Université de Rennes 1
UFR de Mathématiques

L3 Mathématiques
INTL
15/12/2016

Examen – session 1

Les documents et les calculatrices ne sont pas autorisés. Le sujet comporte 3 pages et la durée est de 2 heures. Une rédaction **rigoureuse** *et des réponses* **argumentées** *sont attendues. Toute interversion du type* $\lim_n \int = \int \lim_n$, $\sum_n \int = \int \sum_n$ *ou* $\int_X \int_Y = \int_Y \int_X$ *toute continuité, dérivabilité sous l'intégrale devra être justifiée en citant les théorèmes utilisés et en vérifiant leurs hypothèses.*

Exercice 1 Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$I_n = \int_0^{+\infty} f_n(x)dx, \quad \text{où} \quad f_n(x) = \arctan(nx)e^{-x^n}, \ x \in \mathbb{R}_+.$$

1. Vérifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, I_n est bien défini.
2. Montrer qu'il existe $g_1, g_2 \in L^1(\mathbb{R})$ telles que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,
   (a) $|f_n(x)| \leq g_1(x)$ pour tout $x \in [0, 1]$,
   (b) $|f_n(x)| \leq g_2(x)$ pour tout $x \in [1, +\infty[$.
3. En distinguant $x \in [0, 1[$ et $x \in]1, +\infty[$, déterminer $\lim_{n\to+\infty} f_n(x)$.
4. En déduire $\lim_{n\to+\infty} I_n$.

Dans les Exercices 2 à 5, on s'intéresse à la transformation de Fourier définie ci-dessous en (F). *Ces exercices sont liés (et indépendants de l'Exercice 1) mais les résultats peuvent être admis pour continuer : en particulier, les propriétés élémentaires de l'Exercice 2 sont utilisées dans toute la suite, les autres recours à des questions précédentes sont toutes indiquées.*

On considère l'espace mesuré $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ où λ désigne la mesure de Lebesgue. Pour une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ intégrable, on définit sa transformée de Fourier $\widehat{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ par

$$\widehat{f}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2i\pi xy} f(y)\, dy, \quad x \in \mathbb{R}. \qquad \text{(F)}$$

Exercice 2 (Propriétés élémentaires) Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$.

1. Montrer que $\widehat{f}(x)$ est bien définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ et que
$$\left\|\widehat{f}\right\|_\infty \leq \|f\|_1.$$
2. Calculer les transformées de Fourier de
   (a) $f(x) = \mathbf{1}_{[0,1]}(x)$,
   (b) $f(x) = \mathbf{1}_{[0,+\infty[}(x)e^{-2\pi x}$.
3. Montrer que la transformation de Fourier $f \mapsto \widehat{f}$ est linéaire.
4. Montrer que $\widehat{f}$ est une fonction continue.
5. En notant $\overline{z}$ le conjugué d'un complexe z, montrer que $\overline{\widehat{f}(x)} = \widehat{\overline{f}}(-x)$.
6. Pour $h \in \mathbb{R}$, soit $f_h : x \mapsto f(x+h)$. Montrer que $\widehat{f_h}(x) = e^{2i\pi hx}\widehat{f}(x)$.
7. Pour $\alpha \in \mathbb{R}^*$, soit $f^{(\alpha)} : x \mapsto f(\alpha x)$. Montrer que $\widehat{f^{(\alpha)}}(x) = \frac{1}{|\alpha|}\widehat{f}(x/\alpha)$.
8. Soient $f, g \in L^1(\mathbb{R})$, montrer que $\widehat{f * g} = \widehat{f}\,\widehat{g}$.

Exercice 3 (Transformée de Fourier et dérivation) Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$.

1. Montrer que si $x \mapsto xf(x)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$ alors $\widehat{f}$ est dérivable de dérivée $(\widehat{f}\,)'(x) = -2i\pi\widehat{g}(x)$ où $g(x) = xf(x)$.
2. Soit f une fonction C^1 de limites nulles en $\pm\infty$ et de dérivée f' intégrable sur $\mathbb{R}$. Montrer que
$$\widehat{(f')}(x) = 2i\pi x\widehat{f}(x).$$

Exercice 4 (Riemann-Lebesgue) On se propose de montrer le lemme de Riemann-Lebesgue : *La transformation de Fourier est une application linéaire continue de $L^1(\mathbb{R})$ à valeurs dans $C_0(\mathbb{R})$, l'ensemble des fonctions continues, de limites nulles en $\pm\infty$.*

1. Soit $g \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ une fonction de classe C^∞ à support compact. Montrer qu'il existe une constante $C > 0$ telle que
$$|\widehat{g}(x)| \leq C/x^2,$$
et en déduire que $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \widehat{g}(x) = 0$.
Indication : on pourra calculer la transformée de Fourier $\widehat{g''}$ de g'' à l'aide de l'Exercice 3, et utiliser les propriétés élémentaires de l'Exercice 2.
2. Montrer que si $f \in L^1(\mathbb{R})$, alors $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \widehat{f}(x) = 0$.

Exercice 5 (Inversion de Fourier) Dans cet exercice, on considère $f \in L^1(\mathbb{R})$ telle que $\widehat{f} \in L^1(\mathbb{R})$. On montre alors la propriété dite d'inversion de Fourier :

$$\widehat{\widehat{f}}(x) = f(-x) \text{ pour } \lambda\text{-presque tout } x. \tag{FF}$$

On pose $H(x) = e^{-2\pi|x|}$ et

$$h_n(x) = \widehat{H^{(1/n)}}(-x) = \int_{\mathbb{R}} e^{2i\pi xy} H(y/n)\, dy.$$

1. Montrer que
$$h_n(x) = \frac{n}{\pi(1+(nx)^2)}.$$
2. Montrer que $(h_n)_{n\geq 1}$ est une approximation de l'unité.
3. Justifier que $f * h_n$ est définie en tout point de $\mathbb{R}$, et montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$,
$$(f * h_n)(x) = \int_{\mathbb{R}} H(u/n) e^{2i\pi xu} \widehat{f}(u)\, du.$$
4. En déduire que pour tout $x \in \mathbb{R}$,
$$\lim_{n\to+\infty} (f * h_n)(x) = \int_{\mathbb{R}} e^{2i\pi xu} \widehat{f}(u)\, du.$$
5. En déduire que si $f \in L^1(\mathbb{R})$ vérifie $\widehat{f} \in L^1(\mathbb{R})$, alors la propriété d'inversion de Fourier (FF) est satisfaite.
6. À l'aide des propriétés élémentaires de l'Exercice 2, montrer que si on a $\widehat{f} = \widehat{g}$ pour $f, g \in L^1(\mathbb{R})$, alors $f = g$ p.p.