NOM : **PRÉNOM :**

DS 1

(Corrigé)

Connaissances élémentaires (2 points)
Écrire 11 en base 2.
En base 2, 11 s'écrit 1011.
Une population augmente de 2,5% par an. En combien d'années doublera-t-elle ? (On demande la formule permettant de déterminer ce nombre).
Chaque année la population est multipliée par 1,025. Elle aura donc doublée lorsque $1,025^n = 2$, c'est-à-dire pour $n = \frac{\log 2}{\log 1{,}025}$ (ou le premier entier supérieur à ce nombre).
Question de cours (2 points)
Soient D une partie de $\mathbb{R}^n$ et f une fonction définie sur D à valeurs rélles. Quand dit-on que f est minorée sur D ?
On dit que f est minorée sur D s'il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que, pour tout $x \in D$, $f(x) \geq M$.
Quand dit-on que f est continue sur D ?
On dit que f est continue sur D si pour tout $x_0 \in D$ on a $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$ ce qui s'écrit formellement

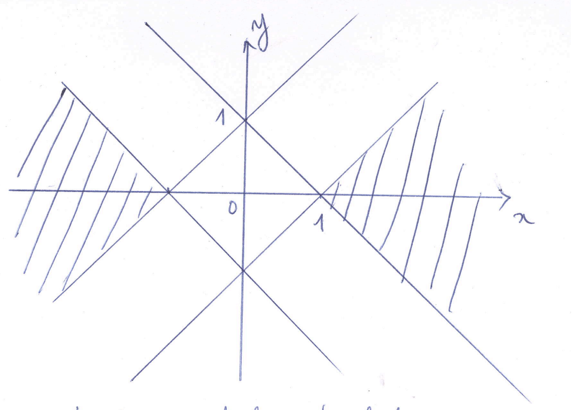
$$\forall x_0 \in D \forall \epsilon > 0 \;\; \exists \delta > 0 \;\; (x \in B(x_0, \delta) \cap D \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| \leq \epsilon).$$

QCM (5 points)
Aucune justification de réponse n'est demandée. Un demi point par bonne réponse, zéro par absence de réponse, moins un demi par réponse incorrecte. **Entourer la bonne réponse.**
– L'ensemble $\{(x, y) \;/\; xy \leq 1\}$ est une partie fermée de $\mathbb{R}^2$. Vrai.
– L'ensemble $\{(x, y) \;/\; xy \leq 1\}$ est une partie compacte de $\mathbb{R}^2$. Faux.
– Si une partie de $\mathbb{R}^n$ n'est pas bornée, elle n'est pas compacte. Vrai.
– Si une partie de $\mathbb{R}^n$ n'est pas ouverte, elle n'est pas fermée. Faux.
– Une fonction positive sur un ensemble ouvert non vide a une borne inférieure. Vrai.
– Une fonction à valeurs réelles, continue sur une partie fermée de $\mathbb{R}^n$ est bornée. Faux.
– L'intersection de deux parties compactes de $\mathbb{R}^2$ est compacte. Vrai.
– L'image réciproque d'une partie compacte par une fonction continue définie sur $\mathbb{R}^n$ est compacte.Faux.
– L'image réciproque d'un ensemble compact par une fonction continue définie sur $\mathbb{R}^n$ est fermée. Vrai.
– Si un sous-ensemble de $\mathbb{R}^n$ est borné, son complémentaire n'est pas borné. Vrai.

Exemples (1 point)
Donner un exemple d'une intersection de parties ouvertes de $\mathbb{R}^n$ qui ne soit pas ouverte.
Considérons par exemple les boules ouvertes $B(0, 1/k)$ lorsque k parcourt $\mathbb{N}^*$. Ce sont des ensembles ouverts. L'intersection de ces boules est réduite au point 0 et l'ensemble constitué uniquement de 0 n'est pas ouvert. Remarque : pour avoir un exemple il faut considérer une suite infinie d'ensemble car une intersection finie d'ensembles ouverts est ouvertes.

Dessin (2 points)
Dessiner le domaine du plan définis par $\{(x, y) \;/\; |x| - |y| > 1\}$

NOM : **PRÉNOM :**



Le domaine est la partie hachurée.
Les bords ne font pas partie du domaine.

Exercice 1 (3 points) Montrer *en utilisant la définition* que les parties de $\mathbb{R}^n$ suivantes sont ouvertes :
Dans les deux cas il s'agit de montrer que pour tout point de l'ensemble considéré, il existe une boule centrée en ce point et incluse dans l'ensemble.
(a) $]-\infty, 3[$,
Soit $x \in]-\infty, 3[$. Posons $r = 3 - x$. Alors $r > 0$ et si $y \in B(x, r)$ c'est-à-dire $x - r < y < x + r$, alors $y < x + 3 - x = 3$, autrement dit $y \in]-\infty, 3[$.
(b) $\{(x, y) \ / \ (x-1)^2 + (y+1)^2 < 1\}$.
Soit $(x_0, y_0) \in \{(x, y) \ / \ (x-1)^2 + (y+1)^2 < 1\}$. Posons $r = 1 - d((x_0, y_0), (1, -1))$. Alors $r > 0$ et si $(x, y) \in B((x_0, y_0), r)$, c'est-à-dire si $d((x, y), (x_0, y_0)) < r$, alors grâce l'inégalité triangulaire, on a

$$\begin{aligned} d((x,y),(1,-1)) &\leq d((x,y),(x_0,y_0)) + d((x_0,y_0),(1,-1)) \\ &< r + d((x_0,y_0),(1,-1)) = 1 - d((x_0,y_0),(1,-1)) + d((x_0,y_0),(1,-1)) = 1, \end{aligned}$$

autrement dit (x, y) appartient $\{(u, v) \ / \ (u-1)^2 + (v+1)^2 < 1\}$.

Exercice 2 (2 points)
Donner les coordonnées polaires de $(-1, 2)$.
$\rho = \sqrt{1 + 2^2} = \sqrt{5}$, $\theta = \arccos(-1/\sqrt{5})$ ($\theta \in [0, 2\pi[$).
Donner les coordonnées sphériques de $(1, 1, 2)$.
$\rho = \sqrt{1 + 1 + 2^2} = \sqrt{6}$, $\theta = \pi/4$, $\phi = \arccos(2/\sqrt{6})$ ($\theta \in [0, 2\pi[$, $\phi \in]0, \pi[$).
(Dans les deux cas précisez quels intervalles vous choisissez pour définir les angles de vos coordonnées et donnez une réponse conforme à votre choix.)

Exercice 3 (3 points) Étudier la continuité en 0 de la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par :

$$f(x, y) = \frac{x^2 y^2}{x^4 + 2x^2 y^2 + y^4} \text{ si } (x, y) \neq 0, \ 0 \text{ si } (x, y) = 0.$$

Pour tout $t \neq 0$, on a $f(t, t) = 1/4$, donc $\lim_{t \to 0} f(t, t) \neq f(0, 0)$ et f n'est pas continue en $(0, 0)$.