

Feuille 5

Exercice 1. Dessiner les régions suivantes :

- (a) $\{(x, y) \mid x + y \leq 1, x \geq 0, y \geq 0\}$
- (b) $\{(x, y) \mid |x| + |y| \leq 1\}$
- (c) $\{(x, y) \mid x^2 \leq y \leq x, 0 \leq x \leq 1\}$

Exercice 2. Calculer les intégrales doubles suivantes :

- (a) $\iint_R xy(x+y) \, dx dy \quad R : [0, 1] \times [0, 1]$
- (b) $\iint_R \sin(x+y) \, dx dy \quad R : [0, \pi/2] \times [0, \pi/2]$
- (c) $\int_0^\pi \int_0^x x \sin y \, dy dx$
- (d) $\iint_R x \cos(x+y) \, dx dy$, R région triangulaire de sommets à $(0, 0)$, $(\pi, 0)$, (π, π) .
- (e) $\int_0^\pi \int_y^\pi \frac{\sin x}{x} \, dx dy$
- (f) $\iint_R x^2 \, dx dy$ lorsque $R = \{(x, y) \mid x \geq 0, 1 \leq x^2 + y^2 \leq 2\}$
- (g) $\iint_D \frac{1}{(x^2 + y^2)^3} \, dx dy$, $D = \{(x, y) \mid 4 \leq x^2 + y^2 \leq 9\}$
- (h) $\iint_S xy^2 \, dx dy$ où S est limité par la parabole $y^2 = 2px$ et la droite $x = p$
- (i) $\iint_S (x^2 + y^2) \, dx dy$ où le domaine d'intégration S est limité par le demi-cercle de rayon a et de centre $(0, 0)$, et situé au-dessus de l'axe des x
- (j) $\iint_D \frac{dx dy}{(x^2 + y^2 + 1)^{3/2}}$, $D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq a\}$

Exercice 3. Calculer les aires des régions du plan suivantes

- (a) $\{(x, y) \mid y \leq x \leq y^2, 1 \leq y \leq 2\}$.
- (b) la région du plan déterminé par l'équation $r^2 \leq 4 \cdot \cos(2\theta)$
- (c) la surface limitée par les paraboles d'équations $y^2 = 10x + 25$ et $y^2 = -6x + 9$

Exercice 4. Ecrire le carré de $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx$ comme une intégrale sur le plan et passer en coordonnées polaires. En déduire la valeur de $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx$.

Exercice 5. Soit $(x, y) = G(u, v) = (u + v, u^2 - v)$. Soit $A = \{(u, v) \mid u \geq 0, v \geq 0, u + v \leq 2\}$.

Calculer $\iint_{G(A)} \frac{1}{\sqrt{1 + 4x + 4y}} \, dx dy$.

Exercice 6. Prendre un rectangle dans \mathbb{R}^2 (resp. un pavé dans \mathbb{R}^3) une matrice 2×2 (resp. 3×3) et calculer l'aire (resp. le volume) de l'image du rectangle (resp. du pavé) par l'application définie par la multiplication par la matrice.

Exercice 7. On considère $\int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} (1-y^2)^{1/2} dy dx$.

1. Décrire la région sur laquelle on intègre.
2. Echanger l'ordre d'intégration et évaluer.

Exercice 8. Calculer $\int_0^1 \int_0^x \int_{x^2+y^2}^1 dz dy dx$. Décrire la région sur laquelle on intègre.

Exercice 9. Calculer les intégrales triples suivantes

(a) $\iiint_V x^2 dx dy dz$ où V est l'ellipsoïde d'équation $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1$.

Indication : se ramener au cas $a = b = c = 1$.

(b) $\iiint_V \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} dx dy dz$ où V est la boule de centre $(0,0,0)$ et de rayon R .

(c) $\iiint_V \frac{1}{(1+x+y+z)^3} dx dy dz$ où V est limité par les plans de coordonnées et par le plan d'équation $x + y + z = 1$.

(d) $\iiint_V (x + y + z)^2 dx dy dz$ où V est la portion commune au paraboloid $\{2az \geq x^2 + y^2\}$ et à la boule $\{x^2 + y^2 + z^2 \leq 3a^2\}$.

(e) $\iiint_V z dx dy dz$ où V est le domaine limité par le plan $z = 0$ et par le demi-ellipsoïde supérieur $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$

(f) $\iiint_V z dx dy dz$ où V est le domaine limité par le plan $z = h$ et par le cône d'équation $z^2 = \frac{h^2}{R^2} (x^2 + y^2)$.

(g) $\iiint_V dx dy dz$ où V est le domaine limité par les surfaces d'équations $x^2 + y^2 + z^2 = 2Rz$ et $x^2 + y^2 = z^2$, et contenant le point $(0, 0, R)$.

(h) $\int_0^2 \int_0^{\sqrt{2x-x^2}} \int_0^a z \sqrt{x^2 + y^2} dz dy dx$.

(i) $\iiint_D \frac{dx dy dz}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}$, $D = \{(x, y, z) \mid 1 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 4\}$

Exercice 10. Calculer le volume du corps limité par le plan xOy , le cylindre $x^2 + y^2 = ax$ et la sphère $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$.