Préparation de l'examen de janvier

Le devoir durera deux heures. Les exercices ci-dessous sont donnés à titre d'exemples. Bien sûr, le sujet d'examen ne comportera pas autant d'exercices. D'autres exercices sont envisageables.

Vous trouverez aux adresses données ci-dessous les épreuves corrigées du module VAR de l'année 2009/2010 (les cours étaient légèrement différents (VAR et non VARE) mais certains exercices corrigés sont très semblables à ce que je pourrais vous demander) :
http ://perso.univ-rennes1.fr/bertold.wiest/enseign0910/VARTerminal.pdf
http ://perso.univ-rennes1.fr/bertold.wiest/enseign0910/VARRattrap.pdf
Des corrigés d'exercices ou de DS sont disponibles sur les pages
http ://perso.univ-rennes1.fr/stephane.leborgne/VAR-2013.html
http ://perso.univ-rennes1.fr/stephane.leborgne/VAR-2011.html
https ://perso.univ-rennes1.fr/stephane.leborgne/VARE-2015.html

Exercice 1
Montrer que l'ensemble

$$\{(x,y)\ /\ x^2+y^2 \leq 2,\ x-2y^2 \geq 1/2\}$$

est fermé (utiliser un résultat portant sur les fonctions continues). Cet ensemble est-il compact ?

Exercice 2
La fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ à valeur dans $\mathbb{R}$ par

$$f(x,y) = \frac{2xy+y^2}{x^2+y^2} \text{ si } (x,y) \neq (0,0)$$

et $f(0,0) = 0$ est-elle continue ? Justifiez votre réponse (considérer des points de la forme (x,x) et des points de la forme $(x,0)$).

Exercice 3
Écrire la matrice jacobienne (là où elle est définie) de l'application :

$$f(x,y,z) = (2xyz, 1+\ln x + y^2, \pi + 3x^3 + 2\sqrt{y} + z).$$

Exercice 4
Considérons la fonction définie sur $\mathbb{R}^3$ par

$$f(x,y,z) = xz^2 - 3xyz + 2y^2.$$

1) Trouver tous les points de la surface niveau 0 de f dont les deux premières coordonnées valent 1.
2) Trouver les équations des plans tangents à la surface en ces points (s'il y a des plans tangents).

Exercice 5
1) Montrer que l'ensemble

$$F = \{(x, y, z) \ / \ 3x^2 + 2y^2 + z^2 = 1\}$$

est un sous-ensemble compact de $\mathbb{R}^3$.
2) Trouver les valeurs maximale et minimale de la fonction définie par

$$f(x, y, z) = 3x - y - z$$

sur l'ensemble F. Justifier le fait que les valeurs données sont bien les valeurs minimale et maximale de la fonction sur l'ensemble considéré. Donner aussi les points où ces valeurs sont atteintes.

Exercice 6
Étudier la nature des points stationnaires de la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par

$$f(x, y) = x^2y^2 - x^2 - y^2.$$

Exercice 7
Trouver les valeurs maximales et minimales de la fonction définie par

$$f(x, y, z) = x + y - 2z$$

sur l'ensemble

$$\{(x, y, z) \ / \ x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 1\}.$$

Donner aussi les points où ces valeurs sont atteintes.

Exercice 8
1) La fonction $f(x, y, z) = 2xyz$ est-elle continue ?
2) Trouver les points critiques de f ? Ces points critiques sont-ils des extremums locaux ?
3) La restriction de cette fonction à l'ensemble $\{(x, y, z) \ / \ \ x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$ est-elle bornée et atteint-elle ses bornes ? Pourquoi ?
4) Trouver les points de cet ensemble où f est maximum et minimum et les valeurs de ces maximum et minimum.

Exercice 9
Les revenus de trois ménages sont : 2, 1, 1. Leurs fonctions d'utilité sont toutes identiques : $x \mapsto \sqrt{x}$. On souhaite distribuer une unité de revenu supplémentaire. Comment faut-il la répartir entre les trois ménages pour que la somme des utilités soit la plus grande possible ?

Exercice 10
Les fonctions d'utilité de deux ménages sont $x \mapsto \sqrt{x}$ et $y \mapsto y$. On souhaite distribuer une unité de revenu. Comment faut-il la répartir entre les trois ménages pour que la somme des utilités soit la plus grande possible ? Et si le revenu à répartir est de deux unités ? Comment faut-il modifier les expressions des fonctions d'utilité pour que la répartition optimale obtenue ne dépende pas de l'unité dans laquelle est exprimé le revenu à répartir ?

Exercice 11
1) Dessiner le domaine D de $\mathbb{R}^2$ défini par :

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ x \leq 1, y \leq 1, x + y \geq 1\}.$$

2) Calculer l'intégrable double suivante :

$$\iint_D (x + y)e^{-x} dxdy.$$

Exercice 12
Calculer l'aire de la partie du plan définie par :

$$\{(x, y) \ / \ x^2 + y^2 \leq 2, \ x \geq 1/2\}.$$

Exercice 13
Calculer l'intégrale double :

$$\iint_D e^{-(x^2+y^2)} dxdy,$$

où D est l'ensemble

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ x^2 + y^2 \leq 4\}.$$

Indication : faire un changement de variables (passage en coordonnées polaires).

Exercice 14
Calculer l'intégrable double :

$$\iint_D xy^2 dxdy,$$

où D est le triangle dont les sommets sont $(0, 0)$, $(1, 1)$, $(4, 1)$.