Feuille 5

Exercice 1. Dessiner les régions suivantes :

(a) $\{(x,y) \mid x+y \leqslant 1 \ , \ x \geqslant 0 \ , \ y \geqslant 0\}$

(b) $\{(x,y) \mid |x|+|y| \leqslant 1\}$

(c) $\{(x,y) \mid x^2 \leqslant y \leqslant x \ , \ 0 \leqslant x \leqslant 1\}$

Exercice 2. Calculer les intégrales doubles suivantes :

(a) $\displaystyle\iint_R xy(x+y)\,dxdy \qquad R : [0,1]\times[0,1]$

(b) $\displaystyle\iint_R \sin(x+y)\,dxdy \qquad R : [0,\pi/2]\times[0,\pi/2]$

(c) $\displaystyle\int_0^\pi \int_0^x x\sin y\,dydx$

(d) $\displaystyle\iint_R x\cos(x+y)\,dxdy$, R région triangulaire de sommets à $(0,0)$, $(\pi,0)$, (π,π).

(e) $\displaystyle\int_0^\pi \int_y^\pi \frac{\sin x}{x}\,dxdy$

(f) $\displaystyle\iint_R x^2\,dxdy$ lorsque $R = \{(x,y) \mid x \geqslant 0 \ , \ 1 \leqslant x^2+y^2 \leqslant 2\}$

(g) $\displaystyle\iint_D \frac{1}{(x^2+y^2)^3}\,dx\,dy \ , \ D = \{(x,y) \mid 4 \leqslant x^2+y^2 \leqslant 9\}$

(h) $\displaystyle\iint_S xy^2\,dx\,dy$ où S est limité par la parabole $y^2 = 2px$ et la droite $x = p$

(i) $\displaystyle\iint_S (x^2+y^2)\,dx\,dy$ où le domaine d'intégration S est limité par le demi-cercle de rayon a et de centre (0,0), et situé au-dessus de l'axe des x

(j) $\displaystyle\int_0^a \int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} \sqrt{x^2-y^2}\,dy\,dx$

(k) $\displaystyle\iint_D \frac{dx\,dy}{(x^2+y^2+1)^{3/2}} \ , \ D = \{(x,y) \mid x^2+y^2 \leqslant a\}$

Exercice 3. Calculer les aires des régions du plan suivantes

(a) $\{(x,y) \mid y \leqslant x \leqslant y^2 \ , \ 1 \leqslant y \leqslant 2\}$.

(b) la région du plan déterminé par l'équation $r^2 \leqslant 4\cdot\cos(2\theta)$

(c) la surface limitée par les paraboles d'équations $y^2 = 10x+25$ et $y^2 = -6x+9$

Exercice 4. Ecrire le carré de $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}dx$ comme une intégrale sur le plan et passer en coordonnées polaires. En déduire la valeur de $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}dx$.

Exercice 5. Soit $(x,y) = G(u,v) = (u+v\,,\, u^2-v)$. Soit $A = \{(u,v) \mid u \geqslant 0\,,\, v \geqslant 0\,,\, u+v \leqslant 2\}$.
Calculer $\displaystyle\iint_{G(A)} \frac{1}{\sqrt{1+4x+4y}}\, dx\, dy\,.$

Exercice 6. Prendre un rectangle dans $\mathbb{R}^2$ (resp. un pavé dans $\mathbb{R}^3$) une matrice 2×2 (resp. 3×3) et calculer l(aire (resp. le volume) de l'image du rectangle (resp. du pavé) par l'application définie par la multiplication par la matrice.

Exercice 7. On considère $\displaystyle\int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} (1-y^2)^{1/2} dy\, dx\,.$

1. Décrire la région sur laquelle on intègre.
2. Echanger l'ordre d'intégration et évaluer.

Exercice 8. Calculer $\displaystyle\int_0^1 \int_0^x \int_{x^2+y^2}^1 dz\, dy\, dx\,.$ Décrire la région sur laquelle on intègre.

Exercice 9. Calculer les intégrales triples suivantes

(a) $\displaystyle\iiint_V x^2 dx\, dy\, dz$ où V est l'ellipsoïde d'équation $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} \leqslant 1\,.$
Indication : se ramener au cas $a=b=c=1$.

(b) $\displaystyle\iiint_V \sqrt{x^2+y^2+z^2}\, dx\, dy\, dz$ où V est la boule de centre (0,0,0) et de rayon R.

(c) $\displaystyle\iiint_V \frac{1}{(1+x+y+z)^3}\, dx\, dy\, dz$ où V est limité par les plans de coordonnées et par le plan d'équation $x+y+z=1\,.$

(d) $\displaystyle\iiint_V (x+y+z)^2\, dx\, dy\, dz$ où V est la portion commune au paraboloïde $\{2az \geqslant x^2+y^2\}$ et à la boule $\{x^2+y^2+z^2 \leqslant 3a^2\}\,.$

(e) $\displaystyle\iiint_V z\, dx\, dy\, dz$ où V est le domaine limité par le plan $z=0$ et par le demi-ellipsoïde supérieur $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1$

(f) $\displaystyle\iiint_V z\, dx\, dy\, dz$ où V est le domaine limité par le plan $z=h$ et par le cône d'équation $z^2 = \dfrac{h^2}{R^2}\,(x^2+y^2)\,.$

(g) $\displaystyle\iiint_V dx\, dy\, dz$ où V est le domaine limité par les surfaces d'équations $x^2+y^2+z^2 = 2Rz$ et $x^2+y^2 = z^2$, et contenant le point $(0,0,R)\,.$

(h) $\displaystyle\int_0^2 \int_0^{\sqrt{2x-x^2}} \int_0^a z\sqrt{x^2+y^2}\, dz\, dy\, dx\,.$

(i) $\displaystyle\iiint_D \frac{dx\, dy\, dz}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}$, $D = \{(x,y,z) \mid 1 \leqslant x^2+y^2+z^2 \leqslant 4\}$

Exercice 10. Calculer le volume du corps limité par le plan xOy, le cylindre $x^2+y^2 = ax$ et la sphère $x^2+y^2+z^2 = a^2\,.$