# Feuille 4

**Exercice 1.** Considérons $F(t) = \left( \dfrac{2t}{1+t^2} \ , \ \dfrac{1-t^2}{1+t^2} \ , \ 1 \right)$.
Montrer que l'angle entre $F(t)$ et $F'(t)$ est constant.

**Exercice 2.** Considérons l'hélice $F(t) = (a\,\cos t \ , \ a \sin t \ , \ bt)$ avec $a, b > 0$.
Montrer que l'angle $\theta$ entre l'axe $Oz$ et la droite tangente à l'hélice est constant et $\cos\theta = b/\sqrt{a^2+b^2}$.

**Exercice 3.** Soit $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$ une courbe différentiable telle que $F(t_0) = X_0 \neq \vec{0}$ soit le point le plus proche de l'origine.
Montrer que $F'(t_0)$ est orthogonal à $F(t_0)$.

**Exercice 4.** Si $F(t)$ et $\|F(t)\|$ sont intégrables sur $[a, b]$, montrer que :

$$\| \int_a^b F(t)\ dt\| \ \leqslant \ \int_a^b \|F(t)\|\ dt$$

En déduire que le chemin le plus court entre deux points $A$ et $B$ dans $\mathbb{R}^n$ est le segment $[AB]$.

**Exercice 5.** Considérons l'hélice $\gamma(t) = (\cos t\,,\, \sin t\,,\, t)$.

1. Calculer l'abscisse curviligne $s(t) = \displaystyle\int_0^t \|\gamma'(u)\|\,du$.
2. Trouver la paramétrisation unitaire $\gamma(s) = \gamma(t(s))$ de l'hélice.
3. Calculer la courbure $\rho(s)$ de $\gamma(s)$.

**Exercice 6.** Soit $\gamma(s)$ une courbe paramétrée unitaire dans le plan $\mathbb{R}^2$.
Montrer que $\rho(s) = \left|\dfrac{d\phi}{ds}\right|$ où $\phi(s)$ est l'angle entre le vecteur tangent $\gamma'(s)$ et le vecteur $e_1 = (1, 0)$.

**Exercice 7.** Soit $\gamma(t) \in \mathbb{R}^3$ une courbe paramétrée.
Il est parfois utile de pouvoir calculer $\rho$ directement, sans passer par une paramétrisation unitaire de $\gamma$.
Montrer que $\rho = \|\gamma'(t) \wedge \gamma''(t)\| \ / \ \|\gamma'(t)\|^3$.

**Exercice 8.** Trouver la courbure de la spirale $\gamma(t) = (e^{-t}\cos t\,,\, e^{-t}\sin t\,,\, 0)$.
Que se passe-t-il lorsque $t \to \infty$ ?

**Exercice 9.** Soit $\gamma(s) \subset \mathbb{R}^3$ telle que $\|\gamma(s)\| = \|\gamma'(s)\| = 1$ , $\forall s$. (Géométriquement, ceci veut dire que la courbe $\gamma$ se promène à vitesse 1 sur la sphère de rayon 1 et de centre $(0, 0, 0)$.)
Montrer que $\rho(s) \geqslant 1$.
(Indication : utiliser le produit scalaire et l'inégalité de Cauchy-Schwarz)

**Exercice 10.** Trouver les points de $\mathbb{R}^2$ tels que $f(x,y) = (x^2 - y^2\,,\, 2xy)$ soit localement inversible.

**Exercice 11.** Montrer que $f(x,y) = x\,e^y - y + 1 = 0$ définit une fonction $y = \varphi(x)$ implicitement en $(-1,0)$ et calculer $\varphi'(-1)$.

**Exercice 12.** Considérons la fonction $f(u,v) = (x,y)$ avec $x = (v^2 - u^2)/2$ et $y = uv$.
1. Déterminer en quels points cette fonction est localement inversible.
2. Nous observons que $f(1,2) = (\frac{3}{2}, 2)$ et que $f$ est localement inversible en $(1,2)$. Dans un voisinage de $(u,v) = (1,2)$ on peut donc écrire $u = u(x,y)$ et $v = v(x,y)$. Donner les valeurs de $\partial u/\partial x, \partial u/\partial y, \partial v/\partial x$ et $\partial v/\partial y$ au point $(\frac{3}{2}, 2)$.

**Exercice 13.** Déterminer tous les extrema locaux et absolus ainsi que les points de selle de la fonction $f(x,y) = xy(1 - x^2 - y^2)$ sur le carré $\{(x,y)\,|\,0 \leqslant x \leqslant 1\ ,\ 0 \leqslant y \leqslant 1\}$.

**Exercice 14.** La température sur la sphère $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ est donnée par $T(x,y,z) = 2 + xz + y^2$.
Trouver les points les plus chauds et ceux les plus froids.

**Exercice 15.** Cet exercice a pour but de démontrer l'inégalité arithmético-géométrique :

$$\sqrt[n]{a_1 \cdot \ldots \cdot a_n} \leqslant \frac{a_1 + \cdots + a_n}{n} \quad \text{pour des nombres } \ a_i \geqslant 0$$

1. Utiliser la méthode de Lagrange pour trouver la valeur maximale de $f(x_1\,,\,\ldots\,,\,x_n) = x_1^2 \cdots x_n^2$ sur la sphère de rayon $r > 0$ : $x_1^2 + \cdots + x_n^2 = r^2$. Pourquoi $f$ admet-elle une valeur maximale ?
2. Déduire de la question précédente que $x_1^2 \cdots x_n^2 \leqslant \left(\dfrac{x_1^2 + \cdots + x_n^2}{n}\right)^n$.
3. En déduire l'inégalité arithmético-géométrique.

**Exercice 16.** Considérer la fonction $f(x,y) = x^3 - 3x^2 + y^2$.

1. Déterminer les points critiques de $f$ ainsi que leur nature.
2. Trouver les extrema de $f$ sur le carré $\{(x,y)\ |\ -2 \leqslant x, y \leqslant 2\}$.

**Exercice 17.** Trouver la valeur maximale de $f(x,y,z) = x+z$ sur la sphère $x^2+y^2+z^2 = 1$ (par la méthode de Lagrange).

**Exercice 18.** Les revenus de trois ménages sont : 2, 1, 1. Leurs fonctions d'utilité sont toutes identiques : $x \mapsto \sqrt{x}$. On souhaite distribuer une unité de revenu supplémentaire. Comment faut-il la répartir entre les trois ménages pour que la somme des utilités soit la plus grande possible ?

**Exercice 19.** On considère un ensemble de $n$ agents économiques. Ils ont tous la même fonction d'utilité $x \mapsto x^\alpha$. Pour quelle répartition des revenus la somme des fonctions d'utilité est-elle maximale ?