Examen

(Calculatrices et documents interdits)

Connaissances élémentaires (2 points)
1) Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a :

$$(n+1)^2 = \sum_{k=0}^{n}(2k+1)$$

2) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation

$$|x+2| + |x-1| > 5.$$

Exercice 1
1) Montrer *en utilisant la définition* que l'ensemble $\{(x,y) \ / \ (x-1)^2+(y-1)^2 < 2\}$ est un sous-ensemble ouvert de $\mathbb{R}^2$.
2) Montrer la même chose en utilisant un théorème sur les fonctions continues définies sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 2
1) Montrer que l'ensemble

$$\{(x,y,z) \ / \ 2x^2+2y^2+z^2 = 1\}$$

est un sous-ensemble compact de $\mathbb{R}^3$.
2) Trouver les valeurs maximale et minimale de la fonction définie par

$$f(x,y,z) = x - y + 3z$$

sur l'ensemble

$$\{(x,y,z) \ / \ 2x^2+2y^2+z^2 = 1\}.$$

Justifier le fait que les valeurs données sont bien les valeurs minimale et maximale de la fonction sur l'ensemble considéré. Donner aussi les points où ces valeurs sont atteintes.

Exercice 3
Considérons la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par

$$f(x,y) = xe^y + y.$$

Montrer que l'équation $f(x,y) = 1$ définit une courbe au voisinage du point $(1,0)$. Trouver l'équation de la tangente à cette courbe au point $(1,0)$.

Exercice 4
Étudier la nature des points stationnaires de la fonction définie sur $\mathbb{R}^3$ par

$$f(x,y,z) = x^3z + x^2y^2 - x^2 - y^2 - 4xz.$$

Exercice 5
Écrire la matrice jacobienne de l'application définie sur $\mathbb{R}^3$ par :

$$F(\rho,\theta,\phi) = (\rho\cos(\theta)\sin(\phi), \rho\sin(\theta)\sin(\phi), \rho\cos(\phi)).$$

Calculer son déterminant (en simplifier l'écriture autant que possible).

Exercice 6
1) Dessiner le domaine D de $\mathbb{R}^2$ défini par :

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ y^2 - 1 \leq x \leq 1 - y^2\}.$$

2) Calculer l'aire de D.

Exercice 7
Soit $R > 0$. Calculer l'aire de la calotte sphérique définie par :

$$\{(x,y,z) \ / \ x^2+y^2+z^2 = R^2, \ x > R/2\}.$$