

NOM :

PRÉNOM :

DS 2

(Calculatrices et documents interdits)

Connaissances élémentaires (2 points)

Une suite tendant vers $-\infty$ est-elle décroissante à partir d'un certain rang ? (justifier)

Une population augmente de 10% par an. En combien d'années doublera-t-elle ? (On demande la formule permettant de déterminer ce nombre).

VRAI/FAUX (3 points)

Aucune justification de réponse n'est demandée. Un demi point par bonne réponse, zéro par absence de réponse, moins un demi par réponse incorrecte. **Entourer la bonne réponse.**

– L'ensemble $\{(x, y) / x^2 - y^2 \geq 1\}$ est une partie compacte de \mathbb{R}^2 . Vrai/Faux.

– Si une fonction f définie sur \mathbb{R}^2 , C^1 et à valeurs dans \mathbb{R}^2 a une matrice jacobienne en $(1, 2)$ de déterminant non nul alors f est localement inversible en $(1, 2)$. Vrai/Faux.

– Soit f une fonction définie sur \mathbb{R}^2 . Si $x \mapsto f(x, 0)$ et $y \mapsto f(0, y)$ sont continues en 0 alors $(x, y) \mapsto f(x, y)$ est continue en $(0, 0)$. Vrai/Faux.

– Si une fonction définie sur \mathbb{R}^n a une dérivée partielle par rapport à chaque variable alors elle est continue. Vrai/Faux.

– Si f est une fonction de classe C^2 définie sur \mathbb{R}^n à valeurs réelles alors sa matrice hessienne est une matrice $n \times n$ symétrique. Vrai/Faux.

– Si une fonction de classe C^1 définie sur \mathbb{R}^n à valeurs réelles n'a pas d'extremum local alors elle n'a pas de point stationnaire. Vrai/Faux.

Exercice 1 (4 points)

Considérons la fonction définie sur \mathbb{R}^3 par

$$f(x, y, z) = xz^2 - 3xyz + 2y^2.$$

1) Trouver tous les points de la surface niveau 0 de f dont les deux premières coordonnées valent 1.

2) Trouver les équations des plans tangents à la surface en ces points (s'il y a des plans tangents).

Exercice 2 (2 points)

Écrire la matrice jacobienne (lorsqu'elle est définie) de l'application définie sur \mathbb{R}^3 par :

$$f(x, y, z) = (2xyz, 1 + \ln x + y^2, \pi + 3x^3 + 2\sqrt{y} + z).$$

Exercice 3 (4 points)

Étudier la nature des points stationnaires de la fonction définie par

$$f(x, y) = x^2y^2 - x^2 - y^2.$$

Exercice 4 (5 points)

1) La fonction $f(x, y) = 2xy + y^2$ est-elle continue ?

2) Trouver les points critiques de f ? Ces points critiques sont-ils des extremums locaux ?

3) La restriction de cette fonction à l'ensemble $\{(x, y) / 2x^2 + y^2 \leq 1\}$ est-elle bornée ? Atteint-elle ses bornes ?

4) Trouver les points de cet ensemble où f est maximum et minimum et les valeurs de ces maximum et minimum.