{\pi}{6}} = \pm\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}\right)$.

3) $z = -3 - 4i$: $\omega_{1,2} = \pm(1 - 2i)$.

4) $z = 15 + 8i$: $\omega_{1,2} = \pm(4 + i)$.

Exercice 1.4. Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

1) $z^2 - 3z + 4 = 0$ 2) $z^2 - 8(1 - i)z + 63 - 16i = 0$ 3) $z^2 - (3 + 4i)z - 1 + 5i = 0$.

Solution

1) (*Solution complète.*) On cherche les solutions de $p(z) = az^2 + bz + c = z^2 - 3z + 4 = 0$. Le discriminant est $\Delta = b^2 - 4ac = -7$. Les racines carrées de Δ sont $\omega = i\sqrt{7}$ et $-\omega$. Les solutions de $p(z) = 0$ sont : $z_{1,2} = \dfrac{-b \pm \omega}{2a}$ donc $z_1 = \frac{3+i\sqrt{7}}{2}$ et $z_2 = \overline{z_1}$.

(*Remarque* On peut faire vérifier aux etudiants que $p(z_1) = p(z_2) = 0$.)

2) $z^2 - (3 + 4i)z - 1 + 5i = 0$: $\Delta = -3 + 4i$; $\omega_{1,2} = \pm(1 + 2i)$; $z_1 = 1 + i$, $z_2 = 2 + 3i$.

Exercice 1.5. [juin 2009]

Le but ici est de déterminer les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $z^3 - 6z - 7i = 0 \quad (\star)$.

1) Vérifier que $z_1 = -i$ est une solution de l'équation $(\star)$.

2) En déduire que $z^3 - 6z - 7i = (z + i)P(z)$, où $P(z)$ est un polynôme à déterminer.

3) Donner toutes les solutions complexes de $(\star)$

Exercice 1.6. Calculer les racines

1) cubiques de $-2 + 2i$, 2) quatrièmes de 81 et -81,

3) sixièmes de $\dfrac{1 - i}{i + \sqrt{3}}$, 4) huitièmes de $\dfrac{1 + i}{\sqrt{3} - i}$.

Solution

1) $z = -2 + 2i$. (*solution complète*) On trouve $z = 2\sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}$; On cherche $w = \rho e^{i\alpha}$, $\rho \geq 0$, t.q. $w^3 = z$. On résout $\rho^3 e^{i3\alpha} = \sqrt{2^3}e^{i\frac{3\pi}{4}}$, $\rho \geq 0$. On obtient $\rho = \sqrt{2}$ et $\alpha \equiv \frac{\pi}{4}\ (\frac{2\pi}{3})$, c.à.d. $w_k = \sqrt{2}e^{i(\frac{\pi}{4} + \frac{2k\pi}{3})}$, $k = 0, 1, 2$.

$w_0 = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}} = 1 + i$; $w_1 = \sqrt{2}e^{i\frac{11\pi}{12}}$, $w_2 = \sqrt{2}e^{i\frac{19\pi}{12}}$.

Remarque. On vérifie que $w_1 = w_0 j$ et $w_2 = w_0 j^2$, où $j = e^{i\frac{2\pi}{3}}$ et $j^2 = e^{i\frac{4\pi}{3}}$ sont les racines troisièmes ($\neq 1$) de l'unité. En utilisant $j = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $j^2 = \bar{j}$ on obtient $w_1 = -\frac{1}{2}[(1+\sqrt{3}) + i(-1+\sqrt{3})]$ et $w_2 = -\frac{1}{2}[(1-\sqrt{3}) + i(1+\sqrt{3})]$.

Remarque. On pourrait aussi dire que w_0 est une racine troisième de z, donc les autres sont $w_0 j$ et $w_0 j^2$.

2) • $z = 81 = 3^4$. Les racines quatrièmes sont $w_k = 3e^{i\frac{k\pi}{2}}, k = 0, 1, 2$, c.à.d. $3, 3i, -3, -3i$. (*Variante.* 3 est racine quatrième évidente et $\pm 1, \pm i$ sont les racines quatrièmes de l'unité.)

• $z = -81 = 3^4 e^{i\pi}$. Les racines quatrièmes sont $w_k = 3e^{i(\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2})}$, $k = 0, 1, 2$, c.à.d. $w_0 = 3(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2})$, $w_1 = iw_0 = 3(-\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2})$, $w_2 = -w_0 = 3(-\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2})$, $w_3 = -iw_0 = 3(\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2})$.

3) $z = \frac{1-i}{i+\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}}{2e^{i\frac{\pi}{6}}} = 2^{-\frac{1}{2}}e^{-i\frac{5\pi}{12}}$. Les racines sixièmes de z sont $w_k = 2^{-\frac{1}{12}}e^{i(\frac{-5\pi}{72}+\frac{k\pi}{3})}$, $k = 0, \ldots, 5$.

4) $z = \frac{1+i}{-i+\sqrt{3}} = 2^{-\frac{1}{2}}e^{i\frac{5\pi}{12}}$ (il s'agit du conjugué du z de la dernière question). Les racines huitièmes de z sont $w_k = 2^{-\frac{1}{16}}e^{i(\frac{5\pi}{96}+\frac{k\pi}{4})}$, $k = 0, \ldots, 7$.

Exercice 1.7. [décembre 2008]

On pose $z = -4\sqrt{2} + 4i\sqrt{2}$.

1) Calculer le module de z.
2) Donner la forme exponenetielle de z.
3) Déterminer sous forme exponentielle les trois racines cubiques de z.

Exercice 1.8. Calculer $(1-i)^6$. En déduire (en utilisant j et j^2) les racines $6^{\text{èmes}}$ de $8i$, puis les valeurs de $\cos\frac{\pi}{12}$ et $\sin\frac{\pi}{12}$.

Exercice 1.9. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation

$$z^{2009} = \bar{z}.$$

Solution

(*Solution complète.*) $(1-i)^6 = (-2i)^3 = 8i$. (*Variante* $(1-i)^6 = (\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}})^6 = 8i$.)

On a donc une racine sixième de $8i$: $(1-i)$.

On cherche les racines sixièmes de l'unité : $w_0 = 1$, $w_1 = e^{i\frac{\pi}{3}} = -j^2$, $w_2 = e^{i\frac{2\pi}{3}} = j$, $w_3 = e^{i\frac{3\pi}{3}} = -1$, $w_4 = e^{i\frac{4\pi}{3}} = j^2$, $w_5 = e^{i\frac{5\pi}{3}} = -j$, où $j = e^{i\frac{2\pi}{3}}$ est une racine troisième de l'unité.

(*Variantes.* Les racines troisièmes de l'unité sont $1, j, j^2$. Les racines sixièmes de l'unité sont les racines carrées des racines troisièmes de l'unité : Les racines carrées de $1, j = j^4, j^2$ sont respectivement ± 1, $\pm j^2$, $\pm j$. *Autre Variante :* tout produit d'une racine carrée (± 1) et d'une racine troisième $(1, j, j^2)$ de l'unité est une racine sixième de l'unité : Les six produits

qu'on obtient : $\pm 1, \pm j, \pm j^2$ sont différentes, donc on a trouvé toutes les racines sixième de l'unité.)

On en déduit que les racines sixièmes de $8i$ sont $z_i = (1-i)w_i$, $i = 0, \ldots, 5$.

Forme exponentielle : $z_0 = \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$, $z_1 = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{12}}$, $z_2 = \sqrt{2}e^{i\frac{5\pi}{12}}$, $z_3 = \sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}} = -z_0$, $z_4 = \sqrt{2}e^{i\frac{13\pi}{12}} = -z_1$, $z_5 = \sqrt{2}e^{i\frac{17\pi}{12}} = -z_2$.

Forme algébrique (on utilise $j = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $j^2 = \bar{j}$) : $z_0 = 1+i$, $z_1 = \frac{1+\sqrt{3}}{2} + i(\frac{-1+\sqrt{3}}{2})$, $z_2 = \frac{-1+\sqrt{3}}{2} + i(\frac{1+\sqrt{3}}{2})$, $z_3 = -z_0$, $z_4 = -z_1$, $z_5 = -z_2$.

On en déduit que $\cos(\frac{\pi}{12}) = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4} \sim 0.9659258$ et $\sin(\frac{\pi}{12}) = \frac{-\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4} \sim 0.2588190$.

Exercice 1.10. Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

1) $z^3 + 3z - 2i = 0$ 2) $z^4 + 2z^2 + 4 = 0$ 3) $z^7 - 3iz^4 - iz^3 - 3 = 0$.

Solution

1) $p(z) = z^3 + 3z - 2i$ (*solution complète*) $z_1 = i$ est solution évidente de $p(z) = 0$, donc p est divisible par $z - i$. On pourrait alors expliquer aux etudiants la division euclidienne d'un polynôme par un autre :

$$\begin{array}{r|l}
z^3 \qquad\quad + 3z - 2i & z - i \\ \cline{2-2}
z^3 - iz^2 \qquad\qquad & z^2 + iz + 2 \\ \cline{1-1}
iz^2 + z \qquad & \\ \cline{1-1}
2z - 2i & \\
2z - 2i & \\ \cline{1-1}
0 &
\end{array}$$

Variante. On pose $z^3 + 3z - 2i = (z-i)(\alpha z^2 + \beta z + \gamma)$ et on trouve par identification $\alpha = 1$, $\beta = i$, $\gamma = 2$.

On cherche les racines de $q(z) = z^2 + iz + 2$: $\Delta = -9 = (\pm 3i)^2$ et $z_{2,3} = \frac{-i \pm 3i}{2}$, c.à.d. $z_2 = i$ et $z_3 = -2i$.

Les racines de $p(z)$ sont i (racine double) et $-2i$.

2) $p(z) = z^4 + 2z^2 + 4$. z est solution de $p(z) = 0$ ssi $Z = z^2$ est solution de $q(Z) = Z^2 + 2Z + 4 = 0$.

Les solutions de $q(Z) = 0$ sont $Z_{1,2} = -1 \pm i\sqrt{3} = 2e^{\pm i\frac{2\pi}{3}}$. Les racines carrées de $2e^{i\frac{2\pi}{3}}$ sont $z_{1,2} = \pm\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{3}} = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}(1 + i\sqrt{3})$, donc (conjugués) les racines carrées de $2e^{-i\frac{2\pi}{3}}$ sont $z_{3,4} = \pm\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{3}} = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}(1 - i\sqrt{3})$.