
EXEMPLES DE SYSTÈMES DYNAMIQUES QUASI-HYPERBOLIQUES À DÉCORRÉLATIONS LENTES

PAR STÉPHANE LE BORGNE

RÉSUMÉ. — Nous donnons des exemples de systèmes dynamiques quasi-hyperboliques ayant les propriétés suivantes : décroissance des corrélations à la vitesse $1/\sqrt{n}$, convergence des sommes ergodiques (normalisées par $n^{3/4}$) associées à des fonctions régulières non dégénérées vers une loi non gaussienne.

ABSTRACT (*Examples of quasi-hyperbolic dynamical systems with slow decay of correlations*)

We give examples of quasi-hyperbolic dynamical systems with the following properties : polynomial decay of correlations, convergence in law toward a non gaussian law of the ergodic sums (divided by $n^{3/4}$) associated to non degenerated regular functions.

Introduction

Dans la littérature consacrée aux propriétés aléatoires de transformations quasi-hyperboliques de variétés les résultats recherchés sont le plus souvent la décroissance exponentielle des corrélations et le théorème limite central. Depuis quelques années plusieurs exemples de systèmes dynamiques ont été donnés pour lesquels les corrélations et les comportements en loi sont différents ([4], [10], [11], [13], [15]). Nous présentons ici une nouvelle famille d'exemples (de systèmes qui peuvent-être inversibles) construits de manière très simple comme produits gauches de systèmes dynamiques.

Soit (X, A, μ) un système d'Anosov et (Y, ϕ_t, ν) un flot d'Anosov tous les deux exponentiellement mélangeants. Fixons une fonction régulière de X dans \mathbb{R} . Sur le produit $X \times Y$ définissons la transformation

$$T : X \times Y \longrightarrow X \times Y \\ (x, y) \longmapsto (Ax, \phi_{f(x)}y).$$

STÉPHANE LE BORGNE, Université de Rennes, Campus de Beaulieu, 35042 Rennes Cedex
E-mail : sleborgn@univ-rennes1.fr

Classification mathématique par sujets (2000). — 37D30(22E46 22F30 60F05).

Mots clefs. — hyperbolicité partielle, quasi-hyperbolicité, théorème limite central.

La transformation hyperbolique A agit sur la première coordonnée; le flot agit sur la deuxième coordonnée pendant un temps dépendant de la première. La mesure produit $\mu \otimes \nu$ est invariante par T : le triplet $(X \times Y, T, \mu \otimes \nu)$ définit un système dynamique.

Notons $S_n f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} f(A^k x)$ (par convention posons $S_0 = 0$) les sommes ergodiques associées à l'action de A sur la fonction f . Un calcul simple montre qu'on a, pour tout $n \geq 0$, l'expression de la $n^{\text{ième}}$ itérée de T :

$$T^n(x, y) = (A^n x, g_{S_n f(x)} y)$$

Comme f est de moyenne nulle les sommes ergodiques $S_n f$ croissent presque sûrement moins vite que $n^{1/2+\varepsilon}$ (pour tout $\varepsilon > 0$). On en déduit que la transformation T a un exposant de Lyapounoff nul dans les sous-espaces tangents aux sous-variétés $\{x\} \times Y$.

0.1. Décroissance des corrélations. — Notons $\sigma(f)$ la quantité positive définie par

$$\sigma^2(f) = \int_X f^2 d\mu + 2 \sum_{k \geq 1} \langle f, A^k f \rangle .$$

THÉORÈME 0.1. — *Si la fonction f est apériodique et si $\varphi : X \times Y \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction höldérienne d'intégrale nulle pour la mesure $\mu \otimes \nu$ telle que la fonction $y \mapsto \int_X \varphi(a, y) d\mu(a)$ n'est pas un cobord au sens du flot, alors le nombre*

$$\Sigma^2(\varphi) = \int_{\mathbb{R}} \int_Y \left(\int_X \varphi(a, g_b y) d\mu(a) \right) \left(\int_X \varphi(c, y) d\mu(c) \right) d\nu(y) db$$

est strictement positif et le coefficient de corrélation $\langle \varphi \circ T^k, \varphi \rangle$ est équivalent, lorsque k tend vers l'infini, à

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi k \sigma(f)}} \Sigma^2(\varphi).$$

Démonstration : Nous voulons connaître le comportement asymptotique lorsque k tend vers l'infini de

$$\begin{aligned} \langle \varphi \circ T^k, \varphi \rangle &= \mathbb{E}(\varphi(T^k \cdot, g_{S_k f(\cdot)} \cdot) \varphi(\cdot, \cdot)) \\ &= \int_{X \times Y} \varphi(T^k x, g_{S_{k-1} f(x)} y) \varphi(x, y) d\mu(x) d\nu(y). \end{aligned}$$

Considérons la fonction F :

$$\begin{aligned} X \times \mathbb{R} \times X &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (a, b, c) &\longmapsto \int_Y \varphi(a, g_b y) \varphi(c, y) d\nu(y) - \left(\int_Y \varphi(a, y) d\nu(y) \right) \left(\int_Y \varphi(c, y) d\nu(y) \right). \end{aligned}$$

Le coefficient de corrélation $\langle \varphi \circ T^k, \varphi \rangle$ est égal à

$$\int_X F(T^k x, S_{k-1} f(x), x) d\mu(x) + \int_X \left(\int_Y \varphi(T^k x, y) d\nu(y) \right) \left(\int_Y \varphi(x, y) d\nu(y) \right) d\mu(x).$$

L'action de A est exponentiellement mélangeante donc le deuxième élément de cette somme tend exponentiellement vite vers 0 lorsque k tend vers l'infini.

L'action du flot est exponentiellement mélangeante. La fonction F décroît exponentiellement vite lorsque b tend vers l'infini. Le théorème local de Guivarc'h et Hardy [5] assure donc que l'intégrale

$$\int_X F(T^k x, S_{k-1} f(x), x) d\mu(x)$$

est équivalente à,

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\sqrt{2\pi k\sigma(f)}} \int_{X \times \mathbb{R} \times X} F(a, b, c) d\mu(a) db d\mu(c) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi k\sigma(f)}} \int_{\mathbb{R}} \left(\int_X \int_X \int_Y \varphi(a, g_b y) \varphi(c, y) d\nu(y) d\mu(a) d\mu(c) \right. \\ & \quad \left. - \underbrace{\int_X \int_X \int_Y \varphi(a, y) d\nu(y) \int_Y \varphi(c, y) d\nu(y) d\mu(a) d\mu(c)}_0 \right) db \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi k\sigma(f)}} \underbrace{\int_{\mathbb{R}} \int_Y \left(\int_X \varphi(a, g_b y) d\mu(a) \right) \left(\int_X \varphi(c, y) d\mu(c) \right) d\nu(y) db}_{\Sigma^2(\varphi)}. \end{aligned}$$

La quantité $\Sigma^2(\varphi)$ est nulle si et seulement si la fonction $y \mapsto \int_X \varphi(a, y) d\mu(a)$ est un cobord au sens du flot (voir [3] pour plus de détails) c'est-à-dire si et seulement s'il existe une fonction $\psi : Y \rightarrow \mathbb{R}$ telle que pour presque tout $y \in Y$ on ait

$$\int_X \varphi(a, y) d\mu(a) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\psi(g_t y) - \psi(y)}{t}.$$

COROLLAIRE 0.1. — Si $\Sigma^2(\varphi)$ n'est pas nul la variance de $\sum_{k=0}^{n-1} \varphi \circ T^k$ est équivalente à

$$\frac{8}{3} \frac{\Sigma^2(\varphi)}{\sqrt{2\pi\sigma(f)}} n^{3/2}.$$

Remarque : On peut faire une construction analogue en temps continu. Soit (Z, ψ_t, ρ) un flot d'Anosov. Définissons l'application

$$\begin{aligned} \chi_t : Z \times Y &\longrightarrow Z \times Y \\ (z, y) &\longmapsto (\psi_t z, \phi_{\int_0^t f(\psi_s z) ds} y). \end{aligned}$$

On obtient un flot quasi-hyperbolique avec décroissance des corrélations en $t^{-1/2}$. Pour le montrer il faut utiliser les résultats de Waddington [14].

0.2. La convergence en loi. — Une fois fait le calcul du comportement des variances, se pose la question de la convergence en loi. Nous traitons ce problème sur un exemple. De nombreuses difficultés techniques surgissent lorsqu'on essaye de généraliser notre résultat.

L'exemple que nous examinons est le suivant. Considérons

- le groupe $G = PSL(2, \mathbb{R})$,
- Γ un réseau cocompact de G ,
- le groupe à un paramètre $g_t := \begin{pmatrix} e^{t/2} & 0 \\ 0 & e^{-t/2} \end{pmatrix}$,
- le tore de dimension 2, \mathbb{T}^2 ,
- une fonction f de \mathbb{T}^2 dans \mathbb{R} , d'intégrale nulle,
- la matrice $A := \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Rudolph a introduit en 1988 l'application

$$T : \mathbb{T}^2 \times G/\Gamma \longrightarrow \mathbb{T}^2 \times G/\Gamma$$

$$(x, y) \longmapsto (Ax, g_{f(x)}y).$$

Un exemple de fonction "concrète" pour lequel le système a les propriétés adéquate est la fonction :

$$f : \mathbb{T}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$(x_1, x_2) \longmapsto \sin(2\pi x_1).$$

La transformation T a deux exposants de Lyapounoff non nuls, $\lambda = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$ et $\frac{1}{\lambda}$, associées à deux directions l'une dilatée l'autre contractée uniformément par T et un exposant de Lyapounoff nul dans les sous-espaces de dimension 3 tangents aux sous-variétés $\{x\} \times G/\Gamma$.

Le système $(\mathbb{T}^2 \times G/\Gamma, T, m)$ est une version régulière de la transformation T, T^{-1} . Comme elle, c'est un exemple de K -système ne possédant pas la propriété de Bernoulli. C'est pour donner un exemple régulier de système ayant cette propriété que Rudolph a défini ce système.

Dans \mathbb{R}^2 appelons \tilde{x}_0 (resp. \tilde{x}_{-1}) le point d'intersection de la droite contractée par A passant par le point $(1, 0)$ (resp. $(1, -1)$) et de la droite dilatée par A passant par le point $(1, 1)$. Ce sont des points homoclines : dans le tore $T^k \tilde{x}_0$ et $T^k \tilde{x}_{-1}$ tendent vers zéro lorsque k tend vers $+\infty$ et vers $-\infty$.

THÉORÈME 0.2. — *Soit f une fonction höldérienne telle que*

$$2 \sum_{-\infty}^{\infty} (f(T^k \tilde{x}_0) - f(0)) \neq \sum_{-\infty}^{\infty} (f(T^k \tilde{x}_{-1}) - f(0)).$$

Soit $\varphi : \mathbb{T}^2 \times G/\Gamma \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction höldérienne telle que $\Sigma^2(\varphi)$ soit non nul. Il existe trois mouvements browniens (non nécessairement réduits) W, W_+, W_- tels que, si on note $L_t(x)$ le temps local de W en x , on ait :

$$\frac{1}{n^{3/4}} \sum_{k=0}^{n-1} \varphi \circ T^k \xrightarrow{\mathcal{L}} \int_0^{+\infty} L_1(x) dW_+(x) + \int_0^{+\infty} L_1(-x) dW_-(x)$$

Remarque : On vérifie aisément que si f est un cobord la condition portant sur f dans le théorème n'est pas remplie. Pour les fonction régulières et pour l'automorphisme A , être apériodique se réduit à n'être pas un cobord. La condition du théorème est plus forte que l'apériodicité *a priori*. Est-elle réellement plus forte ? Autre question : pour quels systèmes et quelles fonctions les notions de cobord et de périodicité coïncident-elles ?

La démonstration du théorème occupe le reste de l'article.

On a toujours $\Sigma^2(\varphi - \int_{\mathbb{T}^2} \varphi(a, \cdot) da) = 0$. L'étude de la convergence en loi de $\sum \varphi \circ T^k$ se ramène donc à celle de $\sum (\int_{\mathbb{T}^2} \varphi(a, \cdot) da) \circ T^k$. Autrement dit on peut se limiter au cas où φ dépend uniquement de la deuxième coordonnée. C'est ce que nous ferons désormais.

Nous nous ramènerons à un cas particulier d'un théorème dû à Kesten et Spitzer [8].

THÉORÈME 0.3. — (*Kesten, Spitzer*) Soit X_i une suite de variables aléatoires indépendantes de même loi centrée à valeurs dans \mathbb{Z} . Soit (ξ_i) une suite de variables aléatoires indépendantes de même loi centrée, indépendantes des variables X_i . Il existe trois mouvements browniens indépendants W, W_+, W_- tel que si, $L_t(x)$ désigne le temps local de W en x , on ait :

$$\frac{1}{n^{3/4}} \sum_{k=0}^{n-1} \xi_{X_0+\dots+X_k} \xrightarrow{\mathcal{L}} \int_0^{+\infty} L_1(x) dW_+(x) + \int_0^{+\infty} L_1(-x) dW_-(x)$$

Le théorème est une conséquence immédiate des deux propositions suivantes et du théorème de Kesten et Spitzer.

On commence par faire des paquets suivant les valeurs des sommes ergodiques de l'action de A sur f . Posons

$$N(n, p) = \#\{k \in \{0, \dots, n-1\} \mid S_k f \in [p, p+1]\}.$$

PROPOSITION 0.2.1. — *Sous les hypothèses du théorème, on a*

$$\frac{1}{n^{3/4}} \sum_{p \in \mathbb{Z}} [N(n, p) \int_p^{p+1} \varphi(g_t \cdot) dt - \sum_{\substack{k: \\ S_k f \in [p, p+1[}} \varphi(g_{S_k f} \cdot)] \xrightarrow{\mathbb{P}} 0$$

Notons Φ la fonction $\Phi(y) = \int_0^1 \varphi(g_t y) dt$. On a alors $\int_p^{p+1} \varphi(g_t y) dt = \Phi \circ g_p(y)$.

On montre ensuite qu'on peut se ramener au théorème de Kesten et Spitzer.

PROPOSITION 0.2.2. — *Sous les hypothèses du théorème, il existe deux suites indépendantes de variables aléatoires indépendantes (X_i) , (ξ_i) à valeurs entières telles que :*

$$\mathbb{E}(\exp(it \frac{1}{n^{3/4}} \sum_{p \in \mathbb{Z}} N(n, p) \Phi \circ g_p)) - \mathbb{E}(\exp(it \frac{1}{n^{3/4}} \sum_{k=0}^{n-1} \xi_{X_0+\dots+X_k})) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

Afin de démontrer ces deux propositions nous nous appuyerons sur les trois lemmes suivants.

LEMME 0.2.3. — (*Écartés modérés*) Il existe $C > 0, c > 0$ tel que, pour tout n , tout $\beta \in]0, \frac{1}{2}[$, on ait

$$\mathbb{P}(S_n f > n^{1-\beta}) \leq C e^{-cn^{1-2\beta}}$$

(La probabilité \mathbb{P} est ici la mesure de Lebesgue sur \mathbb{T}^2).

LEMME 0.2.4. — (*Mélange multiple pour le flot géodésique*)

Soient m et m' deux entiers naturels, $(\Phi_i)_{i=i}^{m+m'}$ des fonctions höldériennes définies sur $G/\Gamma, t_1, \dots \leq t_m \leq 0 \leq s_1 \dots \leq s_{m'}, T > 0$ des nombres réels. Il existe $C > 0$, et $\delta \in]0, 1[$, tels que

$$\text{Cov} \left(\prod_{i=1}^m \Phi_i \circ g_{t_i}, \prod_{j=1}^{m'} \Phi_j \circ g_{s_j+T} \right) \leq C \left(\prod_{i=1}^{m+m'} \|\Phi_i\|_\infty + \sum_j [\Phi_j] \prod_{i \neq j} \|\phi_j\|_\infty \right) \delta^T.$$

Un intervalle I étant donné, notons $N(n, I)$ la quantité :

$$N(n, I) = \#\{k \in \{0, -n-1\} / S_k f \in I\}.$$

LEMME 0.2.5. — Il existe $\varepsilon_0 > 0, \xi > 0, C > 0$ tels que pour tout un intervalle I de longueur 1, tout nombre $\varepsilon \in]0, \varepsilon_0]$, tout choix de deux sous intervalles J, K de I de longueur $\frac{1}{[n^\varepsilon]}$ on ait :

$$\begin{aligned} |\mathbb{E}(N(n, I)^2) - [n^\varepsilon] \mathbb{E}(N(n, I)N(n, J))| &\leq C n^{1-\xi} \\ |\mathbb{E}(N(n, J)N(n, K)) [n^\varepsilon]^2 - \mathbb{E}(N(n, I))| &\leq C n^{1-\xi} \\ \mathbb{E}(N(n, I)^3) &\leq C n^{3/2} \end{aligned}$$

Le premier lemme est un résultat de type “grands écarts” classique. Le deuxième est une conséquence de la bonne répartition des orbites des flots horicycliques dans G/Γ . Nous avons déjà utilisé un tel énoncé dans un travail en collaboration avec Pène sur la vitesse de convergence dans le TLC pour certains flots. Nous ne démontrerons pas ces lemmes, renvoyant respectivement à [2] et [9]. Le troisième se déduit d’un résultat de vitesse dans le théorème limite local pour les sommes $S_n f$. Bien que naturelle cette question a semble-t-il été assez peu étudiée (pour les cas des variables aléatoires indépendantes citons le travail de Breuillard ([1])).

On peut construire d’autres systèmes dynamiques ayant des propriétés différentes en suivant le même procédé. Il est possible par exemple d’empiler deux étages au dessus de l’automorphisme :

$$\begin{aligned} T : \mathbb{T}^2 \times G/\Gamma \times G/\Gamma &\longrightarrow \mathbb{T}^2 \times G/\Gamma \times G/\Gamma \\ (x, y, z) &\longmapsto (Ax, g_{f(x)}y, g_{h(y)}z). \end{aligned}$$

Pour montrer que la décroissance des corrélations est en $k^{-1/2}$ nous avons utiliser le théorème limite local pour l’automorphisme du tore. Nous ne disposons pas de ce résultat pour le produit gauche à un étage. Si on fait l’hypothèse qu’il est satisfait on peut penser

que la vitesse de décorrélation pour le système à deux étages est en $k^{-3/4}$. Des expériences numériques confirme cette hypothèse.

Au premier paragraphe nous démontrons les propositions en utilisant les lemmes. Le paragraphe 2 est consacré à la preuve du troisième lemme.

1. Preuve des deux propositions

Rappelons que nous avons noté $N(n, p)$ la quantité

$$N(n, p) = \#\{k \in \{0, \dots, n-1\} / S_k f \in [p, p+1[\}.$$

1.1. Démonstration de la première proposition. — Rappelons qu'il s'agit de montrer

$$\frac{1}{n^{3/4}} \sum_{p \in \mathbb{Z}} [N(n, p) \int_p^{p+1} \varphi(g_t y) dt - \sum_{\substack{k \\ S_k f \in [p, p+1[}} \varphi(g_{S_k f} y)] \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\mathbb{P}} 0.$$

Nous allons voir que la convergence a lieu en norme L^2 . Il suffit de montrer qu'il existe $\xi > 0, C > 0$ tel que

$$\mathbb{E} \left(\left(\sum_{p \in \mathbb{Z}} [N(n, p) \int_p^{p+1} \varphi(g_t y) dt - \sum_{\substack{k \\ S_k f \in [p, p+1[}} \varphi(g_{S_k f} y)] \right)^2 \right) < C n^{3/2-\xi}.$$

Désignons pour ε un nombre positif dont nous fixerons la valeur plus tard et notons $N(n, \ell, p)$ la quantité :

$$N(n, \ell, p) = \#\left\{ k \in \{0, \dots, n-1\} / S_k f \in \left[p + \frac{\ell}{[n^\varepsilon]}, p + \frac{\ell+1}{[n^\varepsilon]} \right] \right\}.$$

Ecrivons alors $\sum_{p \in \mathbb{Z}} [N(n, p) \int_p^{p+1} \varphi(g_t y) dt - \sum_{\substack{k \\ S_k f \in [p, p+1[}} \varphi(g_{S_k f} y)]$ comme une somme de deux

termes A_n et B_n :

$$A_n = \sum_{p \in \mathbb{Z}} \left[N(n, p) \int_p^{p+1} \varphi(g_t y) dt - \sum_{\ell=0}^{[n^\varepsilon]-1} N(n, \ell, p) [n^\varepsilon] \int_{p + \frac{\ell}{[n^\varepsilon]}}^{p + \frac{\ell+1}{[n^\varepsilon]}} \varphi(g_t y) dt \right],$$

$$B_n = \sum_{p \in \mathbb{Z}} \left[\sum_{\ell=0}^{[n^\varepsilon]-1} N(n, \ell, p) [n^\varepsilon] \int_{p + \frac{\ell}{[n^\varepsilon]}}^{p + \frac{\ell+1}{[n^\varepsilon]}} \varphi(g_t y) dt - \sum_{\ell=0}^{[n^\varepsilon]-1} \sum_{\substack{k \\ S_k f \in [p + \frac{\ell}{[n^\varepsilon]}, p + \frac{\ell+1}{[n^\varepsilon]}[}} \varphi(g_{S_k f} y) \right].$$

Majoration de $\mathbb{E}(A_n^2)$

Après légère transformation on a

$$A_n^2 = \sum_{p,q} \sum_{\ell,m} (N(n,p) - N(n,\ell,p)[n^\varepsilon])(N(n,q) - N(n,m,q)[n^\varepsilon]) \\ \int_{p+\frac{\ell}{[n^\varepsilon]}}^{p+\frac{\ell+1}{[n^\varepsilon]}} \varphi(g_t u) dt \int_{q+\frac{\ell}{[n^\varepsilon]}}^{q+\frac{\ell+1}{[n^\varepsilon]}} \varphi(g_t y) dt.$$

Grâce aux lemmes 0.2.3 et 0.2.4 on voit qu'on fait une erreur bornée si on remplace cette somme par la même somme où p, q varie dans l'ensemble $\{(p, q) / |p| \leq n^{1/2+\alpha}, |q| < n^{1/2+\alpha}, |p - q| \leq n^\alpha\}$ qui compte $n^{1/2+2\alpha}$ termes. Grâce à l'inégalité de Cauchy-Schwarz dans L^2 on majore chacun de ces termes :

$$\mathbb{E}((N(n,p) - N(n,\ell,p)[n^\varepsilon])(N(n,q) - N(n,m,q)[n^\varepsilon]) \\ \leq \|N(n,p) - N(n,\ell,p)[n^\varepsilon]\|_2 \|N(n,q) - N(n,m,q)[n^\varepsilon]\|_2$$

En développant le carré et en utilisant le lemme 0.2.5 on obtient :

$$\mathbb{E}((N(n,p) - N(n,\ell,p)[n^\varepsilon])^2) = \mathbb{E}(N(n,p)^2 - 2N(n,p)N(n,\ell,p)[n^\varepsilon] \\ + N(n,\ell,p)^2[n^\varepsilon]^2) \\ = 0(n^{1-\xi})$$

En tenant compte du nombre de termes dans la somme A_n^2 et du fait que les intégrales sont inférieures à $\|\varphi\|_\infty/[n^\varepsilon]^2$, on en déduit

$$\mathbb{E}(A_n^2) \leq C(1 + n^{1/2+2\alpha}n^{1-\xi}) \leq Cn^{3/2+2\alpha-\xi}$$

Pour que cette quantité soit négligeable par rapport à $n^{3/2}$ on prend donc α tel que $2\alpha < \xi$.

Majoration de $\mathbb{E}(B_n^2)$

Comme précédemment grâce aux lemmes 0.2.3 et 0.2.4, on se ramène à l'étude de

$$\sum_{\substack{p,q \\ |p||q| \leq n^{1/2+\alpha} \\ |p-q| \leq n^\alpha}} \sum_{\ell,m} \left(N(n,\ell,p)[n^\varepsilon] \int_{p+\frac{\ell}{[n^\varepsilon]}}^{p+\frac{\ell+1}{[n^\varepsilon]}} \varphi(g_t y) dt - \sum_{\substack{k \\ S_k f \in [p+\frac{\ell}{[n^\varepsilon]}, p+\frac{\ell+1}{[n^\varepsilon]}[n^\varepsilon]}} \varphi(g_{S_k} f y) \right) \\ \left(N(n,m,q)[n^\varepsilon] \int_{q+\frac{m}{[n^\varepsilon]}}^{q+\frac{m+1}{[n^\varepsilon]}} \varphi(g_t y) dt - \sum_{\substack{f \\ S_k f \in [q+\frac{m}{[n^\varepsilon]}, q+\frac{m+1}{[n^\varepsilon]}[n^\varepsilon]}} \varphi(g_{S_k} f y) \right)$$

Mais, si $S_k f \in [p + \frac{\ell}{n^\varepsilon}, p + \frac{\ell+1}{n^\varepsilon}[$, $|\int_{p+\frac{\ell}{n^\varepsilon}}^{p+\frac{\ell+1}{n^\varepsilon}} \varphi(g_t y) dt - \varphi(g_{S_k} f y)| \leq \frac{c}{[n^\varepsilon]^\zeta}$ donc

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(B_n^2) &\leq C + \sum_{\substack{p,q \\ |p||q| \leq n^{1/2+\alpha} \\ |p-q| \leq n^\alpha}} \sum_{\ell,m} \mathbb{E}(N(n, \ell, p)N(n, m, q)) \frac{C}{[n^\varepsilon]^{2\zeta}} \\ &\leq C n^{1/2+2\alpha+2\varepsilon} \times \frac{1}{n^{2\varepsilon\zeta}} \times n^{1-2\varepsilon} = C n^{3/2+2\alpha-2\varepsilon\zeta}, \end{aligned}$$

(l'exposant $(1 - 2\varepsilon)$ est lié à la longueur des intervalles $[p + \frac{\ell}{n^\varepsilon}, p + \frac{\ell+1}{n^\varepsilon}$). Pour que cette quantité soit négligeable par rapport à $n^{3/2}$ on prend α tel que $\alpha - \varepsilon\zeta < 0$. On obtient alors $\|A_n + B_n\|_2 \leq \|A_n\|_2 + \|B_n\|_2 = o(n^{3/4})$.

1.2. Démonstration de la deuxième proposition. — Considérons deux suites indépendantes Y_n et X_n de variables aléatoires indépendantes à valeurs entières centrées de carrés intégrables (dont nous fixerons la variance plus tard) et indépendantes du système étudié. L'espace de probabilité qu'on utilise maintenant est un espace plus gros ($\mathbb{T}^2 \times G/\Gamma \times \Omega$). Nous adoptons les notations suivantes :

$$\tilde{N}(n, p) = \#\{k \in \{0, \dots, n\} / \sum_{\ell=0}^k Y_\ell = p\},$$

$$B_{k,n} = \exp\left(\frac{it}{n^{3/4}} N(n, k) \Phi(g_k)\right),$$

$$C_{k,n} = \exp\left(\frac{it}{n^{3/4}} \tilde{N}(n, k) X_k\right).$$

Montrons qu'on peut trouver les suites X_n et Y_n pour que $\frac{1}{n^{3/4}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} N(n, k) \Phi(g_k)$ et $\frac{1}{n^{3/4}} \sum \tilde{N}(n, k) X_k$ aient la même limite en loi. Il suffit de montrer que la différence des fonctions caractéristiques tend vers 0 car le théorème de Kesten et Spitzer assure que la fonction caractéristique de la deuxième variable aléatoire converge.

Considérons les sommes sur les entiers positifs la différence des sommes sur les entiers négatifs se traite de la même façon,

$$\exp\frac{it}{n^{3/4}} \sum_{\ell=0}^{\infty} N(n, \ell) \Phi(g_\ell) - \exp\frac{it}{n^{3/4}} \sum_0^{\infty} \tilde{N}(n, \ell) X_\ell = \prod_0^{\infty} B_{\ell,n} - \prod_0^{\infty} C_{\ell,n}.$$

Pour $\alpha > 0$, notons $A_{n,\alpha}$ l'ensemble :

$$A_{n,\alpha} = \{\exists k \in \{0, \dots, n\} / |S_k f| \geq n^{1/2+\alpha}\} \cup \{\exists k \in \{0, \dots, n\} / \sum_{\ell=0}^k |Y_\ell| \geq n^{1/2+\alpha}\}.$$

Le lemme 0.2.3 (des déviations modérées) montre que l'ensemble $A_{n,\alpha}$ (qui a une structure particulière, il ne dépend que de deux coordonnées) est de mesure très petite (\leq

$Cne^{-cn^{l-2\beta}}$). Dans le complémentaire de $A_{n,\alpha}$, $N(n,\ell)$ et $\tilde{N}(n,\ell)$ sont nuls pour $|\ell| \geq n^{1/2+\alpha}$, on peut donc écrire :

$$\begin{aligned} |\mathbb{E}(\prod_0^\infty B_{\ell,n} - \prod_0^\infty C_{\ell,n})| &\leq \int_{A_{n,\alpha}} |\prod B_{\ell,n} - \prod C_{\ell,n}| + \left| \int_{cA_{n,\alpha}} \prod B_{\ell,n} - \prod C_{\ell,n} \right| \\ &\leq 2ne^{-cn^{l-2\beta}} + \left| \int_{cA_{n,\alpha}} \prod_0^{n^{1/2+\alpha}} B_{\ell,n} - \prod_0^{n^{1/2+\alpha}} C_{\ell,n} \right| \\ &\leq 4ne^{-cn^{l-2\beta}} + \left| \int_{T \times g/\Gamma \times \Omega} \left(\prod_0^{n^{1/2+\alpha}} B_{\ell,n} - \prod_0^{n^{1/2+\alpha}} C_{\ell,n} \right) \right|. \end{aligned}$$

Écrivons maintenant

$$\prod_0^{n^{1/2+\alpha}} B_{\ell,n} - \prod_0^{n^{1/2+\alpha}} C_{\ell,n} = \sum_{\ell=0}^{n^{1/2+\alpha}} \left(\prod_{k=0}^{\ell-1} C_{k,n} \right) \underbrace{(B_{\ell,n} - C_{\ell,n}) \prod_{k=\ell+1}^{n^{1/2+\alpha}} B_{k,n}}_{\Delta_\ell}.$$

Les variables $(B_{\ell,n} - C_{\ell,n}) \prod_{k=\ell+1}^{n^{1/2+\alpha-1}} B_{\ell,n}$ et $\prod_{k=0}^{\ell-1} C_{k,n}$ sont indépendantes.

Considérons une suite $\chi(m)$ que nous fixerons plus tard. Lorsque $\ell + 4\chi(n) + 1 \leq n^{1/2+\alpha}$ scindons le produit Δ_ℓ en 5 :

$$\begin{aligned} \Delta_\ell &= \underbrace{(B_{\ell,n} - C_{\ell,n}) \prod_{k=\ell+1}^{\ell+\chi(n)} B_{\ell,n}}_A \underbrace{\prod_{k=\ell+\chi(n)+1}^{\ell+2\chi(n)} B_{k,n}}_B \underbrace{\prod_{k=\ell+2\chi(n)+1}^{\ell+3\chi(n)} B_{k,n}}_C \\ &\quad \underbrace{\prod_{k=\ell+3\chi(n)+1}^{\ell+4\chi(n)} B_{k,n}}_D \underbrace{\prod_{k=\ell+4\chi(n)+1}^{n^{1/2+\alpha}} B_{k,n}}_E. \end{aligned}$$

Nous nous intéressons à

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(\Delta_\ell) &= \mathbb{E}(ABCDE) \\ &= \mathbb{E}(A(B-1)(C-1)(D-1)E) + \mathbb{E}(ACDE) + \mathbb{E}(ABDE) \\ &\quad + \mathbb{E}(ABCE) - \mathbb{E}(ADE) - \mathbb{E}(ACE) - \mathbb{E}(ABE) + \mathbb{E}(AE). \end{aligned}$$

Chacun des trois termes $(B-1)$, $(C-1)$, $(D-1)$ est majoré par

$$\frac{2t}{n^{3/4}} \left(\sum_{k=\ell+\chi(n)+1}^{4\chi(n)} N(nk) \|\Phi\|_\infty \right),$$

donc $\mathbb{E}(A(B-1)(C-1)(D-1)E)$ est majoré par

$$\mathbb{E}(8\|\Phi\|_\infty^3 \frac{t^3}{n^{9/4}} \left(\sum_{k=\ell+\chi(n)+1}^{4\chi(n)} N(n, k) \right)^3).$$

Le lemme 0.2.5 montre que cette quantité est plus petite que $\frac{n^{3/2}}{n^{9/4}} \chi(n)^3 t^3$ multiplié par une constante.

Les sept autres termes se majorent tous de la même façon.

Considérons par exemple : $\mathbb{E}(ABDE) = Cov(AB, DE) + \mathbb{E}(AB)\mathbb{E}(DE)$. Le lemme 0.2.3 donne $Cov(AB, DE) \leq C \delta^{-\chi(n)}$. Étudions maintenant l'espérance de

$$\begin{aligned} AB &= (B_{\ell, n} - C_{\ell, n}) \prod_{k=\ell+1}^{\ell+2\chi(n)} B_{k, n} \\ &= \left(\exp \frac{itN(n, \ell)\Phi(g_\ell)}{n^{3/4}} - \exp \frac{it\tilde{N}(n, \ell)X_\ell}{n^{3/4}} \right) \exp \left(itn^{-3/4} \sum_{k=\ell+1}^{\ell+2\chi(n)} N(n, k)\Phi(g_k) \right). \end{aligned}$$

En développant respectivement à l'ordre 2 et 1 les deux termes du produit on obtient

$$\begin{aligned} AB &= \frac{it}{n^{3/4}} (N(n, \ell)\Phi(g_\ell) - \tilde{N}(n, \ell)X_\ell) - \frac{t^2}{2n^{3/2}} (N(n, \ell)^2\Phi^2(g_\ell) - \tilde{N}(n, \ell)^2X_\ell^2) \\ &\quad - \frac{t^2}{n^{3/2}} \sum_{k=\ell+1}^{\ell+2\chi(n)} N(n, k)N(n, \ell)\Phi(g_k)\Phi(g_\ell) \\ &\quad + \frac{t^2}{n^{3/2}} \tilde{N}(n, \ell)X_\ell \sum_{k=\ell+1}^{\ell+2\chi(n)} N(n, k)\Phi(g_k) \\ &\quad + D, \end{aligned}$$

où D désigne une quantité bornée en valeur absolue par

$$\begin{aligned} C \left[\frac{t^2}{n^{3/2}} \left(\sum_{k=\ell+1}^{\ell+2\chi(n)} N(n, k) \right)^2 + \frac{t^3}{n^{9/4}} (N(n, \ell)^3 + \tilde{N}(n, \ell)^3) \right. \\ \left. + \frac{t^4}{n^3} \left(\sum_{k=\ell+1}^{\ell+2\chi(n)} N(n, k) \right) (N(n, \ell)^3 + \tilde{N}(n, \ell)^3) \right]. \end{aligned}$$

En prenant l'espérance on a donc :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(AB) = & \frac{t^2}{2n^{3/2}} \left(\mathbb{E}(\tilde{N}(n, \ell)^2) \mathbb{E}(X_\ell^2) \right. \\ & \left. - \mathbb{E}(N(n, \ell)^2 \Phi(g_\ell)^2) - 2 \sum_{k=\ell+1}^{\ell+2\chi(n)} \mathbb{E}(N(n, k)N(n, \ell) \Phi(g_k) \Phi(g_\ell)) \right) \\ & + \mathbb{E}(D). \end{aligned}$$

Grâce au lemme 0.2.5 on a

$$|\mathbb{E}(N(n, \ell)N(n, k)) - \mathbb{E}(N(n, \ell)^2)| \leq Cn^{1-\xi}$$

et

$$|\mathbb{E}(D)| \leq C\chi(n)^2 n^{-1/2-\xi},$$

donc

$$\begin{aligned} |\mathbb{E}(AB)| \leq & \frac{t^2}{2n^{3/2}} \mathbb{E}(\tilde{N}(n, \ell)^2) \mathbb{E}(X_\ell^2) \\ & - \frac{t^2}{2n^{3/2}} (\mathbb{E}(N(n, \ell)^2) [\mathbb{E}(\Phi(g_\ell)^2) + 2 \sum_{k=\ell+1}^{\ell+2\chi(n)} \mathbb{E}(\Phi(g_k) \Phi(g_\ell))]) \\ & + \frac{t^2}{2n^{3/2}} 2C\chi(n)n^{1-\xi} + C\chi(n)^2 n^{-1/2-\xi}. \end{aligned}$$

Choisissons la suite X_n de telle façon que tel $\mathbb{E}(X_0^2) = \mathbb{E}(\Phi(g_0)^2) + 2 \sum_1^\infty \mathbb{E}(\Phi(g_k) \Phi(g_0))$.

On a alors

$$|\mathbb{E}(AB)| \leq \frac{t^2}{n^{3/2}} \mathbb{E}(X_0^2) [\mathbb{E}(\tilde{N}(n, \ell)^2) - \mathbb{E}(N(n, \ell)^2)] + C\chi(n)n^{-1/2-\xi}.$$

Prenons Y_n tel que $\mathbb{E}(Y_n^2) = \sigma^2(f)$, variance asymptotique pour f . Il vient finalement

$$|\mathbb{E}(AB)| \leq C\chi(n)n^{-1/2-\xi}.$$

Comme, par ailleurs,

$$|\mathbb{E}(DE)| \leq 1,$$

nous avons obtenu, $\mathbb{E}(\Delta_\ell) \leq C(\chi(n)n^{-1/2-\xi} + \delta^{-\chi(n)} + \frac{n^{3/2}}{n^{9/4}}\chi(n)^3)$. Revenons à la somme :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left(\prod_0^{n^{1/2+\alpha}} B_{\ell,n} - \prod_0^{n^{1/2+\alpha}} C_{\ell,n}\right) &= \sum_{\ell=0}^{n^{1/2+\alpha}} \mathbb{E}\left(\prod_{k=0}^{\ell-1} C_{k,n}\right)\mathbb{E}(\Delta_\ell) \\ &\leq \sum_{\ell=0}^{n^{1/2+\alpha}-4\chi(n)-1} C(\chi(n)n^{-1/2-\xi} + \delta^{-\chi(n)} + \frac{n^{3/2}}{n^{9/4}}\chi(n)^3) \\ &\quad + \sum_{\ell=n^{1/2+\alpha}-4\chi(n)}^{n^{1/2+\alpha}} \mathbb{E}\left(\prod_{k=0}^{\ell-1} C_{k,n}\right)\mathbb{E}(\Delta_\ell). \end{aligned}$$

L'inégalité des accroissements finis donne aussi

$$\mathbb{E}(\Delta_\ell) \leq C \frac{\mathbb{E}(|N(n, k) - \tilde{N}(n, k)|)}{n^{3/4}} \leq Cn^{-1/4}.$$

Au total nous aboutissons à

$$\begin{aligned} &\left| \mathbb{E}\left(\exp\frac{it}{n^{3/4}} \sum_{\ell=0}^{\infty} N(n, \ell)\Phi(g\ell)\right) - \mathbb{E}\left(\exp\frac{it}{n^{3/4}} \sum_{\ell=0}^{\infty} \tilde{N}(n, \ell)X_\ell\right) \right| \\ &\leq C(ne^{-n^{1-\beta}} + n^{1/2+\alpha}\delta^{-\chi(n)} + n^{1/2+\alpha}\frac{n^{3/2}}{n^{9/4}}\chi(n)^3 + n^{1/2+\alpha}n^{-1/2-\xi} + \chi(n)n^{-1/4}). \end{aligned}$$

Si $\alpha < \frac{1}{4}$ et $\alpha < \xi$ on obtient le résultat souhaité en prenant pour $\chi(n)$ le logarithme d'une puissance suffisamment grande de n .

2. Démonstration du lemme 0.2.5

Le lemme 0.2.5 porte uniquement sur les sommes $S_n f = \sum_{k=0}^{n-1} f \circ A^k$. Tout le paragraphe qui suit est donc un travail sur les propriétés de l'automorphisme du tore \mathbb{T}^2 défini par la matrice A . Nous reprenons des techniques analogues à celles qu'ont utilisées Guivarc'h et Hardy dans [5].

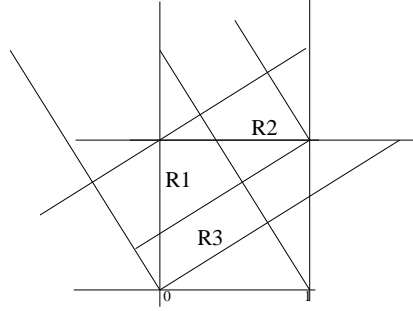
Nous cherchons à estimer les probabilités $\mathbb{P}(S_k f \in [p, p+1])$. Dans la situation considérée ici, il est possible d'établir le théorème limite local qui décrit le comportement asymptotique de $\mathbb{P}(S_k f \in [p, p+1])$. Le théorème de Guivarc'h Hardy déjà évoqué plus haut montre en particulier que lorsque f est apériodique $\mathbb{P}(S_k f \in [p, p+1])$ est équivalent à $\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi k}}$ lorsque k tend vers l'infini. Pour démontrer le lemme 0.2.5 il faut raffiner un peu ce résultat pour obtenir une inégalité de la forme :

$$\left| \sigma\sqrt{2\pi k}\mathbb{P}(S_k f \in [p, p+1]) - 1 \right| \leq \frac{C}{k^\varepsilon}$$

(pour un certain nombre réel $\varepsilon > 0$).

Pour cela nous utiliserons la méthode de perturbations d'opérateurs développée par Nagaev. Il faut d'abord nous ramener à une transformation non inversible.

2.1. Approximation par une transformation de l'intervalle. — Le pavage du tore \mathbb{T}^2 dessiné ci-dessous est une partition markovienne pour le système (\mathbb{T}^2, A) .



Nous pouvons approcher l'automorphisme du tore par une transformation de l'intervalle en procédant de la façon suivante. Les bords inférieurs des éléments de la partition markovienne définissent un intervalle (il suffit de mettre le bord de R_3 au bout de ceux de R_1 et R_2). Notons Π la projection orthogonale (parallèlement à la direction contractée) qui à un point de R_i associe un point de son bord inférieur. Cette application Π est une application du tore à valeur dans un intervalle. Soit k un entier naturel, x un élément de \mathbb{T}^2 et f une fonction höldérienne définie sur \mathbb{T}^2 . Comme $A^{-k}x$ et $\Pi A^{-k}x$ appartiennent à la même droite contractée par A la série

$$\sum_{n \geq k} f(A^{n-k}x) - f(A^n \Pi A^{-k}x)$$

converge. Notons ϕ_k sa limite et calculons la différence $\phi_k(x) - \phi_k(Ax)$:

$$\begin{aligned} \phi_k(x) - \phi_k(Ax) &= \sum_{n \geq k} [f(A^{n-k}x) - f(A^n \Pi A^{-k}x)] \\ &\quad - \sum_{n \geq k} [f(A^{n+1-k}x) - f(A^n \Pi A^{1-k}x)] \\ &= f(x) - f(A^k \Pi A^{-k}x) + \sum_{n \geq k} [f(A^n \Pi A^{1-k}x) - f(A^{n+1} \Pi A^{-k}x)] \end{aligned}$$

Nous avons alors écrit f comme la somme d'un cobord $\phi_k - \phi_k \circ A$, dont la norme uniforme converge exponentiellement vite vers 0 lorsque k tend vers l'infini et d'une fonction de $\Pi A^{-k}x$. En effet $\Pi A^{1-k}x$ et $A \Pi A^{-k}x$ diffèrent d'une translation d'un vecteur contracté ne dépendant que de $\Pi A^{-k}x$ et est constant par morceaux. Cela explique pourquoi la série $\sum_{n \geq k} f(A^n \Pi [A^{1-k}x]) - f(A^{n+1} \Pi A^{-k}x)$ est convergente. Définissons les fonctions g_k sur la réunion des bords inférieurs des R_i

$$g_k(y) = f(A^k y) + \sum_{n \geq k} f(A^n \Pi A y) - f(A^{n+1} y).$$

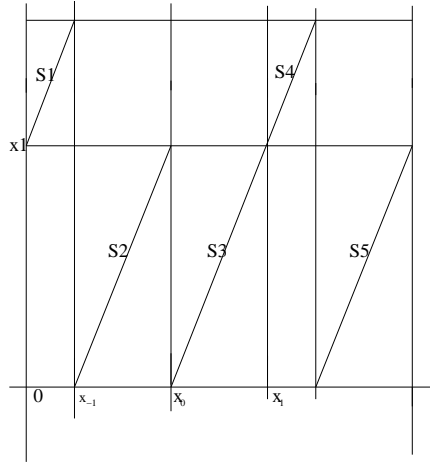
La somme de la série apparaissant dans cette somme est exponentiellement petite en k lorsque k est grand. En tant que fonction de l'intervalle cette fonction est höldérienne par morceaux. Nous avons donc exprimé f en fonction de g_k et ϕ_k :

$$f(x) = g_k(\Pi A^{-k}x) + \phi_k(x) - \phi_k(Ax).$$

Quand on fait agir A sur f on obtient

$$\begin{aligned} f(Ax) &= f(A^k \Pi A^{-k} Ax) - \sum_{n \geq k} f(A^n \Pi A^{2-k}x) - f(A^{n+1} \Pi A^{1-k}x) \\ &\quad + \phi_k(Ax) - \phi_k(A^2x) \\ &= g_k(S \Pi A^{-k}x) + \phi_k(Ax) - \phi_k(A^2x), \end{aligned}$$

où S est la transformation de l'intervalle définie par le graphe suivant



Cette transformation admet une unique mesure invariante absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue. C'est la mesure image de la mesure de Lebesgue sur le tore par la projection. Sa densité vaut : $C[(\lambda - 1)1_{x \leq x_1} + 1_{x > x_1}]$ où C est une constante de normalisation.

La fonction g_k est égale à $f(A^k y)$ sur $[x_0, x_1]$: car lorsque y appartient cet intervalle $\Pi T y = T y$.

Cette écriture nous permet d'exprimer les sommes ergodiques pour l'action de A sur f en fonction de sommes ergodiques de g_k pour l'action de S :

$$f(x) + \dots + f(A^{n-1}x) = \phi_k(x) - \phi_k(A^n x) + g_k(\Pi A^{-k}x) + \dots + g_k(S^{n-1} \Pi A^{-k}x).$$

La norme de la fonction ϕ_k est exponentiellement petite en k , donc les probabilités d'appartenir à un intervalle pour les deux sommes ergodiques sont proches l'une de l'autre. Nous précisons ce point plus loin. Nous nous sommes ramenés à l'étude du problème de la vitesse dans le théorème local pour l'application S agissant sur les fonctions höldériennes par morceaux.

Nous allons utiliser la méthode de Nagaev. L'opérateur de Perron-Frobenius associé à la transformation S est l'opérateur P défini par $P\varphi(x)$ égal :

$$\frac{1}{2} (\varphi(S_1^{-1}x) + \varphi(S_4^{-1}x)) \mathbf{1}_{x \geq x_1} + \frac{1}{3} (\varphi(S_2^{-1}x) + \varphi(S_3^{-1}x) + \varphi(S_5^{-1}x)) \mathbf{1}_{x < x_1}.$$

Cet opérateur est l'adjoint de l'opérateur de composition par S .

2.2. La méthode des perturbations d'opérateur pour S . — On relie très simplement l'espérance de la variable $N(n, p)$ aux quantités $\mathbb{P}(S_k f \in [p, p + 1[)$:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(N(n, p)) &= \mathbb{E} \left(\sum_{k=0}^{n-1} \mathbf{1}_{[p, p+1[}(S_k f) \right) \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{P}(S_k f \in [p, p + 1[) \end{aligned}$$

L'entier n étant fixé nous prendrons pour g la fonction $g_{[c \ln n]}$ (nous déterminerons plus loin la valeur du réel c). Il existe b et c_1 tels que la norme infinie de $\phi_{[c \ln n]}$ soit plus petite que $\frac{b}{n^{c_1}}$

À un intervalle I associons les intervalles $I_{n,+}$ et $I_{n,-}$ obtenus à partir de I en allongeant (respectivement en écourtant) I à chaque extrémité d'une longueur $\frac{2b}{n^{c_1}}$.

De l'égalité $S_n f = S_n g_k + \phi_k - \phi_k \circ S$ on déduit l'encadrement :

$$\mathbb{P}(S_n g \in I_{n,-}) \leq \mathbb{P}(S_n f \in I) \leq \mathbb{P}(S_n g \in I_{n,+}).$$

L'opérateur adjoint dans $L^2(\mu)$ de l'opérateur de composition par S est l'opérateur P donné par :

$$1/2(\varphi(S_1^{-1}y) + \varphi(S_4^{-1}y))\mathbf{1}_{y \geq x_1} + 1/3(\varphi(S_2^{-1}y) + \varphi(S_3^{-1}y) + \varphi(S_5^{-1}y))\mathbf{1}_{y < x_1}.$$

La méthode de Nagaev consiste à utiliser la transformée de Fourier pour lier les quantités qui nous intéressent aux itérés des opérateurs P_t

$$P_t \varphi = P(\exp(itg)\varphi).$$

La notion de fonction apériodique importante dans la preuve du théorème local assure que pour $t \neq 0$ les itérés de P_t convergent exponentiellement vite vers 0 (uniformément sur les compacts de \mathbb{R}). Nous aurons besoin d'une propriété plus globale.

Introduisons l'espace V des fonctions continues sur les intervalles de continuité de S höldériennes de degré α sur chacun de ces intervalles. Pour un élément φ de V notons $[\varphi]$ le nombre

$$[\varphi] = \max \left\{ \sup_{x,y \in I} \frac{|\varphi(x) - \varphi(y)|}{|x - y|^\alpha} / I \text{ intervalle de continuité de } S \right\}.$$

On définit une norme sur V en posant $\|\varphi\| = \|\varphi\|_\infty + [\varphi]$. La norme $[g]$ est inférieure à $C\lambda^{\alpha c \ln n}$.

Les points \tilde{x}_0 et \tilde{x}_{-1} indiqués sur la figure plus haut sont des points homoclines.

LEMME 2.2.1. — Si $2 \sum_{-\infty}^{\infty} (f(0) - f(A^l \tilde{x}_0)) \neq \sum_{-\infty}^{\infty} (f(0) - f(A^l \tilde{x}_{-1}))$ alors, quelque soit $A > 0$, $B > 0$, $q > 0$, il existe $\kappa > 0$ tel que, pour n assez grand, pour tout $t \in [-n^\kappa, n^\kappa] \setminus [-q, q]$, pour toute fonction φ dans l'espace V , telle que

$$\frac{1}{n^B} \leq \|\varphi\|_\infty \leq 1 \quad [\varphi] \leq n^{A+B}$$

on ait

$$\|P_t^n \varphi\|_\infty \leq \frac{1}{n^A} \|\varphi\|_\infty$$

La démonstration de ce lemme occupe tout le reste de cette sous-section. Prenons deux points x et y supérieurs à x_1 . Les inégalités suivantes sont des conséquences des propriétés de dilatations de l'application S .

$$\begin{aligned} |P_t \varphi(x) - P_t \varphi(y)| &= |1/2(e^{itg(S_1^{-1}x)} \varphi(S_1^{-1}x) + e^{itg(S_4^{-1}x)} \varphi(S_4^{-1}x)) \\ &\quad - 1/2(e^{itg(S_1^{-1}y)} \varphi(S_1^{-1}y) + e^{itg(S_4^{-1}y)} \varphi(S_4^{-1}y))| \\ &\leq 1/2|\varphi(S_1^{-1}x) - \varphi(S_1^{-1}y)| + 1/2|\varphi(S_4^{-1}x) - \varphi(S_4^{-1}y)| \\ &\quad \|\varphi\|_\infty 1/2|e^{itg(S_1^{-1}x)} - e^{itg(S_1^{-1}y)}| \\ &\quad + \|\varphi\|_\infty 1/2|e^{itg(S_4^{-1}x)} - e^{itg(S_4^{-1}y)}| \\ &\leq [\varphi] \lambda^{-\alpha} d(x, y)^\alpha + Ct[g] \|\varphi\|_\infty d(x, y)^\alpha. \end{aligned}$$

Pour x et y inférieurs à x_1 , on obtient la même majoration, ce qui donne l'inégalité de Döblin-Fortet :

$$[P_t \varphi] \leq \lambda^{-\alpha} Ct[g] \|\varphi\|_\infty + \lambda^{-\alpha} [\varphi].$$

Par récurrence on montre que, pour tout $k \geq 0$, on a

$$[P_t^k \varphi] \leq Ct \frac{\lambda^{-\alpha}}{1 - \lambda^{-\alpha}} [g] \|\varphi\|_\infty + \lambda^{-\alpha k} [\varphi]$$

et, pour tout $k > L$,

$$[P_t^k \varphi] \leq C^t t [g] \|P_t^{k-L} \varphi\|_\infty + \lambda^{-\alpha L} [P_t^{k-L} \varphi] \quad (*).$$

Donnons-nous un réel $\gamma \in]0, 1[$ et un entier M . Supposons qu'on ait la minoration :

$$\|P_t^{k+M} \varphi\|_\infty \geq \gamma \|P_t^k \varphi\|_\infty$$

Pour un certain point x , on a $\|P_t^{k+M} \varphi\|_\infty = |P_t^{k+M} \varphi(x)|$. Supposons que ce nombre soit inférieur à x_1 . On a alors

$$|P_t^{k+M} \varphi(x)| = \frac{1}{3} (P_t^{k+M-1} \varphi(S_2^{-1}x) + P_t^{k+M-1} \varphi(S_3^{-1}x) + P_t^{k+M-1} \varphi(S_5^{-1}x)) \geq \gamma \|P_t^k \varphi\|_\infty$$

donc, comme $\|P_t^{k+M-1}\varphi\|_\infty \leq \|P_t^k\varphi\|_\infty$,

$$\begin{aligned} \|P_t^k\varphi\|_\infty &\geq \frac{1}{3} (P_t^{k+M-1}\varphi(S_2^{-1}x) + P_t^{k+M-1}\varphi(S_3^{-1}x) + P_t^{k+M-1}\varphi(S_5^{-1}x)) \\ &\geq \gamma \|P_t^k\varphi\|_\infty, \end{aligned}$$

la minoration suivante

$$|P_t^{k+M-1}\varphi(S_i^{-1}x)| \geq (3\gamma - 2)\|P_t^k\varphi\|_\infty,$$

est valable pour $i = 2, 3, 5$. Si x est supérieur à x_1 , on obtient des minoration du même type :

$$|P_t^{k+M-1}\varphi(S_i^{-1}x)| \geq (2\gamma - 1)\|P_t^k\varphi\|_\infty,$$

valable pour $i = 1, 4$. Finalement on peut affirmer que, pour tout y tel que $Sy = x$, on a :

$$|P_t^{k+M-1}\varphi(y)| \geq (3\gamma - 2)\|P_t^k\varphi\|_\infty.$$

En itérant M fois cette suite d'opérations on obtient, pour tout y tel que $S^M y = x$,

$$|P_t^k\varphi(y)| \geq (3^M(\gamma - 1) + 1)\|P_t^k\varphi\|_\infty$$

L'ensemble des y tel que $S^M y = x$ est λ^{-M} dense dans $[0, 1]$ par conséquent, grâce à la majoration (*) on peut écrire, pour tout y ,

$$|P_t^k\varphi(y)| \geq [3^M(\gamma - 1) + 1]\|P_t^k\varphi\|_\infty - Ct[g]\|P_t^{k-L}\varphi\|_\infty\lambda^{-\alpha M} - \lambda^{-\alpha(L+M)}[P_t^{k-L}\varphi] \quad (**).$$

Nous allons maintenant choisir les paramètres M, L, γ de manière adéquate.

Fixons une fonction φ tel que $\frac{1}{n^B} \leq \|\varphi\|_\infty \leq 1$, $[\varphi] \leq n^{A+B}$ et supposons que, pour tout $k \in \{0, \dots, n\}$, on ait

$$\|P_t^k\varphi\|_\infty \geq \frac{1}{n^A}.$$

Alors, pour tout $\sigma \in]0, 1[$, l'inégalité

$$\|P_t^{k+1}\varphi\|_\infty \leq \left(\frac{1}{n^A}\right)^{1/n^\sigma} \|P_t^k\varphi\|_\infty$$

est satisfaite moins de n^σ fois. Il existe donc un intervalle de longueur $n^{1-\sigma}$ telle que, pour tout k dans cet intervalle, on ait

$$\|P_t^{k+1}\varphi\|_\infty \geq \left(\frac{1}{n^A}\right)^{1/n^\sigma} \|P_t^k\varphi\|_\infty.$$

Fixons un entier ℓ tel que, pour tout $k \in [l - \frac{n^{1-\sigma}}{2}, l + \frac{n^{1-\sigma}}{2}]$, on ait

$$\|P_t^{k+1}\varphi\|_\infty \geq \left(\frac{1}{n^A}\right)^{1/n^\sigma} \|P_t^k\varphi\|_\infty.$$

Pour γ nous prenons la quantité $(\frac{1}{n^A})^{M/n^\sigma}$. Si M est choisi de façon convenable ce nombre γ est proches de 1 lorsque n est grand ($1 - \gamma$ est de l'ordre de $\frac{A \ell n nM}{n^\sigma}$).

Il est possible de choisir des nombres $\alpha, \varepsilon, \kappa, N$ et des suites de nombres M, L dépendant de σ, A et B tels que, pour tout $n \geq N$, on ait : pour tout $y \in [0, 1]$, pour tout $t \in [0, n^\kappa]$, pour tout $k \in \left[\ell - \frac{n^{1-\sigma}}{4}, \ell + \frac{n^{1-\sigma}}{4} \right]$

$$|P_t^k \varphi(y)| \geq \left(1 - \frac{1}{n^\varepsilon}\right) \|P_t^k \varphi\|_\infty.$$

D'après l'inégalité (**), il suffit de montrer qu'on peut trouver des paramètres tels que $3^M |\gamma - 1| \leq \frac{1}{3n^\varepsilon}$, $c' n^\kappa [\xi] \|P_t^{k-L} \varphi\| \lambda^{-M/2} \leq \frac{1}{3n^\varepsilon} \|P_t^k \varphi\|_\infty$ et $\lambda^{-(L+M)/2} [P_t^{k-L} \varphi] \leq \frac{1}{3n^\varepsilon} \|P_t^k \varphi\|_\infty$.

Pour la première inégalité, $3^M |\gamma - 1| \leq \frac{1}{3n^\varepsilon}$, il suffit d'avoir :

$$M \ln 3 + \ln \left(\frac{A \ell n n M}{n^\sigma} \right) \leq \ln \frac{1}{3n^\varepsilon}.$$

Cette condition est satisfaite lorsque $M = \left\lceil \ln n n^{\frac{\sigma-2\varepsilon}{\ln 3}} \right\rceil$ pour n supérieur à une constante dépendant de A, σ et ε .

Si $L \leq n^{\sigma/2}$ l'hypothèse faite sur la décroissance lente de la suite $\|P_t^k \varphi\|_\infty$ sur l'intervalle $\left[\ell - \frac{n^{1-\sigma}}{n}, \ell + \frac{n^{1-\sigma}}{n} \right]$ assure que $\|P_t^{k-L} \varphi\|_\infty \leq 2 \|P_t^k \varphi\|_\infty$. Comme $[g]$ est majorée par $C \lambda^{c \ln n}$ il suffit de choisir κ dans $\left] 0, \alpha \ln \lambda \left(\frac{\sigma-2\varepsilon}{\ln 3} - c \right) - \varepsilon \right[$ pour que la deuxième inégalité $c' n^\kappa [\xi] \|P_t^{k-L} \varphi\| \lambda^{-M/2} \leq \frac{1}{3n^\varepsilon} \|P_t^k \varphi\|_\infty$ soit vérifiée. Il faut donc prendre c de telle manière que $\frac{\sigma-2\varepsilon}{\ln 3} - c$ soit strictement positif.
Enfin

$$[P_t^{k-L} \varphi] \leq C' t [g] \|\varphi\|_\infty + \lambda^{-\alpha(k-L)} [\varphi] \leq C' n^{\kappa+c \ln n} + \lambda^{-\alpha(k-L)} [\varphi].$$

Comme par hypothèse $\|P_t^k \varphi\|_\infty \geq \frac{1}{n^A} \|\varphi\|_\infty \geq \frac{1}{n^{A+B}}$ la troisième inégalité $\lambda^{-\alpha(L+M)} [P_t^{k-L} \varphi] \leq \frac{1}{3n^\varepsilon} \|P_t^k \varphi\|_\infty$ est satisfaite dès que

$$\lambda^{-\alpha(L+M)} (C' n^{\kappa+c \ln n} + n^{A+B}) \leq \frac{1}{n^{A+B+\varepsilon}}$$

ce qui est le cas lorsque L est une puissance positive quelconque de n .

Supposons que nous ayons choisi les paramètres de telle sorte que la propriété (***) soit satisfaite. Alors, pour tout $k \in \left[\ell - \frac{n^{1-\sigma}}{\sigma}, \ell + \frac{n^{1-\sigma}}{\sigma} \right]$ pour tout y , pour tout $t \in [0, n^\kappa]$, on a $|P_t^k \varphi(y)| \geq \frac{1}{n^{A+B}}$.

Sur chacun des intervalles de continuité de S on peut écrire :

$$\text{Log} P_t^k \varphi(x) = \text{Log} |P_t^k \varphi(x)| + i \theta_k(x),$$

où θ_k est continue sur chaque intervalle. On peut être plus précis. Si x et y appartiennent tous les deux un intervalle de continuité de S , on a :

$$\begin{aligned} |\theta_k(x) - \theta_k(y)| &\leq |Im \ Log \ P_t^k \varphi(x) - Im \ Log \ P_t^k \varphi(y)| \\ &\leq \max_{|z| \geq \frac{1}{n^{A+B}}} \left(\frac{1}{|z|} \right) |P_t^k \varphi(x) - P_t^k \varphi(y)| \\ &\leq n^{A+B} d^\alpha(x, y) [P_t^k \varphi] \\ &\leq n^{A+B+c} \ell n^{\lambda+\kappa+\varepsilon} d^\alpha(x, y). \end{aligned}$$

La semi norme $[\theta_k]$ est donc majorée par :

$$[\theta_k] \leq n^{A+B+C\ell n^{\lambda+\kappa+\varepsilon}}.$$

Posons $|P_t^k \varphi(x)| = \rho_k(x) \|P_t^k \varphi\|_\infty$ de sorte que

$$P_t^k \varphi(x) = \rho_k(x) \|P_t^k \varphi\|_\infty e^{i\theta_k(x)}.$$

La propriété (***) assure que $\rho_k(x) \in [1 - \frac{1}{n^\varepsilon}, 1]$ et que, par exemple si x est inférieur à x_1 ,

$$\begin{aligned} |P_t^{k+1} \varphi(x)| &= \left| 1/3 \sum_{j \in \{2,3,5\}} e^{itg(S_j^{-1}y)} e^{i\theta_k(S_j^{-1}y)} \rho_k(S_j^{-1}y) \|P_t^k \varphi\|_\infty \right| \\ &\geq \left(1 - \frac{1}{n^\varepsilon} \right) \|P_t^k \varphi\|_\infty. \end{aligned}$$

On en déduit que, à $\frac{1}{n^\varepsilon}$ près et modulo 2π , $tg(y) + \theta_k(y)$ prend une valeur constante sur l'ensemble des y tels que $Sy = x$. Il existe donc des fonctions θ'_k , $\|\nu_k\|_\infty \leq \frac{1}{n^\varepsilon}$ telles que $\theta_k(x) = -tg(x) + \theta'_k(Sx) + \nu_k(x)$. Nous avons alors

$$\begin{aligned} P_t^{k+1} \varphi(x) &= \rho_{k+1}(x) \|P_t^{k+1}\|_\infty e^{i\theta_{k+1}(x)} \\ &= \left| 1/3 \sum_{j \in \{2,3,5\}} e^{itg(S_j^{-1}x)} e^{i\theta_k(S_j^{-1}x)} \rho_k(S_j^{-1}x) \|P_t^k \varphi\|_\infty \right| \end{aligned}$$

d'où l'on tire : $\|e^{i\theta_{k+1} - \theta'_k} - 1\|_\infty \leq \frac{1}{n^\varepsilon}$. On peut par conséquent choisir les θ_k de telle façon que, modulo 2π , $\theta'_k = \theta_{k+1}$. Finalement nous avons défini une famille de fonctions θ_k dans V telles que, pour tout $k \in \left[\ell - \frac{n^{1-\sigma}}{4}, \ell + \frac{n^{1-\sigma}}{4} \right]$, pour tout $t \in [-n^\kappa, n^\kappa]$

on ait
$$\begin{cases} P_t^k \varphi(x) = \rho_k(x) e^{i\theta_k(x)} \|P_t^k \varphi\|_\infty \\ [\theta_k] \leq n^{A+B+D\ell n^\lambda} \\ \|\theta_k\|_\infty \leq E t \\ \theta_k(x) = -tg(x) + \theta_{k+1}(Sx) + \nu_k(x) \|\nu_k\|_\infty \leq \frac{1}{n^\varepsilon} \text{ modulo } 2\pi. \end{cases} \quad \text{En itérant } \mathcal{N} \text{ fois la}$$
 dernière relation à partir de ℓ , on obtient

$$\theta_\ell(x) = -t(g(x) + g(Sx) + \dots + g(S^\mathcal{N}x)) + \theta_{\ell+\mathcal{N}}(S^{\mathcal{N}+1}x) + \nu_{\mathcal{N}}(x) \quad \|\nu_{\mathcal{N}}\|_\infty \leq \frac{\mathcal{N}}{n^\varepsilon}.$$

Notons $I^{(k)}$ un intervalle quelconque de continuité de S^k . Considérons un intervalle $I^{(\mathcal{N}+1)}$ et deux points x et y dans cet intervalle. L'égalité précédente et l'estimation de la régularité des fonctions θ_k donnée plus haut permettent alors d'écrire

$$\begin{aligned} & |\theta_{\ell+\mathcal{N}}(S^{\mathcal{N}+1}x) - \theta_{\ell+\mathcal{N}}(S^{\mathcal{N}+1}y) - t \sum_0^{\mathcal{N}} (g(S^k x) - g(S^k y))| \\ & \leq \frac{\mathcal{N}}{n^\varepsilon} + n^{A+B+D\ell n\lambda} d(x, y)^\alpha. \end{aligned}$$

La distance $d(x, y)$ est de l'ordre de $\lambda^{-\mathcal{N}}$. Prenons l'intervalle $I^{(\mathcal{N}+1)}$ tel que l'image par $S^{(\mathcal{N}+1)}$ de $I^{(\mathcal{N}+1)}$ soit $[0, x_1]$. Le point x_1 est un point fixe de S . On a $S([x_0, x_1]) = S([x_{-1}, x_0]) = [0, x_1]$ et plus généralement $S^{k+1}([x_1 - \lambda^{-k}(x_1 - x_0), x_1]) = S^{k+1}([x_0 - \lambda^{-k}(x_1 - x_0), x_0]) = [0, x_1]$. Dans les lignes qui suivent nous noterons \approx l'égalité à $\frac{\mathcal{N}}{n^\varepsilon}$ près. Avec cette convention on a donc, pour y dans $[0, x_1 - x_0]$,

$$\theta_{\ell+\mathcal{N}}(x_1 - y) \approx \theta_{\ell+\mathcal{N}}(x_1) + t \sum_1^{\mathcal{N}+1} (g(x_1 - \lambda^{-l}y) - g(x_1))$$

Cette égalité permet de donner une valeur approchée à $\frac{\mathcal{N}}{n^\varepsilon}$ près des θ_k sur l'intervalle $[0, x_1]$:

$$\theta_k(x_1 - y) \approx \theta_k(x_1) + t \sum_1^\infty (g(x_1 - \lambda^{-l}y) - g(x_1)).$$

Pour y dans $[0, x_1 - x_0]$ $S(x_1 - y) = x_1 - \lambda y$. Si $x_1 - y$ appartient à $[x_{-1}, x_0]$ alors $S(x_1 - y) = x_1 - \lambda(y + x_0 - x_1)$. Sur $[x_{-1}, x_0]$ on a donc

$$\theta_{k+1}(S(x_1 - y)) \approx \theta_{k+1}(x_1) + t \sum_1^\infty (g(x_1 - \lambda^{1-l}(y + x_0 - x_1)) - g(x_1)).$$

Reprenons alors l'égalité fonctionnelle liant θ_k et θ_{k+1} , modulo 2π :

$$\theta_k(x) \approx -tg(x) + \theta_{k+1}(Sx).$$

Elle devient (toujours modulo 2π) :

$$\begin{aligned} & \theta_k(x_1) + t \sum_1^\infty (g(x_1 - \lambda^{-l}y) - g(x_1)) + tg(x_1 - y) \\ & \approx \theta_{k+1}(x_1) + t \sum_1^\infty (g(x_1 - \lambda^{1-l}(y + x_0 - x_1)) - g(x_1)). \end{aligned}$$

En prenant $y = x_1 - x_0$ et $y = 2(x_1 - x_0)$, comme les fonctions n'ont pas de discontinuité sur l'intervalle sur $[x_{-1}, x_0]$, on obtient (le modulo 2π disparaît)

$$2t \sum_0^\infty (g(x_1 - \lambda^{-l}(x_1 - x_0)) - g(x_1)) \approx t \sum_0^\infty (g(x_1 - 2\lambda^{-l}(x_1 - x_0)) - g(x_1)).$$

Revenons maintenant à la définition de la fonction g . Il s'agit de la fonction $f \circ A^{[c \ln n]}$ restreinte à un intervalle dans le tore. Notons \tilde{x} le point du tore correspondant au point x de l'intervalle sur lequel est défini S . Le point \tilde{x}_1 est le point 0. On a

$$\begin{aligned} t \sum_0^\infty (g(x_1 - \lambda^{-l}(x_1 - x_0)) - g(x_1)) &= t \sum_0^\infty (f(A^{c \ln n} A^{-l} \tilde{x}_0) - f(A^{c \ln n} 0)) \\ &= t \sum_0^\infty (f(A^{c \ln n} A^{-l} \tilde{x}_0) - f(0)) \\ &= t \sum_{1-c \ln n}^\infty (f(A^l \tilde{x}_0) - f(0)). \end{aligned}$$

Comme \tilde{x}_0 est homocline la somme $\sum_{-\infty}^\infty (f(A^l \tilde{x}_0) - f(0))$ converge et, comme f est höldérienne, est égale à $\frac{N}{n^\varepsilon}$ près à $\sum_{1-c \ln n}^\infty (f(A^l \tilde{x}_0) - f(0))$. On peut faire le même calcul pour x_{-1} . On obtient alors

$$2t \sum_{-\infty}^\infty (f(0) - f(A^l \tilde{x}_0)) \approx t \sum_{-\infty}^\infty (f(0) - f(A^l \tilde{x}_{-1})).$$

Le lemme est démontré.

Remarque : Il existe bien entendu des fonctions qui satisfont cette condition. Savoir si une fonction régulière donnée satisfait la condition est une question à laquelle on peut répondre grâce à des calculs numériques. Question : que dire d'une fonction dont les sommes le long de toutes les orbites homoclines ne dépendent pas des orbites ?

2.3. Théorème local avec vitesse pour les sommes ergodiques de g . — Grâce au lemme précédent 2.2.1, en utilisant la méthode de Nagaev, on peut établir un théorème limite local avec vitesse. Comme nous avons besoin de contrôler les moments de $N(n, p)$ jusqu'à l'ordre 3, il nous faut considérer des probabilités de la forme $\mathbb{P}(S_k \in I, S_\ell \in J, S_n \in K)$. Cela complique un peu l'écriture.

La première chose à faire est d'approcher les indicatrices d'intervalles par des fonctions à transformée de Fourier à support compact. Soit $\Xi(x) = c \frac{\sin^{2p}(x)}{x^{2p}}$ tel que $\int_{\mathbb{R}} \Xi(x) dx = 1$. La transformée de Fourier de φ est à support dans $[-2p, 2p]$. Posons $\Xi_n(x) = n^\kappa \Xi(n^\kappa x)$. Comme $\int_{1/n^\varepsilon}^{+\infty} \Xi_n(x) dx \leq \frac{C}{n^{(2p-1)(\kappa-\varepsilon)}}$ on a :

$$|\mathbf{1}_I(x) - \mathbf{1}_I * \Xi_n(x)| \leq \frac{C}{n^{(2p-1)(\kappa-\varepsilon)}} \text{ si } d(x, \delta I) \neq \frac{1}{n^\varepsilon}.$$

Si on note I_+ l'intervalle $I_+ + \left[-\frac{1}{n^\varepsilon}, \frac{1}{n^\varepsilon}\right]$ on a donc, pour tout x ,

$$\mathbf{1}_{I_+} * \Xi_n(x) \geq \mathbf{1}_I(x) \left(1 - \frac{1}{n^{(2p-1)(\kappa-\varepsilon)}}\right)$$

pour tout x . Si on note I_- l'intervalle I auquel on a enlevé des intervalles de longueur $\frac{1}{n^\varepsilon}$ aux extrémités on a :

$$\xi_n(x) = \Xi_n(x) * \mathbf{1}_{I_-}(x) \leq \mathbf{1}_I + \frac{C}{n^{(2p-1)(\kappa-\varepsilon)}}$$

On obtient donc :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(S_n \in I) \left(1 - \frac{C}{n^{(2p-1)(\kappa-\varepsilon)}}\right) &\leq \mathbb{E}(\mathbf{1}_{I_+} * \Xi_n(S_n)) \\ \mathbb{P}(S_n \in I) + \frac{C}{n^{(2p-1)(\kappa-\varepsilon)}} &\geq \mathbb{E}(\mathbf{1}_{I_-} * \Xi_n(S_n)) \end{aligned}$$

Si on parvient à montrer que $\mathbb{E}(\mathbf{1}_{I_\pm} * \Xi_n(S_n)) = \frac{\ell(I_\pm)}{\sqrt{2\pi\sigma\sqrt{n}}}(1 + o(\frac{1}{n^\varepsilon}))$ on obtient alors $\mathbb{P}(S_n \in I) = \frac{\ell(I)}{\sqrt{2\pi\sigma\sqrt{n}}}(1 + (\frac{1}{n}))$. Comme $(2p-1)(\kappa-\varepsilon)$ peut-être rendu aussi grand qu'on veut, on voit que pour obtenir une estimation de $\mathbb{P}(S_n \in I, S_k \in J, S_\ell \in K)$ il suffit de calculer $\mathbb{E}(\xi_n(S_n)\xi_k(S_k)\xi_\ell(S_\ell))$.

Considérons trois entiers $k < \ell < m$.

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(\xi_m(S_m)\xi_\ell(S_\ell)\xi_k(S_k)) &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{\mathbb{R}^3} \mathbb{E}(e^{itS_m} e^{isS_\ell} e^{iuS_k}) \widehat{\xi}_m(t) \widehat{\xi}_\ell(s) \widehat{\xi}_k(u) dt ds du \\ &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{\mathbb{R}^3} \mathbb{E}(P_t^{m-\ell} P_{s+\ell}^{\ell-k} P_{s+t+u}^k \mathbf{1}) \widehat{\xi}_m(t) \widehat{\xi}_\ell(s) \widehat{\xi}_k(n) dt ds du \\ &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{\mathbb{R}^3} \mathbb{E}(P_x^{m-\ell} P_y^{\ell-k} P_z^k \mathbf{1}) \widehat{\xi}_m(x) \widehat{\xi}_\ell(y-x) \widehat{\xi}_k(z-y) dx dy dz. \end{aligned}$$

Le changement de variables $z = s + t + u$, $y = s + t$, $x = t$ donne la dernière égalité. On coupe cette intégrale (à support compact) en deux :

$$\mathbb{E}(-) = \int_{[-\zeta, \zeta]^3} - + \int_{([- \zeta, \zeta]^3)^c} -.$$

Le lemme 2.2.1 montre que la deuxième intégrale est inférieure à

$$m^{3\kappa} \inf\left(\frac{1}{k^A}, \frac{1}{(\ell-k)^A}, \frac{1}{(m-\ell)^A}\right) \leq \frac{3^A m^{3\kappa}}{m^A}.$$

Sur $[-\zeta, \zeta]^3$ posons $x = \sqrt{m-\ell}x$, $y = \sqrt{\ell-k}y$, $z = \sqrt{k}z$. On obtient

$$\begin{aligned} &\int_{-\sqrt{m-\ell}\zeta}^{\sqrt{m-\ell}\zeta} \int_{-\sqrt{\ell-k}\zeta}^{\sqrt{\ell-k}\zeta} \int_{-\sqrt{k}\zeta}^{\sqrt{k}\zeta} \mathbb{E}\left(P_{\frac{x}{\sqrt{m-\ell}}}^{m-\ell} P_{\frac{y}{\sqrt{\ell-k}}}^{\ell-k} P_{\frac{z}{\sqrt{k}}}^k \mathbf{1}\right) \\ &\quad \widehat{\xi}_m\left(\frac{x}{\sqrt{m-\ell}}\right) \widehat{\xi}_\ell\left(\frac{y}{\sqrt{\ell-k}} - \frac{x}{\sqrt{m-\ell}}\right) \widehat{\xi}_k\left(\frac{z}{\sqrt{k}} - \frac{y}{\sqrt{\ell-k}}\right) \frac{dx dy dz}{\sqrt{k(\ell-k)(m-k)}}. \end{aligned}$$

Grâce à l'expression ([6]) de l'opérateur P_t (pour t petit) $P_t = \lambda_t \Pi_t + N_t$

$$\text{où } \begin{cases} \Pi_t \text{ est un projecteur de rang 1} \\ \lambda_t = 1 - \frac{\sigma^2 t^2}{2} + o(t^2) & (*) \\ \|N_t\| \leq (1-\eta) \quad (\eta > 0) \\ |\Pi_t(\varphi) - \lambda(\varphi)| \leq c|t|\|\varphi\| & (**) \end{cases}$$

on montre l'existence d'une fonction Θ de norme infinie majorée par une constante fois $((1 - \eta)^k + (1 - \eta)^{\ell-k} + (1 - \eta)^{m-\ell})$ telle que :

$$P_{\frac{x}{\sqrt{m-\ell}}}^{m-\ell} P_{\frac{y}{\sqrt{\ell-k}}}^{\ell-k} P_{\frac{z}{\sqrt{k}}}^k \mathbf{1} = \lambda_{\frac{x}{\sqrt{m-\ell}}}^{m-\ell} \lambda_{\frac{y}{\sqrt{\ell-k}}}^{\ell-k} \lambda_{\frac{z}{\sqrt{k}}}^k \Pi_{\frac{x}{\sqrt{m-\ell}}} (\Pi_{\frac{y}{\sqrt{\ell-k}}} (\Pi_{\frac{z}{\sqrt{k}}} (1))) + \Theta$$

Des inégalités (*) (**) ci-dessus on déduit

$$\|\Pi_{\frac{x}{\sqrt{m-\ell}}} (\Pi_{\frac{y}{\sqrt{\ell-k}}} (\Pi_{\frac{z}{\sqrt{k}}} (1))) - 1\|_{\infty} \leq C \left(\frac{z}{\sqrt{k}} + \frac{y}{\sqrt{\ell-k}} + \frac{x}{\sqrt{m-\ell}} \right)$$

$$\left| \lambda_{\frac{x}{\sqrt{m-\ell}}}^{m-\ell} \lambda_{\frac{y}{\sqrt{\ell-k}}}^{\ell-k} \lambda_{\frac{z}{\sqrt{k}}}^k - e^{-\frac{\sigma^2(x^2+y^2+z^2)}{2}} \right| \leq C e^{-\frac{\sigma^2(x^2+y^2+z^2)}{4}} \left(\frac{z^3}{\sqrt{k}} + \frac{y^3}{\sqrt{\ell-k}} + \frac{x^3}{\sqrt{m-\ell}} \right)$$

Notons $\Delta_{k,l,m}$ l'ensemble $[-\sqrt{m-\ell}\zeta, \sqrt{m-\ell}\zeta] \times [-\sqrt{\ell-k}\zeta, \sqrt{\ell-k}\zeta] \times [-\sqrt{k}\zeta, \sqrt{k}\zeta]$.

$$\begin{aligned} & \left| \int_{\Delta_{k,l,m}} \lambda_{\frac{x}{\sqrt{m-\ell}}}^{m-\ell} \lambda_{\frac{y}{\sqrt{\ell-k}}}^{\ell-k} \lambda_{\frac{z}{\sqrt{k}}}^k \Pi_{\frac{x}{\sqrt{m-\ell}}} (\Pi_{\frac{y}{\sqrt{\ell-k}}} (\Pi_{\frac{z}{\sqrt{k}}} (1))) \right. \\ & \quad \left. \widehat{\xi}_m \widehat{\xi}_\ell \widehat{\xi}_k dx dy dz - \int_{R^3} e^{-\frac{\sigma^2(x^2+y^2+z^2)}{2}} \widehat{\xi}_m \widehat{\xi}_\ell \widehat{\xi}_k dx dy dz \right| \\ & \leq \left(\int_{e\Delta_{k,l,m}} e^{-\frac{\sigma^2(x^2+y^2+z^2)}{2}} dx dy dz \right) + \int_{\Delta_{k,l,m}} (\lambda\lambda\lambda\Pi(\Pi(\Pi(1))) \\ & \quad - e^{-\frac{\sigma^2(x^2+y^2+z^2)}{2}}) \widehat{\xi}_m \widehat{\xi}_\ell \widehat{\xi}_k dx dy dz \\ & \leq - + \int_{\Delta_{k,l,m}} \underbrace{(\lambda\lambda\lambda - e^{-\frac{\sigma^2(x^2+y^2+z^2)}{2}})}_{\leq C(\frac{z^3}{k} + \frac{y^3}{\sqrt{\ell-k}} + \frac{x^3}{\sqrt{m-\ell}}) e^{-\frac{\sigma^2(x^2+y^2+z^2)}{2}}} \widehat{\xi}_m \widehat{\xi}_\ell \widehat{\xi}_k \\ & \quad + \int_{\Delta_{k,l,m}} \lambda\lambda\lambda(1 - \Pi\Pi\Pi) \widehat{\xi}_m \widehat{\xi}_\ell \widehat{\xi}_k \leq (\frac{1}{k} + \frac{1}{\sqrt{\ell-k}} + \frac{1}{\sqrt{m-\ell}}) \\ & \leq C \left(\frac{1}{\sqrt{k}} + \frac{1}{\sqrt{\ell-k}} + \frac{1}{\sqrt{m-\ell}} \right) \end{aligned}$$

Supposons que les trois entiers $k, \ell - k, m - \ell$ soient supérieurs à $D \ln m$ (D assez grand). Alors

$$\left| \int_{-\sqrt{m-\ell}\zeta}^{\sqrt{m-\ell}\zeta} \int_{-\sqrt{\ell-k}\zeta}^{\sqrt{\ell-k}\zeta} \int_{-\sqrt{k}\zeta}^{\sqrt{k}\zeta} \mathbb{E}(\Xi) \widehat{\xi}_m(\cdot) \widehat{\xi}_\ell(\cdot) \widehat{\xi}_k(\cdot) dx dy dz \right| \leq \frac{1}{m^4}.$$

Tournons-nous maintenant vers les quantités

$$\widehat{\xi}_m\left(\frac{x}{\sqrt{m-\ell}}\right) = \widehat{\Xi}_m\left(\frac{x}{\sqrt{m-\ell}}\right) \widehat{\mathbf{1}}_I\left(\frac{x}{\sqrt{m-\ell}}\right).$$

Désignons par t_I le milieu de I et $\ell(I)$ sa longueur. On a

$$\begin{aligned}
 \widehat{\mathbf{1}}_I\left(\frac{x}{\sqrt{m-\ell}}\right) &= \int_{t_I-\frac{\ell(I)}{2}}^{t_I+\frac{\ell(I)}{2}} e^{i\frac{tx}{\sqrt{m-\ell}}} dt = \frac{\sqrt{m-\ell}}{ix} \left[e^{i\frac{tx}{\sqrt{m-\ell}}} \right]_{t_I-\frac{\ell(I)}{2}}^{t_I+\frac{\ell(I)}{2}} \\
 &= \frac{\sqrt{m-\ell}}{ix} e^{i\frac{it_I x}{\sqrt{m-\ell}}} \left(e^{\frac{i\ell(I)x}{2\sqrt{m-\ell}}} - e^{-\frac{i\ell(I)x}{2\sqrt{m-\ell}}} \right) = \frac{2\sqrt{m-\ell}}{x} \sin\left(\frac{\ell(I)x}{2\sqrt{m-\ell}}\right) \\
 &= \frac{2\sqrt{m-\ell}}{x} \left(\frac{\ell(I)x}{2\sqrt{m-\ell}} + o\left(\left(\frac{\ell(I)x}{\sqrt{m-\ell}}\right)^3\right) \right) e^{i\frac{it_I x}{\sqrt{m-\ell}}} \\
 &= e^{i\frac{it_I x}{\sqrt{m-\ell}}} \ell(I) + o\left(\frac{1}{(m-\ell)}\right)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \widehat{\Xi}_m\left(\frac{x}{\sqrt{m-\ell}}\right) &= \int_{\mathbb{R}} e^{i\frac{tx}{\sqrt{m-\ell}}} \Xi_m(t) dt = \int_{\mathbb{R}} e^{i\frac{tx}{\sqrt{m-\ell}}} \Xi(m^\kappa t) n^\kappa dt \\
 &= \widehat{\Xi}\left(\frac{x}{m^\kappa \sqrt{m-\ell}}\right) \\
 \left| \widehat{\Xi}\left(\frac{x}{m^\kappa \sqrt{m-\ell}}\right) - \widehat{\Xi}(0) \right| &\leq C \frac{x}{m^\kappa \sqrt{m-\ell}}
 \end{aligned}$$

On a donc

$$\begin{aligned}
 \left| \widehat{\xi}_m\left(\frac{x}{\sqrt{m-\ell}}\right) - e^{i\frac{it_I x}{\sqrt{m-\ell}}} \ell(I) \right| &\leq \left| \widehat{\mathbf{1}}_I \widehat{\Xi}_m - e^{i\frac{it_I x}{\sqrt{m-\ell}}} \ell(I) \right| \\
 &\leq \left| \widehat{\mathbf{1}}_I \widehat{\Xi}_m - \widehat{\mathbf{1}}_I \right| + \left| \widehat{\mathbf{1}}_I - e^{i\frac{it_I x}{\sqrt{m-\ell}}} \ell(I) \right| \\
 &\leq C \left(\frac{x}{m^\kappa \sqrt{m-\ell}} + \frac{x^3}{m-\ell} \right)
 \end{aligned}$$

On étudie de la même façon $\widehat{\xi}_\ell$ et $\widehat{\xi}_k$. En fin de compte on obtient :

$$\begin{aligned}
 &\left| \sqrt{k(\ell-k)(m-\ell)} \mathbb{E}(\xi_\ell(S_\ell) \xi_k(S_k) \xi_m(S_m)) \right. \\
 &\quad \left. - \int_{\mathbb{R}^3} e^{-\frac{\sigma^2(x^2+y^2+z^2)}{2}} \ell(I) \ell(J) \ell(K) e^{i\frac{t_I x}{\sqrt{m-\ell}}} e^{it_J(\frac{y}{\sqrt{\ell-k}} - \frac{x}{\sqrt{m-\ell}})} e^{it_K(\frac{z}{\sqrt{k}} - \frac{y}{\sqrt{\ell-k}})} dx dy dz \right| \\
 &\leq C \left(\frac{1}{\sqrt{k}} + \frac{1}{\sqrt{\ell-k}} + \frac{1}{\sqrt{m-\ell}} \right)
 \end{aligned}$$

L'intégrale apparaissant dans le premier membre est égale à :

$$\frac{1}{(2\pi)^3} \ell(I) \ell(J) \ell(K) e^{-t_K^2/2k} e^{-\frac{(t_I-t_J)^2}{2(\ell-k)}} e^{-\frac{(t_J-t_K)^2}{2(m-\ell)}} \frac{(2\pi)^{3/2}}{\sigma^{3/2}}.$$

On a donc

$$\begin{aligned} & \left| \sqrt{k(\ell-k)(m-\ell)} \mathbb{E}(\xi_\ell(S_\ell) \xi_k(S_k) \xi_m(S_m)) \right. \\ & \quad \left. - \frac{1}{(2\pi\sigma)^{3/2}} \ell(I) \ell(J) \ell(K) e^{-t_K^2/2k} e^{-\frac{(t_I-t_J)^2}{2(\ell-k)}} e^{-\frac{(t_J-t_K)^2}{2(m-\ell)}} \right| \\ & \leq C \left(\frac{1}{\sqrt{k}} + \frac{1}{\sqrt{\ell-k}} + \frac{1}{\sqrt{m-\ell}} \right) \end{aligned}$$

dès que $k, \ell - k$ et $m - k$ sont supérieurs à $D \ln m$.

2.4. Conséquences pour les sommes ergodiques de f . — En utilisant les approximations des indicatrices d'intervalles par les fonctions ξ_ℓ et surtout des sommes ergodiques pour g par celle de f (c'est-à-dire l'encadrement $\mathbb{P}(S_n g_k \in I_{n,c-}) \leq \mathbb{P}(S_n f \in I) \leq \mathbb{P}(S_n g_k \in I_{n,c+})$), nous obtenons l'existence de $\eta > 0$ tel que,

$$\begin{aligned} & \left| \sqrt{k(\ell-k)(m-\ell)} \mathbb{P}(S_k f \in K, S_\ell f \in J, S_m f \in I) \right. \\ & \quad \left. - \frac{1}{(2\pi\sigma)^{3/2}} \ell(I) \ell(J) \ell(K) e^{-t_K^2/2k} e^{-\frac{(t_I-t_J)^2}{2(\ell-k)}} e^{-\frac{(t_J-t_K)^2}{2(m-\ell)}} \right| \\ & \leq C \left(\frac{1}{k^\eta} + \frac{1}{(\ell-k)^\eta} + \frac{1}{(m-\ell)^\eta} \right) \end{aligned}$$

dès que $k, \ell - k$ et $m - k$ sont supérieurs à $D \ln m$.

COROLLAIRE 2.4.1. — *Il existe δ tel que pour tout $n \in \mathbb{Z}$ on ait, pour tous $\ell, k \in [0, n^\varepsilon]$,*

$$|\mathbb{E}(N(n, x)^2) - \mathbb{E}(N(n, x, \ell)N(n, x))| \leq n^{1-\delta},$$

$$|\mathbb{E}(N(n, x, k)N(n, x, \ell)) - \mathbb{E}(N(n, x)^2)| \leq n^{1-\delta}$$

COROLLAIRE 2.4.2. — *Il existe $C \in \mathbb{R}_+$ tel que, pour tout $x \in \mathbb{Z}$,*

$$\mathbb{E}(N(n, x)^3) \leq C n^{3/2}.$$

Démonstration du premier corollaire

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(N(n, x)^2) &= \mathbb{E} \left(\left(\sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{I}_I(S_k) \right)^2 \right) = \sum_{k, \ell} \mathbb{P}(S_k \in I, S_\ell \in I) \\ &= \sum_k \mathbb{P}(S_k \in I) + 2 \sum_{\ell > k} \mathbb{P}(S_k \in I, S_\ell \in I) \end{aligned}$$

La première somme est d'ordre \sqrt{n} coupons la deuxième en quatre morceaux :

$$\begin{aligned} \sum_{\ell > k} \mathbb{P}(S_k \in I, S_\ell \in I) &= \sum_{\substack{\ell > k+n^\alpha \\ k > n^\alpha}} \mathbb{P}(S_k \in I, S_\ell \in I) \\ &+ \sum_{\substack{\ell > k+n^\alpha \\ k \leq n^\alpha}} \mathbb{P}(S_k \in I, S_\ell \in I) \\ &+ \sum_{\substack{\ell \leq k+n^\alpha \\ k > n^\alpha}} \mathbb{P}(S_k \in I, S_\ell \in I) \\ &+ \sum_{\substack{\ell \leq k+n^\alpha \\ k \leq n^\alpha}} \mathbb{P}(S_k \in I, S_\ell \in I) \end{aligned}$$

Le quatrième morceau est inférieur à $n^{2\alpha}$, les deuxième et troisième sont inférieurs à $n^{1/2+\alpha}$. La partie prépondérante est donc le terme $\sum_{\substack{\ell > k+n^\alpha \\ k > n^\alpha}} \mathbb{P}(S_k \in I, S_\ell \in I)$. De la même façon, on montre que $\mathbb{E}(N(n, x)N(n, x, r))$ est à $Cn^{1/2+\alpha}$ près égal à

$$\sum_{\substack{\ell > k+n^\alpha \\ k > n^\alpha}} \mathbb{P}(S_k \in I, S_\ell \in I_r) + \sum_{\substack{\ell > k+n^\alpha \\ k > n^\alpha}} \mathbb{P}(S_k \in I_r, S_\ell \in I).$$

On a donc

$$\begin{aligned} &|\mathbb{E}(N(n, x)^2) - \mathbb{E}(N(n, x)[n^\varepsilon]N(n, x, r))| \\ &\leq \sum_{\substack{\ell > k+n^\alpha \\ k > n^\alpha}} |[n^\varepsilon]\mathbb{P}(S_k \in I, S_\ell \in I_r) - \mathbb{P}(S_k \in I, S_\ell \in I)| \\ &\quad + \sum_{\substack{\ell > k+n^\alpha \\ k > n^\alpha}} |[n^\varepsilon]\mathbb{P}(S_k \in I, S_\ell \in I_r) - \mathbb{P}(S_k \in I, S_\ell \in I)| \\ &\quad + Cn^{1/2+\alpha} \end{aligned}$$

En utilisant l'inégalité prouvée plus haut, on montre

$$\left| (\sqrt{k}\sqrt{\ell-k})\mathbb{P}(S_k \in I, S_\ell \in I_r) - \frac{\ell(I)^2}{[n^\varepsilon]} \frac{e^{-\frac{t_I^2}{2k}} e^{-\frac{(t_{I_r}-t_I)^2}{2(\ell-k)}}}{2\pi\sigma^2} \right| \leq C \left(\frac{1}{k^\eta} + \frac{1}{(\ell-k)^\eta} \right),$$

$$\left| (\sqrt{k}(\ell-k))\mathbb{P}(S_k \in I, S_\ell \in I) - \ell(I)\ell(I) \frac{e^{-\frac{t_I^2}{2k}}}{2\pi\sigma^2} \right| \leq C \left(\frac{1}{k^\eta} + \frac{1}{(\ell-k)^\eta} \right)$$

ce qui donne

$$\begin{aligned}
& \sum_{\substack{\ell > k + n^\alpha \\ k > n^\alpha}} |\mathbb{P}(S_k \in I, S_\ell \in I_r)[n^\epsilon] - \mathbb{P}(S_k \in I, S_\ell \in I)| \\
& \leq [n^\epsilon] \sum_{\substack{\ell > k + n^\alpha \\ k > n^\alpha}} \left(\frac{1}{k^{1/2+\eta} \sqrt{\ell - k}} + \frac{1}{\sqrt{k}(\ell - k)^{1/2+\eta}} \right) + \ell(I)^2 \sum_{\substack{\ell > k + n^\alpha \\ k > n^\alpha}} \frac{e^{-\frac{t_I^2}{2k}} \left| 1 - e^{-\frac{(t_I - t_{I_r})^2}{2(\ell - k)}} \right|}{2\pi\sigma^2 \sqrt{k}(\ell - k)} \\
& \leq C n^{1-\delta},
\end{aligned}$$

pour un réel $\delta > 0$ à condition que ϵ soit choisi suffisamment petit. La démonstration de la première majoration du corollaire est achevée. La deuxième se montre de la même manière.

Démonstration du deuxième corollaire

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(N(n, x)^3) &= 6 \sum_{m > \ell > k} \mathbb{P}(S_k \in I, S_\ell \in I, S_m \in I) + C n \\
&= \sum_{\substack{k < n^\alpha \\ \ell < k + n^\alpha \\ m < \ell + n^\alpha}} \mathbb{P}(\) + \sum_{\substack{k > n^\alpha \\ \ell < k + n^\alpha \\ m < \ell + n^\alpha}} \mathbb{P}(\) + \sum_{\substack{k < n^\alpha \\ \ell > k + n^\alpha \\ m < \ell + n^\alpha}} \mathbb{P}(\) + \sum_{\substack{k < n^\alpha \\ \ell < k + n^\alpha \\ m > \ell + n^\alpha}} \mathbb{P}(\) \\
&+ \sum_{\substack{k > n^\alpha \\ \ell > n^\alpha + k \\ m < n^\alpha + \ell}} \mathbb{P}(\) + \sum_{\substack{k > n^\alpha \\ \ell < n^\alpha + k \\ m > n^\alpha + \ell}} \mathbb{P}(\) + \sum_{\substack{k < n^\alpha \\ \ell > k + n^\alpha \\ m > k + n^\alpha}} \mathbb{P}(\) + \sum_{\substack{k > n^\alpha \\ \ell - k > n^\alpha \\ m - \ell > n^\alpha}} \mathbb{P}(\)
\end{aligned}$$

La première somme est inférieure à $n^{3\alpha}$. Les autres se majorent de la même façon. Par exemple.

$$\begin{aligned}
& \sum_{\substack{k > n^\alpha \\ \ell < k + n^\alpha \\ m < \ell + n^\alpha}} \mathbb{P}(\) \leq n^{2\alpha} \sum_k \mathbb{P}(S_k \in I) \leq n^{1/2+2\alpha}. \\
& \sum_{\substack{k > n^\alpha \\ \ell > n^\alpha + k \\ m < n^\alpha + \ell}} \mathbb{P}(\) \leq \sum_{\substack{k > n^\alpha \\ \ell > n^\alpha + k}} \underbrace{\mathbb{P}(S_k \in I, S_\ell \in I)}_{\leq C \frac{1}{\sqrt{k}(\ell - k)}} \leq C n^{1+\alpha} \\
& \sum_{\substack{k > n^\alpha \\ \ell > n^\alpha + k \\ m > n^\alpha + \ell}} \mathbb{P}(S_k \in I, S_\ell \in I, S_m \in I) \leq C \sum_1 \frac{1}{\sqrt{k}(\ell - k)(m - \ell)} \leq C n^{3/2}
\end{aligned}$$

BIBLIOGRAPHIE

- [1] E. Breuillard, *Distributions diophantiennes et théorème limite local sur \mathbb{R}^d* , à paraître dans *Probability theory and related fields*.
- [2] A. Broise, *Transformations dilatantes de l'intervalle et théorèmes limites*, Astérisque, 1996, 238, 1–109.

- [3] J.-P. Conze et S. Le Borgne, *Méthode de martingales et flot géodésique sur une surface de courbure constante négative*, Ergodic Theory Dynam. Systems 21 (2001), no. 2, 421–441.
- [4] S. Gouëzel, *Sharp polynomial estimates for the decay of correlations*, Israel J. Math. 139 (2004), 29–65.
- [5] Y. Guivarc’h et J. Hardy, *Théorèmes limites pour une classe de chaînes de Markov et applications aux difféomorphismes d’Anosov*, Ann. Inst. H. Poincaré Probab. Statist. 24 (1988), no. 1, 73–98.
- [6] H. Hennion et L. Hervé, *Limit theorems for Markov chains and stochastic properties of dynamical systems by quasi-compactness*, Lecture Notes in Mathematics, 1766, Springer-Verlag, 2001.
- [7] S. Kalikow, S., *T, T^{-1} transformation is not loosely Bernoulli*, Ann. of Math. (2) 115 (1982), no. 2, 393–409.
- [8] H. Kesten et F. Spitzer, *A limit theorem related to a new class of self-similar processes*, Z. Wahrsch. Verw. Gebiete 50 (1979), no. 1, 5–25.
- [9] S. Le Borgne et F. Pène, *Vitesse dans le théorème limite central pour certains systèmes dynamiques quasi-hyperboliques*, à paraître dans le Bulletin de la SMF.
- [10] C. Liverani, B. Saussol et S. Vaienti, *A probabilistic approach to intermittency*, Ergodic Theory Dyn. Syst. 19, 671–685 (1999).
- [11] Y. Pomeau et P. Manneville, *Intermittent transition to turbulence in dissipative dynamical systems*, Commun. Math. Phys. 74 (1980), 189–197.
- [12] D.J. Rudolph, *Asymptotically Brownian skew products give non-loosely Bernoulli K -automorphisms*, Invent. Math. 91 (1988), no. 1, 105–128.
- [13] O. Sarig, *Subexponential decay of correlations*, Invent. Math. 150 (2002), no. 3, 629–653.
- [14] S. Waddington, *Large deviation asymptotics for Anosov flows*, Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire, 13, 1996, 4, 445–484.
- [15] L.S. Young, *Recurrence times and rates of mixing*, Isr. J. Math. 110, 153–188 (1999).