Feuille 4

Exercice 1. Considérons $F(t) = \left(\dfrac{2t}{1+t^2}\ ,\ \dfrac{1-t^2}{1+t^2}\ ,\ 1\right)$. Montrer que l'angle entre $F(t)$ et $F'(t)$ est constant.

Exercice 2. Considérons l'hélice $F(t) = (a\cos t\ ,\ a\sin t\ ,\ bt)$ avec $a, b > 0$. Montrer que l'angle θ entre l'axe Oz et la droite tangente à l'hélice est constant et $\cos\theta = b/\sqrt{a^2+b^2}$.

Exercice 3. Soit $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$ une courbe différentiable telle que $F(t_0) = X_0 \neq \vec{0}$ soit le point le plus proche de l'origine. Montrer que $F'(t_0)$ est orthogonal à $F(t_0)$.

Exercice 4. On considère l'arc de parabole défini par $x \mapsto (x, x^2)$ pour x compris entre -1 et 1. Calculer la longueur de cet arc. Indication : pour calculer l'intégrale (car la réponse est donnée par une intégrale) on pourra utiliser le changement de variable $2x = \sinh t$.

Exercice 5. On considère l'arc de spirale logarithmique défini par $x \mapsto (2^x\cos x, 2^x \sin x)$ pour x compris entre 0 et 2π. Calculer la longueur de cet arc.

Exercice 6. Si $F(t)$ et $\|F(t)\|$ sont intégrables sur $[a, b]$, montrer que :

$$\| \int_a^b F(t)\ dt\| \quad \leqslant \quad \int_a^b \|F(t)\|\ dt$$

En déduire que le chemin le plus court entre deux points A et B dans $\mathbb{R}^n$ est le segment $[AB]$.

Exercice 7. Trouver les points de $\mathbb{R}^2$ tels que $f(x, y) = (x^2 - y^2\ , 2xy)$ soit localement inversible.

Exercice 8. Montrer que $f(x, y) = x\,e^y - y + 1 = 0$ définit une fonction $y = \varphi(x)$ implicitement en $(-1, 0)$ et calculer $\varphi'(-1)$.

Exercice 9. Considérons la fonction $f(u, v) = (x, y)$ avec $x = (v^2 - u^2)/2$ et $y = uv$.
1. Déterminer en quels points cette fonction est localement inversible.
2. Nous observons que $f(1, 2) = (\frac{3}{2}, 2)$ et que f est localement inversible en $(1, 2)$. Dans un voisinage de $(u, v) = (1, 2)$ on peut donc écrire $u = u(x, y)$ et $v = v(x, y)$. Donner les valeurs de $\partial u/\partial x, \partial u/\partial y, \partial v/\partial x$ et $\partial v/\partial y$ au point $(\frac{3}{2}, 2)$.

Exercice 10. Déterminer tous les extrema locaux et absolus ainsi que les points de selle de la fonction $f(x, y) = xy(1 - x^2 - y^2)$ sur le carré $\{(x, y) \,|\, 0 \leqslant x \leqslant 1\ ,\ 0 \leqslant y \leqslant 1\}$.

Exercice 11. La température sur la sphère $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ est donnée par $T(x, y, z) = 2 + xz + y^2$.
Trouver les points les plus chauds et ceux les plus froids.

Exercice 12. Cet exercice a pour but de démontrer l'inégalité arithmético-géométrique :

$$\sqrt[n]{a_1 \cdot \ldots \cdot a_n} \leqslant \frac{a_1 + \cdots + a_n}{n} \quad \text{pour des nombres } \ a_i \geqslant 0$$

1. Utiliser la méthode de Lagrange pour trouver la valeur maximale de $f(x_1, \ldots, x_n) = x_1^2 \cdots x_n^2$ sur la sphère de rayon $r > 0$: $x_1^2 + \cdots + x_n^2 = r^2$. Pourquoi f admet-elle une valeur maximale ?
2. Déduire de la question précédente que $x_1^2 \cdots x_n^2 \leqslant \left(\dfrac{x_1^2 + \cdots + x_n^2}{n} \right)^n$.
3. En déduire l'inégalité arithmético-géométrique.

Exercice 13. Considérer la fonction $f(x, y) = x^3 - 3x^2 + y^2$.

1. Déterminer les points critiques de f ainsi que leur nature.
2. Trouver les extrema de f sur le carré $\{(x, y) \mid -2 \leqslant x, y \leqslant 2\}$.

Exercice 14. Trouver la valeur maximale de $f(x, y, z) = x+z$ sur la sphère $x^2+y^2+z^2 = 1$ (par la méthode de Lagrange).

Exercice 15. Les revenus de trois ménages sont : 2, 1, 1. Leurs fonctions d'utilité sont toutes identiques : $x \mapsto \sqrt{x}$. On souhaite distribuer une unité de revenu supplémentaire. Comment faut-il la répartir entre les trois ménages pour que la somme des utilités soit la plus grande possible ?

Exercice 16. On considère un ensemble de n agents économiques. Ils ont tous la même fonction d'utilité $x \mapsto x^\alpha$. Pour quelle répartition des revenus la somme des fonctions d'utilité est-elle maximale ?