

NOM :

PRÉNOM :

DS 2

(Calculatrices et documents interdits)

Connaissances élémentaires (2 points)

Donner un exemple de suite tendant vers $-\infty$ telle que, pour tout n entier naturel, on ait $u_{2n} < u_{2n+1}$.

Résoudre dans \mathbb{R} l'inéquation

$$|x - 1| + |x - 2| < 3.$$

VRAI/FAUX (3 points)

Aucune justification de réponse n'est demandée. Un demi point par bonne réponse, zéro par absence de réponse, moins un demi par réponse incorrecte. **Entourer la bonne réponse.**

- L'ensemble $\{(x, y) / x^2 - y^2 \leq 1\}$ est une partie compacte de \mathbb{R}^2 . Vrai/Faux.
- Si une fonction f est C^1 , définie sur \mathbb{R}^2 et à valeurs dans \mathbb{R}^3 alors sa matrice jacobienne est une matrice à 2 lignes et 3 colonnes. Vrai/Faux.
- Soit f une fonction définie sur \mathbb{R}^2 . Si $x \mapsto f(x, 0)$ et $y \mapsto f(0, y)$ sont continues en 0 alors $(x, y) \mapsto f(x, y)$ est continue en $(0, 0)$. Vrai/Faux.
- Si une fonction définie sur \mathbb{R}^n a une dérivée partielle par rapport à chaque variable et que ces dérivées partielles sont continues alors elle est continue. Vrai/Faux.
- Si f est une fonction de classe C^2 définie sur \mathbb{R}^n à valeurs réelles a un maximum local en un point x alors sa matrice hessienne en x a un déterminant non nul. Vrai/Faux.
- Si deux fonctions de classe C^1 définie sur \mathbb{R}^n à valeurs réelles n'ont pas d'extremum local alors leur somme non plus. Vrai/Faux.

Exercice 1 (4 points)

Écrire le développement de Taylor à l'ordre 2 au point $(0, 1)$ de la fonction définie sur \mathbb{R}^2 par :

$$f(x, y) = \exp(x) \cdot \ln(1 + x^2 + y^2).$$

Exercice 2 (3 points)

On considère la fonction de deux variables f définie sur \mathbb{R}^2 par

$$f(x, y) = 1 + x + 2(y + 1)^2 + 2xy.$$

1) Que vaut $f(1, 1)$?

2) Donner l'équation cartésienne du plan tangent au graphe de f en $(1, 1, f(1, 1))$.

NOM :

PRÉNOM :

Exercice 3 (3 points)

Étudier la nature des points stationnaires de la fonction définie sur \mathbb{R}^2 par

$$f(x, y) = x^3y^2 + x^2 + y^2.$$

Exercice 4 (5 points)

- 1) La fonction définie sur \mathbb{R}^3 par $f(x, y, z) = 2x^2 - 2y^2 + z^2$ est-elle continue ?
- 2) La fonction f a-t-elle des points critiques ? La fonction f a-t-elle des extrema libres ?
- 3) La restriction de cette fonction à l'ensemble $\{(x, y, z) / x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$ est-elle bornée ? Atteint-elle ses bornes ?
- 4) Trouver les points de cet ensemble où f a un maximum, un minimum et les valeurs de ces maximum et minimum.