NOM : **PRÉNOM :**

DS 1

(Calculatrices et documents interdits)

Connaissances élémentaires (2 points)
Décomposer 224 en produit de facteurs premiers.
Une population augmente de 10% par an. Quel est son taux d'augmentation en trois ans ?

Question de cours (2 points)
Qu'est-ce qu'une partie ouverte de $\mathbb{R}^n$?
Soient D une partie de $\mathbb{R}^n$ et f une fonction définie sur D à valeurs réelles. Quand dit-on que f n'est pas bornée sur D ?

QCM (5 points)
Aucune justification de réponse n'est demandée. Un demi point par bonne réponse, zéro par absence de réponse, moins un demi par réponse incorrecte. **Entourer la bonne réponse.**

– L'ensemble $\{(x, y)\ /\ x^2 - 2y^2 \leq 1\}$ est une partie fermée de $\mathbb{R}^2$. Vrai Faux.
– L'ensemble $\{(x, y)\ /\ x^2 + 2y^2 \leq 1\}$ est une partie compacte de $\mathbb{R}^2$. Vrai Faux.
– Une fonction positive sur un ensemble fermé non vide a une borne inférieure. Vrai Faux.
– Une fonction positive sur un ensemble fermé non vide atteint sa borne inférieure. Vrai Faux.
– Une réunion de parties compactes de $\mathbb{R}^n$ est compacte.Vrai Faux.
– L'image d'une partie fermée de $\mathbb{R}^n$ par une fonction continue définie sur $\mathbb{R}^n$ est fermée. Vrai Faux.
– L'image réciproque d'un ensemble ouvert par une fonction continue définie sur $\mathbb{R}^n$ est ouverte. Vrai Faux.
– Si une partie de $\mathbb{R}^n$ est compacte, sa partie complémentaire n'est pas bornée. Vrai Faux.
– La frontière d'une partie de $\mathbb{R}^n$ est fermée. Vrai Faux.
– Une fonction continue sur une partie compacte de $\mathbb{R}^n$ est bornée sur cet ensemble. Vrai Faux.

Exemples (1 point)
Donner un exemple de partie de $\mathbb{R}^4$ qui ne soit ni ouverte ni fermée.

Dessin (2 points)
Dessiner le domaine du plan défini par $\{(x, y)\ /\ |xy| \leq 1\}$

Exercice 1 (3 points) Montrer *en utilisant la définition* que les ensembles suivants sont ouverts :
(a) $]-1, 1[\times]-1, 1[$,
(b) $\{(x, y)\ /\ x^2 + y^2 < 4\}$.

Exercice 2 (2 points)
Donner les coordonnées polaires de $(1, -2)$.
Donner les coordonnées sphériques de $(1, 2, 1)$.
(Dans les deux cas précisez quels intervalles vous choisissez pour définir les angles de vos coordonnées et donnez une réponse conforme à votre choix.)

Exercice 3 (3 points) Étudier la continuité en 0 de la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par :

$$f(x, y) = \frac{x^2 - 2y^2}{x^2 + y^2} \text{ si } (x, y) \neq 0,\ 0 \text{ si } (x, y) = 0.$$