Feuille 3

Exercice 1. Calculer les dérivées partielles de $f(x,y) = \mathrm{Ln}(xy)$.

Exercice 2. Calculer les dérivées partielles à l'ordre 1 et 2 des fonctions suivantes :
a) $f(x,y) = xy^2 - 4x^2 + 3x^3y + 2x - 4$
b) $f(x,y,z) = \ln(x^3+y) - 2x$
c) $f(u,v,w) = \sqrt{u-v} + 2w^\alpha$

Exercice 3. Calculer $df(x)$ de $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ donnée par : $f(x) = Mx + B$, M étant une matrice $(3,3)$ et $B \in \mathbb{R}^3$.

Exercice 4. Trouver la différentielle de $f(x,y) = (x^2+y^2)^{1/2}$ en $(1,1)$.

Exercice 5. Trouver la différentielle de $f(x,y) = 2x + 3y$ en $(x_0\,,\,y_0)$.

Exercice 6. Estimer $(0.99 \cdot e^{0.02})^8$.

Exercice 7. Trouver les points critiques de :
(a) $f(x,y) = (x^2+y^2)\,e^{-(x^2+y^2)}$
(b) $f(x,y) = x\,e^y$

Exercice 8. Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ donnée par $f(x) = \|x\|^2$.
Déterminer les points x pour lesquels f est différentiable, ainsi que la différentielle.

Exercice 9. Soit $f(x,y) = y\,e^{xy}$.
1. Calculer $\nabla f(x,y)$.
2. Dans quelle direction $f(x,y)$ s'accroît-elle le plus vite à partir du point $(1,1)$? Donner le vecteur unitaire de cette direction.

Exercice 10. Soit $f(x,y) = x^2 + xy + y^2$.
Dans quelle direction f s'accroît-elle le plus rapidement au point $(-1,1)$?
Trouver la dérivée directionnelle dans cette direction.

Exercice 11. Soit $g(t) = f(x_0 + \alpha t, y_0 + \beta t)$. Calculer $g'(0)$.

Exercice 12. 1) Posons $f(x,y,z) = 2x^3y - 2ye^z + x - 2y^2$. Calculer le gradient de f.
2) Posons $g(t) = (x(t), y(t), z(t)) = (t, e^{-2t}, 3t)$. Calculer la dérivée de g.
3) Posons $F(t) = f(g(t)) = f(t, e^{-2t}, 3t)$. Calculer la dérivée de F.

Exercice 13. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$. On pose $g(x,y) = f(x-y,\, y-x)$. Calculer $\dfrac{\partial g}{\partial x} + \dfrac{\partial g}{\partial y}$.

Exercice 14. Considérons les fonctions suivantes :

$$x(u,v) = u^2 - v^2,\ \ y(u,v) = uv - v,\ \ z(u,v) = v^2 + u,$$

$$f(x,y,z) = x^2 - xy - 3z^2.$$

Posons $F(u,v) = f(x(u,v), y(u,v), z(u,v))$. Calculer les dérivées partielles de F par rapport à u et v.

Exercice 15. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ avec $\dfrac{\partial f}{\partial x}(1,1) = 3$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(1,1) = 5$.
Calculer $g'(0)$ lorsque $g(t) = f(2t + t^2 + e^t\ ,\ \sin t + \cos t)$.

Exercice 16. On appelle fonction homogène d'ordre α toute fonction vérifiant $f(\lambda x\ ,\ \lambda y) = \lambda^\alpha f(x,y)$, $\forall \lambda > 0$.
Montrer que $f(x,y)$ homogène vérifie l'identité d'Euler : $x\dfrac{\partial f}{\partial x} + y\dfrac{\partial f}{\partial y} = \alpha f$.

Exercice 17. Soit f une fonction homogène de degré α.
1) Écrire ce que ça signifie : $f(tx_1, \ldots, tx_n) = ...$
2) Dériver de deux façons les deux membres de la question 1) par rapport à t. En déduire l'identité d'Euler (prendre une valeur particulière de t).

Exercice 18. Trouver l'équation du plan tangent à la surface donnée par le graphe de $f(x,y) = x^2 + y^2$ au point (2,2,8).

Exercice 19. Trouver l'équation du plan tangent à la surface $S = \{(x,y,z)\,|\,xyz = 1\}$ en $(2, 1, \frac{1}{2})$.

Exercice 20. Considérons les sphères $S_1 : (x-c)^2+y^2+z^2 = 3$ et $S_2 : x^2+(y-1)^2+z^2 = 1$. Trouver une valeur de c pour laquelle, à tout point d'intersection de S_1 et S_2, les plans tangents sont orthogonaux.

Exercice 21. Trouver tous les points P sur la surface $S : 2x^2 - y^2 + z^2 = 25$ pour lesquels le plan tangent T_pS est orthogonal à l'axe Oz.

Exercice 22. Trouver une dérivée directionnelle de $f(x,y,z) = 3x - 5y + 2z$ en $(2,2,1)$ dans la direction de la normale (extérieure) à la sphère $x^2 + y^2 + z^2 = 9$.

Exercice 23. Calculer la matrice jacobienne de $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ donnée par : $f(\rho,\theta) = (\rho\cos\theta,\ \rho\sin\theta)$.

Exercice 24. Calculer la matrice jacobienne de $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ donnée par : $f(r,\varphi,\theta) = (r\sin\varphi\cos\theta\ ,\ r\sin\varphi\sin\theta\ ,\ r\cos\varphi)$.

Exercice 25. Calculer la matrice jacobienne $\mathrm{Jac}(f)$ de $f(x,y) = (x+y\ ,\ x^2y)$ et trouver les points où le déterminant de $\mathrm{Jac}(f)$ est nul.

Exercice 26. Soit $h(x) = g(f(x))$ avec $f = (f_1\ ,\ \ldots\ ,\ f_n) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n\ ,\ g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$.
Montrer que $\nabla h(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial g}{\partial x_k}(y)\ \nabla f_k(x)\ ,\ y = f(x)$.

Exercice 27. Soit $f(x,y) = (xy\ ,\ e^{xy})$. Calculer la matrice jacobienne de f et déterminer le rang de cette matrice en tout point (x,y). Donner l'image du vecteur (a,b) pour $df(1,0)$.