Examen du 5 janvier 2016

Exercice 1 *(2 points)*
Écrire la matrice jacobienne de l'application :

$$f(\rho, \theta, \phi) = (\rho \sin(\phi) \cos(\theta), \rho \sin(\phi) \sin(\theta), \rho \cos(\phi)).$$

Calculer le déterminant de cette matrice jacobienne.

Exercice 2 *(2 points)*
Considérons la fonction définie sur $\mathbb{R}^3$ par

$$f(x, y) = x^2 y + 3xy + 2y^2.$$

Trouver une équation de la tangente à la courbe de niveau 6 de f au point $(1, 1)$.

Exercice 3 *(3 points)*
L'ensemble

$$F = \{(x, y, z) \ / \ 3x^2 - 2y^2 + z^2 = 1\}$$

est-il un sous-ensemble fermé de $\mathbb{R}^3$? Est-il compact ? Justifier vos réponses.

Exercice 4 *(3 points)*
Étudier la nature des points critiques de la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par

$$f(x, y) = xy(1 - x^2 - y^2).$$

Exercice 5 *(3 points)*
Les fonctions d'utilité de deux ménages sont $x \mapsto x^2$ et $y \mapsto y$. On souhaite distribuer deux unités de revenu. Comment faut-il les répartir entre les deux ménages pour que la somme des utilités soit la plus grande possible ?

Exercice 6 *(5 points)*

1. Montrer que l'ensemble

$$K = \{(x, y, z) \ / \ x^2 + y^2 + z^2 \leq 1, \ x \geq 0\}$$

   est un sous-ensemble compact de $\mathbb{R}^3$. Décrire le bord de K (au moyen de trois sous ensembles définis par des contraintes).
2. Trouver les valeurs maximale et minimale de la fonction définie par

$$f(x, y, z) = 3x + 2y + z$$

   sur l'ensemble K. Justifier le fait que les valeurs données sont bien les valeurs minimale et maximale de la fonction sur l'ensemble considéré. Donner aussi les points où ces valeurs sont atteintes.

Exercice 7 *(4 points)*

1. Dessiner le domaine D de $\mathbb{R}^2$ défini par :

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ x^2 + y^2 \leq 1, \ x + y \leq 1, \ x \geq 0\}.$$

2. Calculer l'intégrable double suivante :

$$\iint_D x \ dxdy.$$