**NOM :** **PRÉNOM :**

# DS 1

(Calculatrices et documents interdits)

**Connaissances élémentaires** (2 points)
Écrire 11 en base 2.
Une population augmente de 2,5% par an. En combien d'années doublera-t-elle ? (On demande la formule permettant de déterminer ce nombre).

**Question de cours** (2 points)
Soient $D$ une partie de $\mathbb{R}^n$ et $f$ une fonction définie sur $D$ à valeurs rélles. Quand dit-on que $f$ est minorée sur $D$ ?
Quand dit-on que $f$ est continue sur $D$ ?

**QCM** (5 points)
Aucune justification de réponse n'est demandée. Un demi point par bonne réponse, zéro par absence de réponse, moins un demi par réponse incorrecte. **Entourer la bonne réponse.**

– L'ensemble $\{(x, y) \ / \ xy \leq 1\}$ est une partie fermée de $\mathbb{R}^2$. Vrai Faux.
– L'ensemble $\{(x, y) \ / \ xy \leq 1\}$ est une partie compacte de $\mathbb{R}^2$. Vrai Faux.
– Si une partie de $\mathbb{R}^n$ n'est pas bornée, elle n'est pas compacte. Vrai Faux.
– Si une partie de $\mathbb{R}^n$ n'est pas ouverte, elle n'est pas fermée. Vrai Faux.
– Une fonction positive sur un ensemble ouvert non vide a une borne inférieure. Vrai Faux.
– Une fonction à valeurs réelles, continue sur une partie fermée de $\mathbb{R}^n$ est bornée. Vrai Faux.
– L'intersection de deux parties compactes de $\mathbb{R}^2$ est compacte. Vrai Faux.
– L'image réciproque d'une partie compacte par une fonction continue définie sur $\mathbb{R}^n$ est compacte. Vrai Faux.
– L'image réciproque d'un ensemble compact par une fonction continue définie sur $\mathbb{R}^n$ est fermée. Vrai Faux.
– Si un sous-ensemble de $\mathbb{R}^n$ est borné, son complémentaire n'est pas borné. Vrai Faux.

**Exemples** (1 point)
Donner un exemple d'une intersection de parties ouvertes de $\mathbb{R}^n$ qui ne soit pas ouverte.

**Dessin** (2 points)
Dessiner le domaine du plan définis par $\{(x, y) \ / \ |x| - |y| > 1\}$

**Exercice 1** (3 points) Montrer *en utilisant la définition* que les parties de $\mathbb{R}^n$ suivantes sont ouvertes :
(a) $]-\infty, 3[$,
(b) $\{(x, y) \ / \ (x-1)^2 + (y+1)^2 < 1\}$.

**Exercice 2** (2 points)
Donner les coordonnées polaires de $(-1, 2)$.
Donner les coordonnées sphériques de $(1, 1, 2)$.
(Dans les deux cas précisez quels intervalles vous choisissez pour définir les angles de vos coordonnées et donnez une réponse conforme à votre choix.)

**Exercice 3** (3 points) Étudier la continuité en 0 de la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par :

$$f(x, y) = \frac{x^2 y^2}{x^4 + 2x^2 y^2 + y^4} \text{ si } (x, y) \neq 0, \ 0 \text{ si } (x, y) = 0.$$