

Feuille 2

Exercice 1. Donner l'ensemble de définition et l'image de $f(x, y) = \frac{x}{x^2 - y^2}$.

Exercice 2. Dessiner le graphe de $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2 - 1}$.

Exercice 3. Dessiner le graphe de $f(x, y) = x^2 + y^2 - 4x - 6y + 13$.

Exercice 4. Dessiner la surface $S = \{(x, y, z) | z = -y^2\} \subset \mathbb{R}^3$.

Exercice 5. Tracer les courbes de niveau pour les fonctions suivantes :

(a) $f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}$ (on pourra utiliser les coordonnées polaires)

(b) $f(x, y) = x^2 - y^2$

(c) $f(x, y) = e^{xy}$

Exercice 6. Montrer que la fonction f définie par $f(x, y) = \frac{xy^2}{x^2 + y^2}$ si $(x, y) \neq (0, 0)$ et $f(0, 0) = 0$ est continue en $(0, 0)$.

Exercice 7. Si $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ sont continues, montrer que $f + g$ est continue.

Exercice 8. Soit $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction ayant la propriété : " $f^{-1}(I)$ est ouvert pour tout intervalle ouvert I dans \mathbb{R} ".

Montrer que f est continue.

Exercice 9. Soient $X \subset \mathbb{R}^n$ compact, $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ continue. Montrer que $f(X) \subset \mathbb{R}$ est compact.

Exercice 10. Soit f la fonction définie sur $\{(x, y) / y \neq 0\}$ par :

$$f(x, y) = \frac{1 + x^2 + y^2}{y} \sin y.$$

Pourquoi cette fonction est-elle continue? Étudier ses prolongements continus possibles.

Exercice 11. Même question pour la fonction définie sur $\{(x, y) / x^2 \neq y^2\}$ par

$$g(x, y) = \frac{1 + x + y}{x^2 - y^2}.$$

Exercice 12. Même question pour $h(x, y) = \frac{|y|}{x^2} e^{-\frac{|y|}{x^2}}$.

Exercice 13. Soit E l'ensemble des éléments (x, y) de \mathbb{R}^2 vérifiant $1 \leq |x| + |y| \leq 2$. Montrer que E est fermé.

La formule $f(x, y) = \frac{1}{x^2 + y^2}$ définit-elle sur E une fonction continue?

Trouver les points où f atteint sa borne supérieure et sa borne inférieure.

Exercice 14. On considère la fonction de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R} définie par :

$$f(x, y) = \sup \left\{ \frac{x}{1 + |y|}, \frac{y}{1 + |x|} \right\}.$$

Cette fonction est-elle continue ?

Exercice 15. On donne deux fonctions g et h de classe \mathcal{C}^1 de \mathbb{R} dans \mathbb{R} et on suppose que la dérivée de h ne s'annule pas.

Montrer que la fonction f définie de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R} par : $f(x, y) = \frac{g(x) - g(y)}{h(x) - h(y)}$ où $h(x) \neq h(y)$ a un prolongement continu sur \mathbb{R}^2 .

Exercice 16. Pour chacune des applications suivantes de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R} , donner son domaine de définition et dire (en le justifiant) si elle admet un prolongement continu sur \mathbb{R}^2 . (Indication : dans plusieurs cas, on peut utiliser des coordonnées polaires.)

$$f_1(x, y) = \frac{x + y}{x^2 + y^2} \quad f_2(x, y) = y \sin x \quad f_3(x, y) = (x^2 + y^2) \sin \frac{1}{x^2 + y^2}$$

$$f_4(x, y) = y \sin \frac{1}{x} \quad f_5(x, y) = \frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2} \quad f_6(x, y) = \frac{y}{x^2} e^{-\frac{|y|}{x^2}}$$

Exercice 17. Soit f une fonction continue de \mathbb{R} dans \mathbb{R} .

On note φ l'application définie sur $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / y \neq 0\}$ par : $\varphi(x, y) = (x + y)f\left(\frac{x}{y}\right)$.

Montrer que φ est continue.

Trouver une condition nécessaire et suffisante pour que φ puisse être prolongée continuellement sur \mathbb{R}^2 .

Exercice 18. Etudier la continuité de la fonction f définie par :

$$f(x, y) = x^2 \text{ si } |x| \leq |y|$$

$$f(x, y) = y^2 \text{ si } |x| > |y|$$

Exercice 19. Montrer que la fonction f définie par : $f(x, y) = \frac{x + y}{x^2 + y^2}$ a une limite lorsque $\|(x, y)\|$ tend vers l'infini.

Exercice 20. Montrer que l'application définie par :

$$f(x, y) = \frac{x^4}{y(y - x^2)} \text{ si } y \neq 0 \text{ et } y - x^2 \neq 0$$

$$f(x, y) = 0 \text{ si } y = 0 \text{ ou si } y - x^2 = 0$$

n'est pas continue en $(0, 0)$ mais que ses restrictions à toute droite passant par l'origine sont continues en ce point.