Exercice
Trouver les extrema locaux et globaux de la fonction ϕ

$$\phi(x,y,z) = xy + \exp(y^2 + 2yz - 4y - 4z)$$

sur l'ensemble

$$\{(x,y,z) \ / \ x \geq 0, \ y \geq 0, z \geq 0, \ x+y+z \leq 3\}.$$

Correction
Nous allons nous contenter de trouver les extrema globaux. C'est déjà pas mal de travail.

Recherche des extrema libres (à l'intérieur du domaine D)
Appelons D le domaine $\{(x,y,z) \ / \ x \geq 0, \ y \geq 0, z \geq 0, \ x+y+z \leq 3\}$.
Commençons par chercher les points critiques de la fonction. Le gradient de ϕ vaut

$$(y, x + (2y+2z-4)\exp(y^2+2yz-4y-4z), (2y-4)\exp(y^2+2yz-4y-4z)).$$

Pour qu'il soit nul il faut donc qu'on ait

$$y = 0, x + (2y+2z-4)\exp(y^2+2yz-4y-4z) = 0, (2y-4)\exp(y^2+2yz-4y-4z) = 0$$

soit

$$y = 0, x + (2z-4)\exp(-4z) = 0, -4\exp(-4z) = 0.$$

Or la fonction exponentielle ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$ donc l'égalité $-4\exp(-4z) = 0$ n'est jamais satisfaite. Le gradient de ϕ ne s'annulant pas, la fonction ϕ n'a pas d'extremum local à l'intérieur du domaine D.

La fonction atteint ses bornes sur D
Le domaine D est fermé (c'est l'intersection des quatre ensembles $\{(x,y,z) \ / \ x \geq 0\}$, $\{(x,y,z) \ / \ y \geq 0\}$, $\{(x,y,z) \ / \ \ z \geq 0\}$, $\{(x,y,z) \ / \ \ x+y+z \leq 3\}$ qui sont tous fermés comme images réciproques d'ensembles fermés par des fonctions continues) et borné (si (x,y,z) est dans le domaine les trois coordonnées sont comprise entre 0 et 3). L'ensemble D est donc un sous ensemble compact de $\mathbb{R}^3$.
Comme la fonction est continue sur $\mathbb{R}^3$ (c'est la somme de produits et composées de fonctions continues sur $\mathbb{R}^3$), sa restriction à au domaine compact D est bornée et atteint ses bornes. La fonction ϕ n'ayant pas de point critique elle ne peut pas atteindre ses bornes à l'intérieur du domaine. C'est donc sur le bord de D que ces bornes sont atteintes.

Le bord de D est constitué des différentes parties suivantes :
quatre parties planes :
$\{(x,y,z) \ / \ x = 0, \ y > 0, z > 0, \ x+y+z < 3\}$
$\{(x,y,z) \ / \ x > 0, \ y = 0, z > 0, \ x+y+z < 3\}$
$\{(x,y,z) \ / \ x > 0, \ y > 0, z = 0, \ x+y+z < 3\}$
$\{(x,y,z) \ / \ x > 0, \ y > 0, z > 0, \ x+y+z = 3\}$
six parties linéaires :
$\{(x,y,z) \ / \ x = 0, \ y = 0, z > 0, \ x+y+z < 3\} = \{(0,0,z) \ / \ 0 < z < 3\}$
$\{(x,y,z) \ / \ x = 0, \ y > 0, z = 0, \ x+y+z < 3\} = \{(0,y,0) \ / \ 0 < y < 3\}$

$\{(x,y,z)\ /\ x=0,\ y>0, z>0,\ x+y+z=3\} = \{(0,y,3-y)\ /\ 0<y<3\}$
$\{(x,y,z)\ /\ x>0,\ y=0, z=0,\ x+y+z<3\} = \{(x,0,0)\ /\ 0<x<3\}$
$\{(x,y,z)\ /\ x>0,\ y=0, z>0,\ x+y+z=3\} = \{(x,0,3-x)\ /\ 0<x<3\}$
$\{(x,y,z)\ /\ x>0,\ y>0, z=0,\ x+y+z=3\} = \{(3-y,y,0)\ /\ 0<y<3\}$
quatre sommets :
$(0,0,0)$
$(3,0,0)$
$(0,3,0)$
$(0,0,3)$

Étude sur les faces
Grâce au théorème des extrema liés on sait que pour que ϕ ait un extremum sur l'une des parties planes il faut que le gradient de ϕ et celui de la fonction contrainte soient colinéaires.
• $\{(x,y,z)\ /\ x=0,\ y>0, z>0,\ x+y+z<3\}$
La condition est que $(1,0,0)$ et $(y, x+(2y+2z-4)\exp(y^2+2yz-4y-4z), (2y-4)\exp(y^2+2yz-4y-4z))$ soient colinéaires. La nullité de la troisième coordonnée impose $y=2$. En remplaçant y par 2 et x par 0 dans la deuxième coordonnée on doit donc aussi avoir $0 = 2z\exp(4+4z-8-4z) = 2\exp(-4)z$ soit $z=0$. Or on s'est placé sur $z>0$.
• $\{(x,y,z)\ /\ x>0,\ y=0, z>0,\ x+y+z<3\}$
La condition est que $(0,1,0)$ et $(y, x+(2y+2z-4)\exp(y^2+2yz-4y-4z), (2y-4)\exp(y^2+2yz-4y-4z))$ soient colinéaires. La nullité des première et troisième coordonnées impose les égalités $y=0$ et $y=2$. Elles ne sont pas simultanément satisfaites. La fonction ϕ n'a donc pas d'extremum sur la face $\{(x,y,z)\ /\ x>0,\ y=0, z>0,\ x+y+z<3\}$.
• $\{(x,y,z)\ /\ x>0,\ y>0, z=0,\ x+y+z<3\}$
La condition est que $(0,0,1)$ et $(y, x+(2y+2z-4)\exp(y^2+2yz-4y-4z), (2y-4)\exp(y^2+2yz-4y-4z))$ soient colinéaires. Pour que ce soit le cas il faut que y soit nul. Or on s'est placé sur $y>0$.
• $\{(x,y,z)\ /\ x>0,\ y>0, z>0,\ x+y+z=3\}$
La condition est que $(1,1,1)$ et $(y, x+(2y+2z-4)\exp(y^2+2yz-4y-4z), (2y-4)\exp(y^2+2yz-4y-4z))$ soient colinéaires autrement dit que les coordonnées de $(y, x+(2y+2z-4)\exp(y^2+2yz-4y-4z), (2y-4)\exp(y^2+2yz-4y-4z))$ soient toutes égales. On a donc $y=(2y-4)\exp(y^2+2yz-4y-4z))$ (en particulier $(2y-4)>0$) et $y = x+y+2z\exp(y^2+2yz-4y-4z) = x+y+2zy/(2y-4)$ soit $0 = x+2zy/(2y-4)$ ce qui est impossible pour $x>0$, $y>0$, $z>0$ et $(2y-4)>0$.

Étude sur les arêtes
• $\{(0,0,z)\ /\ 0<z<3\}$
$\phi(0,0,z) = \exp(-4z)$: la fonction est strictement décroissante sur l'arête de 1 au sommet $(0,0,0)$ à $\exp(-12)$ au sommet $(0,0,3)$.
• $\{(0,y,0)\ /\ 0<y<3\}$
$\phi(0,y,0) = \exp(y^2-4y)$: la fonction est décroissante sur la partie de l'arête pour y de 0 à 2 puis croissante pour y allant de 2 à 3. Les valeurs extrêmes sont 1 au sommet $(0,0,0)$, $\exp(-4)$ en $(0,2,0)$ et $\exp(-3)$ au sommet $(0,3,0)$.
• $\{(x,0,0)\ /\ 0<x<3\}$

$\phi(x,0,0)=1$
• $\{(0,y,3-y)\ /\ 0<y<3\}$
$\phi(0,y,3-y)=\exp(y^2+2y(3-y)-4y-4(3-y))=\exp(-y^2+6y-12)$. La fonction exp étant croissante les variations sont les mêmes que celles de $-y^2+6y-12$ c'est-à-dire croissance sur l'arête de $\exp(-12)$ au sommet $(0,0,3)$ à $\exp(-3)$ au sommet $(0,3,0)$.
• $\{(x,0,3-x)\ /\ 0<x<3\}$
$\phi(x,0,3-x)=\exp(-12+4x)$: la fonction est strictement croissante de $\exp(-12)$ au sommet $(0,0,3)$ à 1 au sommet $(3,0,0)$.
• $\{(3-y,y,0)\ /\ 0<y<3\}$
$\phi(3-y,y,0)=y(3-y)+\exp(y^2-4y)$. Pour étudier les variations de ϕ sur cette dernière arête, dérivons $y(3-y)+\exp(y^2-4y)$. On trouve : $3-2y+(2y-4)\exp(y^2-4y)$. Cette dérivée vaut -1 en 0 et $-3+2\exp(-3)$. On peut l'écrire sous la forme $-1+4-2y+(2y-4)\exp(y^2-4y)=-1+(2y-4)[\exp(y^2-4y)-1]$. Cette fonction est croissante sur $[2,3]$ (car sur $[2,3]$ $(2y-4)$ et $\exp(y^2-4y)$ sont positives et croissantes) vaut -1 en 2 et $-3+2\exp(-3)<0$ en 3. Avant 2, $(2y-4)\exp(y^2-4y)$ est négatif et après $3/2$ $3-2y$ est négatif. On en déduit que $y\mapsto\phi(3-y,y,0)$ est décroissante pour y allant de $3/2$ à 3. En $(3/2,3,2,0)$ la fonction vaut $(3/2)^2+\exp(9/4-6)$. Cette valeur est supérieur à 1 la valeur en $(3,0,0)$. Résumons ce qui a été dit jusqu'à maintenant : $y\mapsto\phi(3-y,y,0)$ est décroissante près de 0, décroissante après $3/2$ et que sa valeur en $3/2$ est supérieure à celle en 0. On en déduit que $y\mapsto\phi(3-y,y,0)$ atteint son maximum quelque part entre 0 et $3/2$. Dérivons maintenant une fois de plus $y\mapsto\phi(3-y,y,0)$. On obtient :

$$2[\exp(y^2-4y)-1]+(2y-4)^2\exp(y^2-4y)=(2+(2y-4)^2)\exp(y^2-4y)-2.$$

Cette dérivée seconde vaut 16 en 0 et $2(\exp(-3)-1)<0$ en 2. Elle s'annule entre 0 et 2. Si on dérive une fois de plus on obtient

$$(2(2y-4)+(2+(2y-4)^2)(2y-4))\exp(y^2-4y).$$

Cette dérivée troisième est toujours négative entre 0 et 2 (car 2y-4<0 entre 0 et 2). On en déduit donc que la dérivée seconde est strictement décroissante sur $[0,2]$. Elle s'annule donc une seule fois. La dérivée première est donc croissante puis décroissante sur $[0,2]$. Comme elle est négative en 0 et en 2 et prend des valeurs positives (en 0,5 par exemple), elle s'annule deux fois sur $[0,2]$. Le maximum de la fonction est atteint au deuxième nombre dans $[0,2]$ en lequel la dérivée s'annule. Ce nombre n'est pas exprimable simplement. Appelons-le y_0. Une machine en donne une valeur approchée si on le souhaite.

Conclusion
Sur le domaine la fonction atteint son maximum global en $(3-y_0,y_0,0)$ et son minimum $(\exp(-12))$ en $(0,0,3)$.

Ci-dessous la courbe représentative de la fonction apparaissant sur l'arête $\{(3-y, y, 0) \ / \ 0 < y < 3\}$.