

Feuille 2

Exercice 1. Donner l'ensemble de définition et l'image de $f(x, y) = \frac{x}{x^2 - y^2}$.

Exercice 2. Dessiner le graphe de $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2 - 1}$.

Exercice 3. Dessiner le graphe de $f(x, y) = x^2 + y^2 - 4x - 6y + 13$.

Exercice 4. Dessiner la surface $S = \{(x, y, z) | z = -y^2\} \subset \mathbb{R}^3$.

Exercice 5. Tracer les courbes de niveau pour les fonctions suivantes :

(a) $f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}$ (on pourra utiliser les coordonnées polaires)

(b) $f(x, y) = x^2 - y^2$

(c) $f(x, y) = e^{xy}$

Exercice 6. Montrer que la fonction f définie par $f(x, y) = \frac{xy^2}{x^2 + y^2}$ si $(x, y) \neq (0, 0)$ et $f(0, 0) = 0$ est continue en $(0, 0)$.

Exercice 7. Si $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ sont continues, montrer que $f + g$ est continue.

Exercice 8. Soit $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction ayant la propriété : " $f^{-1}(I)$ est ouvert pour tout intervalle ouvert I dans \mathbb{R} ". Montrer que f est continue.

Exercice 9. On considère une fonction f de deux variables définie par la formule

$$f(x, y) = \sqrt{1 + x + y}.$$

Décrire la partie de \mathbb{R}^2 la plus grande sur laquelle cette formule a un sens. On considère que f est définie sur cette partie. Décrire l'image réciproque $E = f^{-1}(]-1, 1[)$. L'ensemble E est-il ouvert dans \mathbb{R}^2 ?

Exercice 10. Soient $X \subset \mathbb{R}^n$ compact, $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ continue. Montrer que $f(X) \subset \mathbb{R}$ est compact.

Exercice 11. On considère la fonction de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R} définie par :

$$f(x, y) = \sup \left\{ \frac{x}{1 + |y|}, \frac{y}{1 + |x|} \right\}.$$

Cette fonction est-elle continue ? Est-elle bornée ?

Exercice 12. Soit f la fonction définie sur $\{(x, y) / y \neq 0\}$ par :

$$f(x, y) = \frac{1 + x^2 + y^2}{y} \sin y.$$

Pourquoi cette fonction est-elle continue ? Étudier ses prolongements continus possibles.

Exercice 13. Pour chacune des applications suivantes de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R} , donner son domaine de définition et dire (en le justifiant) si elle admet un prolongement continu sur \mathbb{R}^2 . (Indication : dans plusieurs cas, on peut utiliser des coordonnées polaires.)

$$f_1(x, y) = \frac{x+y}{x^2+y^2} \quad f_2(x, y) = y \sin x \quad f_3(x, y) = (x^2+y^2) \sin \frac{1}{x^2+y^2}$$

$$f_4(x, y) = y \sin \frac{1}{x} \quad f_5(x, y) = \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2} \quad f_6(x, y) = \frac{y}{x^2} e^{-\frac{|y|}{x^2}}$$

Exercice 14. Soit E l'ensemble des éléments (x, y) de \mathbb{R}^2 vérifiant $1 \leq |x| + |y| \leq 2$. Montrer que E est compact.

La formule $f(x, y) = \frac{1}{x^2+y^2}$ définit-elle sur E une fonction continue ?

Trouver les points où f atteint sa borne supérieure et sa borne inférieure.

Exercice 15. Etudier la continuité de la fonction f définie par :

$$f(x, y) = x^2 \text{ si } |x| \leq |y|$$

$$f(x, y) = y^2 \text{ si } |x| > |y|$$

Exercice 16. Montrer que la fonction f définie par : $f(x, y) = \frac{x+y}{x^2+y^2}$ a une limite lorsque $\|(x, y)\|$ tend vers l'infini.

Exercice 17. Montrer que l'application définie par :

$$f(x, y) = \frac{x^4}{y(y-x^2)} \text{ si } y \neq 0 \text{ et } y-x^2 \neq 0$$

$$f(x, y) = 0 \text{ si } y = 0 \text{ ou si } y-x^2 = 0$$

n'est pas continue en $(0, 0)$ mais que ses restrictions à toute droite passant par l'origine sont continues en ce point.

Exercice 18. Lesquels des sous-ensembles suivants de \mathbb{R}^2 sont ouverts ?

- (a) $\{(x, y) \mid |x| < 1 \text{ et } |y| < 1\}$
- (b) $\{(x, y) \mid xy \leq 1\}$
- (c) $\{(x, y) \mid y > x^2 \text{ et } 0 \leq |x| < 2\}$
- (d) $\{(x, y) \mid x > y\}$

Justifier vos réponses en utilisant un théorème sur les fonctions continues.

Exercice 19. Montrer que l'ensemble

$$E = \{(x, y, z) \mid 3x^4 + 2y^8 + z^2 = 1\}$$

est un sous-ensemble compact de \mathbb{R}^3 . L'ensemble

$$F = \{(x, y, z) \mid x^3 + 2y^2 + z^2 = 1\}$$

est-il un sous-ensemble compact de \mathbb{R}^3 ?

Exercice 20. La fonction $f(x, y, z) = 2xyz$ est-elle continue ? La restriction de cette fonction à l'ensemble $\{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$ est-elle bornée et atteint-elle ses bornes ? Pourquoi ?