# Feuille d'exercices 1

**Exercice 1** Calculer les produits des matrices $A$ et $B$ dans les cas suivants.

1) $A = B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$,

2) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$,

3) $A = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$,

4) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

**Exercice 2** Vérifier que $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$.

**Exercice 3** Une usine fabrique deux produits, A et B. Chaque produit contient quatre matières différentes W, X, Y, Z. La fabrication de chaque unité de chaque matière nécéssite trois forme d'énergie, électricité, gaz, pétrole. Les deux tableaux suivants présentent les nombres d'unités nécessaires d'énergie pour produire une unité de chaque matière, les quantités de matières nécessaires pour produire une unité de chaque produit A et B. Utiliser la multiplication matricielle pour exprimer les quantités d'énergie nécessaires à la production d'une unité de chaque produit.

| | W | X | Y | Z |
|---|---|---|---|---|
| A | 2 | 3 | 1 | 1 |
| B | 4 | 2 | 0 | 1 |

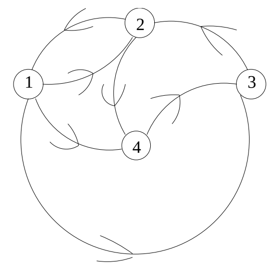
| | Electricité | Pétrole | Gaz |
|---|---|---|---|
| W | 5 | 3 | 6 |
| X | 1 | 0 | 1 |
| Y | 0 | 4 | 0 |
| Z | 3 | 0 | 4 |

**Exercice 4** Même chose avec trois produits finaux A, B, C et trois matières intermédiaires X, Y, Z. Les données étant présentées dans les tableaux suivants.

| | A | B | C |
|---|---|---|---|
| X | 2 | 3 | 1 |
| Y | 0 | 2 | 0 |
| Z | 1 | 2 | 1 |

| | Electricité | Pétrole | Gaz |
|---|---|---|---|
| W | 5 | 2 | 1 |
| X | 0 | 2 | 1 |
| Y | 0 | 2 | 2 |

**Exercice 5** Grâce au calcul matriciel (et à la calculatrice) donner le nombre de chemins de longueur 7 allant de 1 à 3 dans le graphe suivant. Combien y-a-t-il de chemins de longueur 5 en tout ?




**Exercice 6** Prendre deux matrices carrées 2x2 $A$ et $B$ au hasard et calculer $AB$ et $BA$.

**Exercice 7** Soit $A$ une matrice 3x3. Écrire sous forme matricielle l'opération qui consiste à ajouter la première ligne multipliée par 2 à la troisième ligne.

**Exercice 8** Écrire sous forme matricielle le sytème d'équations linéaires suivant :

$$\begin{aligned}
&2x + 3y - 3z + 2t = 5 \\
&x - 3y - z + t = -1 \\
&2x + y + z - t = 2
\end{aligned}$$

**Exercice 9** Inverser la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 10 & -1 & 2 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$ en utilisant les opérations sur les lignes. Recommencer avec $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 4 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

**Exercice 10** Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 0,2 & 0,2 \\ 0,1 & 0 & 0,1 \\ 0,1 & 0,1 & 0 \end{pmatrix}$ une matrice de technologie. Trouver les valeurs de production brute quand la demande est $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

**Exercice 11** Écrire sous forme matricielle les formes quadratiques suivantes :

$$Q(x, y, z, t) = x^2 - 2y^2 + 3xy + 2z^2 - 3xz + 4zt - 8xt + t^2,$$

$$Q(a, b, c) = 2ab - 6bc + 8ac.$$

**Exercice 12** Écrire sous forme de la multiplication par une matrice (quand c'est possible) les applications de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$ suivantes :
a) $f(x, y, z) = (2x + 6y - 5z, 3x^2 + 2y)$
b) $f(x, y, z) = (2x + 6y - 5z, 3x + 2y + 3z)$
c) $f(x, y, z) = (x + 6y, 3x + 2y)$

**Exercice 13** Considérons les matrices

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

et

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \end{pmatrix}.$$

a) Vérifier qu'on a $B = A + 4I_3$.
b) Trouver une formule liant $B$ et $B^2$.
c) Trouver une relation entre $A$, $A^2$ et $I_3$.
d) Montrer que $A$ est inversible et calculer $A^{-1}$.
e) Que se passe-t-il en dimension 4x4 ?

**Exercice 14** Posons

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

a) Calculer $A \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $A^2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, puis $A^n \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ pour un entier $n$ quelconque. Faire la même chose avec le vecteur $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ à la place du vecteur $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.
b) Écrire $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ comme une combinaison linéaire des deux vecteurs $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.
c) En déduire $A^n \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ puis l'expression de $A^n$.