

Cours de LICENCE 2

VAR : Fonctions de plusieurs variables, intégrales multiples, courbes paramétrées

Ce polycopié, y compris le recueil d'exercices, a été écrit par Jacques Rolland (révisé par Bert Wiest)

Première partie : Calcul différentiel

Chapitre 1 : Géométrie de \mathbb{R}^n

1 – Produit scalaire, norme et distance dans \mathbb{R}^n

Définition

Si $X = (x_1 \dots x_n)$ et $Y = (y_1 \dots y_n)$ sont deux vecteurs de \mathbb{R}^n , on définit leur **produit scalaire** par :

$$X \cdot Y = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n$$

Définition

On appelle **norme** de X (ou longueur) $\|X\| = (X \cdot X)^{1/2}$ et la **distance** entre deux vecteurs $d(X, Y) = \|X - Y\|$.

Proposition

On a les propriétés suivantes :

- (1) $X \cdot Y = Y \cdot X$
- (2) $X \cdot (Y + Z) = X \cdot Y + X \cdot Z$
- (3) $(\alpha X) \cdot Y = \alpha(X \cdot Y)$
- (4) $X \cdot X \geq 0$ avec $X \cdot X = 0$ si et seulement si $X = 0$

Théorème

Le produit scalaire vérifie l'**inégalité de Cauchy-Schwarz** $(X \cdot Y)^2 \leq \|X\|^2 \|Y\|^2$ avec égalité si et seulement si X et Y sont colinéaires.

Théorème

La norme définie précédemment s'appelle **norme euclidienne** et vérifie :

- (i) $\|X\| = 0$ si et seulement si $X = 0$
- (ii) $\|X\| > 0$ si $X \neq 0$
- (iii) $\|\alpha X\| = |\alpha| \|X\|$
- (iv) $\|X + Y\| \leq \|X\| + \|Y\|$

Définition

L'**angle** entre deux vecteurs non nuls est $\theta \in [0, \pi]$ vérifiant $\cos \theta = \frac{X \cdot Y}{\|X\| \|Y\|}$.

Définition

X et Y de \mathbb{R}^n sont **orthogonaux** si et seulement si $X \cdot Y = 0$.

Définition (plan dans \mathbb{R}^3)

Soient $A = (x_0, y_0, z_0)$ un point de \mathbb{R}^3 et $N = (a, b, c)$ un vecteur non nul.

Le plan passant par A et orthogonal à N est $P = \{X \in \mathbb{R}^3 / (X - A) \cdot N = 0\}$.

2 – Produit vectoriel dans \mathbb{R}^3

Définition

Si $X = (x_1, x_2, x_3)$ et $Y = (y_1, y_2, y_3)$ sont deux vecteurs de \mathbb{R}^3 , on définit le **produit vectoriel** de X et de Y par : $X \wedge Y = (x_2 y_3 - x_3 y_2, x_3 y_1 - x_1 y_3, x_1 y_2 - y_1 x_2)$.

Aide mémoire : cela "vaut" $\det \begin{pmatrix} i & j & k \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{pmatrix}$.

Théorème

On a les propriétés suivantes :

- (1) $X \wedge Y = -Y \wedge X$
- (2) $X \wedge (Y + Z) = X \wedge Y + X \wedge Z$
- (3) $\alpha X \wedge Y = X \wedge \alpha Y = \alpha(X \wedge Y)$
- (4) $X \cdot (X \wedge Y) = 0$ et $Y \cdot (X \wedge Y) = 0$
- (5) $\|X \wedge Y\|^2 = \|X\|^2 \|Y\|^2 - (X \cdot Y)^2$ (identité de Lagrange)

Interprétation géométrique de $X \wedge Y$

$\|X \wedge Y\| = \|X\| \|Y\| \sin \theta$ est l'aire du **parallélogramme** engendré par X et Y .

Chapitre 2 : Courbes paramétrées

1 – Définition

Une fonction $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ s'appelle fonction vectorielle ou **courbe paramétrée**. On exprime $F(t)$ à l'aide des fonctions coordonnées $F(t) = (f_1(t), \dots, f_n(t))$.

Exemples

- (1) $F(t) = (x_0 + ta, y_0 + tb, z_0 + tc)$
- (2) $F(t) = (R \cos t, R \sin t)$

2 – Limite – Continuité – Dérivation

Définition

Soit $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$.

- (1) $\lim_{t \rightarrow p} F(t) = \left(\lim_{t \rightarrow p} f_1(t), \dots, \lim_{t \rightarrow p} f_n(t) \right)$
- (2) $F'(t) = (f_1'(t), \dots, f_n'(t))$
- (3) $\int_a^b F(t) dt = \left(\int_a^b f_1(t) dt, \dots, \int_a^b f_n(t) dt \right)$

Théorème

Si $F, G : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ et $u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sont dérivables alors :

- (i) $(F + G)'(t) = F'(t) + G'(t)$
- (ii) $(uF)'(t) = u'(t)F(t) + u(t)F'(t)$
- (iii) $(F \cdot G)'(t) = F'(t) \cdot G(t) + F(t) \cdot G'(t)$
- (iv) $(F \wedge G)'(t) = F'(t) \wedge G(t) + F(t) \wedge G'(t)$ si $n = 3$
- (v) $F(u(t))' = F'(u(t)) \cdot u'(t)$

Corollaire

Si une courbe paramétrée $F(t)$ est dérivable et si $\|F(t)\|$ est constante alors $F(t) \cdot F'(t) = 0$. (Autrement dit, si la courbe $F(t)$ est sur une sphère centrée en 0, alors $F(t)$ et $F'(t)$ sont orthogonaux).

Exemple

$F(t) = (\cos t, \sin t)$

3 – Etude géométrique de $F'(t)$: tangente

Définition

Si $F(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))$ est dérivable et $F'(t) \neq 0$, on voit que $F'(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(t+h) - F(t)}{h}$.

Définition

Soit C la courbe tracée par F . Si $F'(t_0) \neq 0$ alors la droite passant par $F(t_0)$ de vecteur directeur $F'(t_0)$ est appelée **droite tangente** à $F(t_0)$ est un vecteur tangent à C en $F(t_0)$.

4 – Longueur d'une courbe

Définition

La **longueur de l'arc** de la courbe $F(t)$ entre $t = a$ et $t = b$ est donnée par $\int_a^b \|F'(t)\| dt$.

5 – Paramétrisation unitaire – Courbure

Cas $n = 3$

Soit $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ une courbe paramétrée.

On suppose que les dérivées $\gamma^{(n)}$ existent pour tout n et que $\gamma'(t) \neq 0$ pour tout t .

On dit que γ est **régulière**.

Alors :

(i) $S(t) = \int_{t_0}^t \|\gamma'(u)\| du$ est la longueur de l'arc entre t_0 et t .

(ii) $\frac{dS}{dt} = \|\gamma'(t)\| > 0$

De ce qui précède découle :

Définition

$t \rightarrow s(t)$ admet une fonction réciproque $s \rightarrow t(s)$ avec $t'(s) = \frac{1}{\|\gamma'(t(s))\|}$.

On note $\Gamma(s)$ la fonction $\Gamma(s) = \gamma(t(s))$ et on l'appelle **paramétrisation unitaire** de γ car on a $\|\Gamma'(s)\| = 1$.

Définition

La courbure de $\Gamma(s)$ est donnée par $\rho(s) = \|\Gamma''(s)\|$.

Proposition

Si γ n'est pas une paramétrisation unitaire alors la **courbure** est donnée par $\rho(t) = \frac{\|\gamma'(t) \wedge \gamma''(t)\|}{\|\gamma'(t)\|^3}$.

Chapitre 3 : Fonctions de plusieurs variables

1 – Définitions

Définition

Une fonction f de D dans \mathbb{R} (où D est un sous-ensemble de \mathbb{R}^n) s'appelle fonction numérique de n variables. D est le domaine de définition de f .

$\{f(x) / x \in D\}$ est l'image de f .

$\{(x, f(x)) / x \in D\} \subseteq \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ est appelé graphe de f .

Exemples

$$f(x, y) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$f(x, y, z) = \text{Ln}(1 - x^2 - y^2 - z^2)$$

$$f(x, y) = \sqrt{y^2 - x^2}$$

2 – Représentation géométrique

- Cas d'une fonction de deux variables $f(x, y)$
 - a) On considère le graphe $G(f) = \{(x, y, f(x, y)) / (x, y) \in \mathbb{C}\} \subseteq \mathbb{R}^3$.
Exemple : $f(x, y) = x^2 + y^2$.
Le graphe est un parabolôïde de révolution.
 - b) On considère les courbes de niveau $\{(x, y) \in D / f(x, y) = C\}$.
Dans l'exemple précédent, les courbes de niveau sont les cercles $\{(x, y) / x^2 + y^2 = C \geq 0\}$.
- Cas d'une fonction de plus de deux variables
Le graphe étant dans \mathbb{R}^4 , on ne peut le dessiner.
Si $n = 3$, on utilise les surfaces de niveau $\{(x, y, z) \in D / f(x, y, z) = C\}$.
Exemple : $f(x, y, z) = \sin(x^2 + y^2 + z^2)$.

3 – Etude de certaines surfaces quadratiques

On considère le graphe du polynôme quadratique de la forme $z = Lx^2 + 2Mxy + Ny^2$.

Exemple : $z = x^2 + y^2$

$$z = ax^2 + by^2, \quad a > 0 \text{ et } b > 0$$

$$z = x^2 - y^2$$

Proposition

Il existe des coordonnées orthogonales X, Y, Z dans lesquelles $Z = k_1 X^2 + k_2 Y^2$.

Chapitre 4 : Fonctions continues de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R}

1 – Topologie de \mathbb{R}^n

Définition

Soient $a \in \mathbb{R}^n$ et $r > 0$.

On appelle $B(a, r) = \{x \in \mathbb{R}^n / \|x - a\| < r\}$ la **boule ouverte** de centre a et de rayon r .

Exemple

Dans \mathbb{R} , \mathbb{R}^2 ou \mathbb{R}^3 on retrouve les intervalles, les disques, les boules ouvertes.

Proposition

Soient $A \subset \mathbb{R}^n$, $a \in \mathbb{R}^n$.

Alors une des trois conditions suivantes est vérifiée :

- (i) $\exists r > 0$ tel que $B(a, r) \subset A$
- (ii) $\exists r > 0$ tel que $B(a, r) \subset A^c$ où $A^c = \mathbb{R}^n \setminus A$
- (iii) $\forall r > 0$, $B(a, r)$ contient des points de A et de A^c .

Définition

L'**intérieur** de A (noté $\text{int}(A)$ ou $\overset{\circ}{A}$) est l'ensemble des points de \mathbb{R}^n vérifiant (i).

L'**extérieur** de A (noté $\text{ext } A$) est l'ensemble des points de \mathbb{R}^n vérifiant la condition (ii).

La **frontière** de A (notée ∂A) est l'ensemble des points de \mathbb{R}^n vérifiant la condition (iii).

La **fermeture** de A (notée \overline{A}) est la réunion de A et de ∂A .

Exemples dans \mathbb{R}^2

$$A = \{x \in \mathbb{R}^2 / \|x\| < 1\}$$

$$A = \{(n, 0) / n \in \mathbb{Z}\}$$

Définition

Un ensemble A de \mathbb{R}^n est :

- (i) **ouvert** si $\forall a \in A$, $\exists r > 0$ tel que $B(a, r) \subset A$
- (ii) **fermé** si A^c est ouvert.

Proposition

A est ouvert si et seulement si $\overset{\circ}{A} = A$.

A est fermé si et seulement si $\overline{A} = A$.

Exemples

$A_1 = \{(x, y) / x^2 + y^2 < 1\}$ est ouvert.

$A_2 = \{(x, y) / x^2 + y^2 \leq 1\}$ est fermé.

$A_3 = A_1 \cup \{(1, 0)\}$ n'est ni ouvert ni fermé.

$]0, 1[\subset \mathbb{R}$ est ouvert dans \mathbb{R} .

$]0, 1[\times \{0\} \subset \mathbb{R}^2$ n'est ni ouvert ni fermé.

$[0, 1] \subset \mathbb{R}$ est fermé dans \mathbb{R} .

$[0, 1] \times \{0\} \subset \mathbb{R}^2$ est fermé dans \mathbb{R}^2 .

Proposition

1. \mathbb{R}^n et \emptyset sont ouverts (et donc aussi fermés).
2. Toute réunion d'ouverts est un ouvert.
3. Toute intersection finie d'ouverts est un ouvert.

2 – Suites dans \mathbb{R}^n

Définition

Une suite $(X_p)_{p \in \mathbb{N}}$ **converge** dans \mathbb{R}^n vers $b \in \mathbb{R}^n$ si $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}$ tel que $p \geq N$ entraîne $\|X_p - b\| < \varepsilon$.

Remarques

1. On dit que b est **la limite** de la suite (X_p) et on note $X_p \rightarrow b$.
2. $X_p \rightarrow b$ si et seulement si $\forall \varepsilon > 0$ la boule $B(b, \varepsilon)$ contient toute la suite sauf un nombre fini de X_p .

Proposition

A est fermé si et seulement si pour toute suite convergente contenue dans A et convergente, la limite est dans A .

3 – Limite et continuité de fonctions

Définition

Une fonction $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ (où $D \subset \mathbb{R}^n$) a pour limite b en X_0 si $X_0 \in \overline{D}$ et si $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ tel que :
 $X \in D, \|X - X_0\| < \delta \Rightarrow |f(X) - b| < \varepsilon$.

Notation

Dans ce cas $b = \lim_{X \rightarrow X_0} f(X)$.

Définition

- (i) $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ est **continue en** $X_0 \in D$ si et seulement si $\lim_{X \rightarrow X_0} f(X) = f(X_0)$.
- (ii) f est **continue sur** D si et seulement si elle est continue en tout point de D .

Théorème

Si f et g sont continues alors $f + g, fg, \frac{f}{g}$ et $f \circ g$ sont continues lorsqu'elles sont définies.

Exemples

$f(x, y) = e^{xy}$ continue sur \mathbb{R}^2

$f(x, y) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ continue sur $\mathbb{R}^2 \setminus 0$

Théorème

Soit $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$. Les propositions suivantes sont équivalentes :

- (i) f est continue sur \mathbb{R}^n .
- (ii) $\forall b \in \mathbb{R}, \forall X_p$ avec $X_p \rightarrow b$ on a : $f(X_p) \rightarrow f(b)$ dans \mathbb{R} .
- (iii) $\forall \theta$ ouvert de $\mathbb{R}, f^{-1}(\theta) = \{X \in \mathbb{R}^n / f(X) \in \theta\}$ est un ouvert de \mathbb{R}^n .
- (iv) $\forall F$ fermé de $\mathbb{R}, f^{-1}(F) = \{X \in \mathbb{R}^n / f(X) \in F\}$ est un fermé de \mathbb{R}^n .

Exemples

$f(x, y) = -x^2 + y$

$f(x, y, z) = x^2 - y^2 + z^2 + 1$

Remarque

Si $D \neq \mathbb{R}^n$, il faut modifier les points (iii) et (iv), et dire que $f^{-1}(\theta)$ est un ouvert de D et $f^{-1}(F)$ est un fermé de D .

Chapitre 5 : Ensembles compacts

1 – Rappels

Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continue. Alors :

- (i) f est bornée sur $[a, b]$ s'il existe $M > 0$ tel que pour tout $x \in [a, b]$, $|f(x)| \leq M$.
- (ii) f atteint ses bornes inférieure et supérieure s'il existe c et d dans $[a, b]$ tel que $f(c) = \inf f(x)$ et $f(d) = \sup f(x)$.

Ceci n'est pas toujours vrai sur des intervalles de type $[a, b[$ non fermé.

2 – Généralisation

Définition

$X \subset \mathbb{R}^n$ est compact si X est fermé et borné (borné veut dire qu'il existe $R > 0$ tel que $X \subset B(0, R)$).

Exemples

Théorème (Bolzano-Weierstrass)

Soit $X \subset \mathbb{R}^n$ compact.

Alors toute suite $(x_n) \subset X$ contient une sous-suite x_{n_k} qui converge vers un point de X .

Remarque

La réciproque de ce théorème est vraie.

3 – Fonctions continues sur un ensemble compact

Théorème

Soit $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ (avec X compact) continue. Alors :

- (i) f est bornée sur X .
- (ii) f atteint ses bornes inférieure et supérieure.

Définition

$f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ est uniformément continue si $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ tel que $\|x - y\| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$.

Théorème

Soit f continue de X dans \mathbb{R} avec X compact.

Alors f est uniformément continue sur X .

Chapitre 6 : Dérivées partielles

1 – Rappels

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

La dérivée de f en x , si elle existe, est : $f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$.

2 – Dérivée partielle

Définition

Soit $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$.

On définit la dérivée partielle de f par rapport à x_i par $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_1, \dots, x_i + h, x_{i+1}, \dots, x_n) - f(x_1, \dots, x_n)}{h}$ si cette limite existe.

Notation

Cela se note $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1, \dots, x_n)$, $f_{x_i}(x_1, \dots, x_n)$, $D_i f(x_1, \dots, x_n)$.

Dans le cas de deux variables on a :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h, y) - f(x, y)}{h}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{f(x, y+k) - f(x, y)}{k}$$

Exemple

(1) $f(x, y) = e^{xy^2}$

(2) $f(x, y) = x^2 + 3y^2 - 2xy$

(3) $f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$

(4) $f(x, y, z) = xy^2 + z$

3 – Interprétation géométrique

$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$ est la pente de la tangente à la courbe $z = f(x, y_0)$ en (x_0, y_0) .

4 – Gradient

Définition

Soit $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction ayant des dérivées partielles.

Son gradient en P , noté $\nabla f(P)$ est le vecteur $\nabla f(P) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(P), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(P) \right)$.

Exemple

(1) $f(x, y) = x^2 y^3$

(2) $f(x, y, z) = x^2 \sin(yz)$

Remarque

Le gradient peut être considéré comme un vecteur de \mathbb{R}^n mais aussi comme une matrice $1 \times n$.

Théorème

Si f et g sont deux fonctions de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R} avec des gradients, alors :

- (i) $\nabla(f + g) = \nabla f + \nabla g$
- (ii) $\nabla(cf) = c \nabla f$ où $c \in \mathbb{R}$

5 – Dérivées partielles et continuité

Une fonction peut avoir des dérivées partielles sans être continue!!

Exemples

(1) $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$

$$f(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 < y < x^2 \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$$

a des dérivées partielles en $(0, 0)$ mais n'y est pas continue.

(2) $f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{en } (0, 0) \end{cases}$

admet des dérivées partielles en tout point mais n'est pas continue en $(0, 0)$.

Pour "dépasser" cette difficulté, on définit la différentielle (ou dérivée totale) ou on considère les fonctions ayant des dérivées partielles continues encore appelées fonctions de classe \mathcal{C}^1 .

6 – Dérivation composée

Théorème

Si g est définie sur \mathbb{R} par $g(t) = f(r(t))$ où f est \mathcal{C}^1 de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R} et r dérivable de \mathbb{R} dans \mathbb{R}^n , alors g est dérivable et on a $g'(t) = \nabla f(r(t)) \cdot r'(t)$.

Exemple

$$f(x, y) = xy^2$$

$$r(t) = (t, t^2)$$

7 – Plan tangent

Définition

Soit la surface $z = f(x, y)$.

Le plan tangent à cette surface en (x_0, y_0, z_0) a pour équation :

$$(z - z_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0)$$

Exemple

La sphère $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

Définition

Le plan tangent à la surface S d'équation $f(x, y, z) = C$ en $P \in S$ est le plan passant par P et orthogonal à $\nabla f(P)$.

8 – Accroissements finis**Théorème**

Soient $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ de classe \mathcal{C}^1 , $X = (x_1, \dots, x_n)$, $H = (h_1, \dots, h_n)$.

Alors il existe $\theta \in]0, 1[$ tel que $f(X + H) - f(X) = \nabla f(X + \theta H) \cdot H$.

9 – Dérivée selon un vecteur**Définition**

Soient $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ de classe \mathcal{C}^1 et $V \in \mathbb{R}^n$.

La dérivée selon le vecteur V en X est définie par $D_V f(X) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(X + tV) - f(X)}{t}$.

Remarque

Si $V = e_i$, on retrouve $\frac{\partial f}{\partial x_i}$.

Proposition

On a $D_V f(X) = \nabla f(X) \cdot V$.

Interprétation géométrique du gradient

La variation de f est la plus forte dans la direction de $\nabla f(X)$.

Chapitre 7 : La différentielle

1 – Cas des fonctions d’une variable

(i) f est dérivable en X_0 si $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(X_0 + h) - f(X_0)}{h}$ existe.
Sa valeur ℓ est notée $f'(X_0)$.

(ii) On peut, de manière équivalente, écrire $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(X_0 + h) - f(X_0) - \ell h}{h} = 0$.

On remarque que $h \rightarrow L(h) = \ell h$ est une application linéaire de \mathbb{R} dans \mathbb{R} , que l’on appelle **différentielle** de f en X_0 et que l’on note $df(X_0)$.

(iii) Si f est dérivable en X_0 , alors pour h petit : $f(X_0 + h)$ est “voisin” de $f(X_0) + f'(X_0)h$.
Donc $h \rightarrow f(X_0) + f'(X_0)h$ est une application affine qui ”approche” $f(X_0 + h)$.

2 – Cas de fonctions de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R}

Définition

f est différentiable en X s’il existe une application linéaire $L : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ telle que :

$$\lim_{\|H\| \rightarrow 0} \frac{f(X + H) - f(X) - L(H)}{\|H\|} = 0$$

L’application L est la **différentielle de f en X** et se note $df(X)$.

Remarque

Comme dans le cas $n = 1$ on a $f(X + H)$ ”voisin” de $f(X) + df(X) \cdot H$, on a $f(X + H)$ est ”approché” par l’application affine $f(X) + df(X) \cdot H$.

La différentielle, lorsqu’elle existe, est unique.

Proposition 1

Si f est différentiable en X , alors ses dérivées partielles existent et on a :

$$\begin{aligned} df(X) \cdot H &= \frac{\partial f}{\partial x_1}(X) h_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(X) h_n \\ &= \nabla f \cdot H \end{aligned}$$

Remarque

La matrice de l’application linéaire $df(X)$ dans la base canonique est le gradient $\nabla f(X)$.

Proposition 2

Si f est différentiable en X alors f est continue en X .

Remarque

L’existence des dérivées partielles de f n’implique pas la différentiabilité.

Mais :

Théorème 1

Si f admet des dérivées partielles et si elles sont continues alors f est différentiable.

On dit que f est de classe \mathcal{C}^1 .

Exemples et utilisation

3 – Règle de différentiation

Proposition 3

Si f et g sont différentiables on a :

- (i) $d(f + g)(X) = df(X) + dg(X)$
- (ii) $d(\lambda f)(X) = \lambda df(X)$
- (iii) $d(fg)(X) = f(X) dg(X) + g(X) df(X)$
- (iv) $d\left(\frac{f}{g}\right)(X) = \frac{g(X) df(X) - f(X) dg(X)}{g^2(X)}$

4 – Remarques

Si $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ où U est un ouvert de \mathbb{R}^n , alors :

- (i) Si f est \mathcal{C}^1 sur U alors f est différentiable sur U et les dérivées $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ existent sur U .
Les réciproques ne sont pas vraies!!
- (ii) Si f est différentiable en $X_0 \in U$ alors l'application affine $A(H) = f(X_0) + df(X_0) \cdot H$ a pour graphe l'espace tangent au graphe de f en X_0 .

Exemple

Droite tangente

Plan tangent

5 – Dérivées partielles successives

Les dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1, \dots, x_n)$ sont des fonctions de x_1, \dots, x_n , et il arrive souvent qu'elles sont eux-mêmes dérivables.

Définition

On écrit, lorsqu'elle existe, $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial f}{\partial x_j} \right)$ et on dit qu'il s'agit d'une **dérivée partielle seconde** de f .

Exemple

$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto x^3 y^4$. Alors $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = 12x^2 y^3 = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y)$.

Théorème (Schwarz)

Si $\frac{\partial f}{\partial x_i}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$ existent et sont continues dans une boule autour de $(a_1 \dots a_n)$ alors :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(a)$$

Chapitre 8 : Formule de Taylor et extrema par les fonctions de deux variables

1 – Rappel

La recherche des **extrema locaux** pour une fonction d'une variable :

- (i) On recherche les points critiques ($f'(x) = 0$).
- (ii) On étudie la dérivée seconde f'' si a est un point critique et si
 - $f''(a) > 0$ il y a un minimum local,
 - $f''(a) < 0$ il y a un maximum local,
 - $f''(a) = 0$ il faut approfondir l'étude.

2 – Extrema locaux de $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$

On suppose f de classe \mathcal{C}^2 , c'est-à-dire que ses dérivées partielles jusqu'à l'ordre 2 existent et sont continues.

Définition

f a un **minimum** (resp. **maximum**) local en (x_0, y_0) s'il existe $\varepsilon > 0$ tel que : $\forall (x, y) \in B((x_0, y_0), \varepsilon)$ alors $f(x, y) \geq f(x_0, y_0)$ (resp. $f(x, y) \leq f(x_0, y_0)$).

Exemple

$$\begin{aligned} f(x, y) &= -x^2 - y^2 \\ f(x, y) &= x^2 + y^2 \\ f(x, y) &= x^2 - y^2 \end{aligned}$$

Proposition 1

Si f admet un **extremum local** en (x_0, y_0) alors $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0$.

Définition

Si en (x_0, y_0) on a $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0$ on dit que (x_0, y_0) est un **point critique**.

Remarque

Un extremum local est un point critique mais la réciproque n'est pas vraie.

3 – Formule de Taylor

Définition Soit $f(x, y)$ une fonction de classe \mathcal{C}^2 . La **matrice hessienne** de f en (x_0, y_0) est la matrice

$$\text{Hess}(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix}$$

$$\text{où } A = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0), \quad B = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0), \quad C = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0).$$

Exemple

Calculer la matrice Hessienne de $f(x, y) = 4xy - x^4 - y^4$.

Théorème 1 (Formule de Taylor à l'ordre 2, en $X = (x_0, y_0)$)

$$f(X + H) = f(X) + \nabla f(X) \cdot H + \frac{1}{2} H^t \text{Hess}(x_0, y_0) H + \|H\|^2 \varepsilon(H)$$

Théorème 2

Soient $f(x, y)$ de classe \mathcal{C}^2 et (x_0, y_0) un point critique. Soit $\Delta = AC - B^2 = \det(\text{Hess}(x_0, y_0))$. Alors :

- si $\Delta > 0$ et $A > 0$, f a un minimum local en (x_0, y_0)
- si $\Delta > 0$ et $A < 0$, f a un maximum local en (x_0, y_0)
- si $\Delta < 0$, f n'a ni maximum ni minimum, elle a un point selle
- si $\Delta = 0$ on ne peut conclure.

4 – Extrema de f sur un compact $K \subset \mathbb{R}^2$

Rappel

f étant continue sur un compact a des minima et maxima sur ce compact.

On procède de la manière suivante :

- (i) On cherche les points critiques et les extrema locaux dans $\text{Int}(K)$.
- (ii) On analyse f sur ∂K .

Exemple

Etude de $f(x, y) = x^2 - y^2$ sur $K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 \leq 1\}$.

5 – Extrema liés (multiplicateur de Lagrange)

Il s'agit de trouver les extrema de $f(x, y, z)$ lorsque (x, y, z) appartient à une surface S définie par $g(x, y, z) = C$.

Exemple

Maximiser $x^2 y^2 z^2$ lorsque $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

Définition

Un point $P = (x_0, y_0, z_0)$ est un minimum (resp. maximum) local pour f , lié à la contrainte $g(x, y, z) = C$ si :

- (i) $g(P) = C$
- (ii) Il existe $\varepsilon > 0$ tel que $f(P) \leq f(Q)$ (resp. $f(P) \geq f(Q)$) pour tout $Q \in S \cap B(P, \varepsilon)$.

Théorème (de Lagrange)

Soit $f(x, y, z)$ et $g(x, y, z)$ de classe \mathcal{C}^1 telle que $\nabla g \neq 0$ sur S .

Alors si f admet un **extrema lié** en (x_0, y_0, z_0) on a : $\nabla f(x_0, y_0, z_0) = \lambda \nabla g(x_0, y_0, z_0)$ où $\lambda \in \mathbb{R}$ est appelé multiplicateur de Lagrange.

Remarque

Si P est un extremum lié, on a $\nabla f(P)$ parallèle à $\nabla g(P)$.

La réciproque n'est pas vraie.

Exemple

Sur l'exemple précédent on montre la méthode de résolution.

Chapitre 9 : Etude de fonctions de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R}^m

1 – Quelques exemples

1. De \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R}^2 :

(a) $F(x, y) = (e^x \cos y, e^x \sin y)$

(b) $F(r, \theta) = (r \cos \theta, r \sin \theta)$

2. De \mathbb{R}^3 dans \mathbb{R}^3 : $F(X) = \frac{X}{\|X\|}$.

3. De \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R}^3 : $F(x, y) = (x, y, x^2 + y^2)$.

4. De \mathbb{R}^n dans \mathbb{R}^m linéaire : $F(x_1 \dots x_n) = A(x_1 \dots x_n)$ où A est une matrice n colonnes et m lignes.
On peut exprimer F en termes de composantes $F(x_1 \dots x_n) = (f_1(x_1 \dots x_n), \dots, f_m(x_1 \dots x_n))$.

2 – Limite et continuité

Dans l'espace d'arrivée \mathbb{R}^m on remplace les habituelles valeurs absolues par des normes.

3 – Différentielle

Définition

F de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R}^m est **différentiable** en $X \in \mathbb{R}^n$ s'il existe une **application linéaire** L de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R}^m telle que :

$$\lim_{\|H\| \rightarrow 0} \frac{F(X+H) - F(X) - L \cdot H}{\|H\|} = 0.$$

L est la **différentielle** de F en X et se note : $dF(X)$.

Théorème 1

F est différentiable en X si et seulement si ses composants sont différentiables et on a :

$$dF(X) \cdot H = (\nabla f_1(X) \cdot H, \dots, \nabla f_m(X) \cdot H).$$

Définition

La matrice

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(X) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(X) \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(X) & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(X) \end{bmatrix}$$

est la matrice de $dF(X)$ et est appelée **matrice jacobienne** de F en X et se note : $J(F)(X)$.

Théorème 2

Si F a des composantes de classe \mathcal{C}^1 alors elles sont différentiables et F est également différentiable.

Exemple

- (i) Trouver la matrice jacobienne de F en $(1, 1)$ de : $F(x, y) = (x^2 + y^2, e^{xy})$.
- (ii) Trouver la différentielle de $F(x, y, z) = (x, y, z)$.
- (iii) Trouver la différentielle de $F(r, \theta) = (r \cos \theta, r \sin \theta)$.

4 – Propriétés de la différentielle**Proposition**

Si F de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R}^m est linéaire, alors $dF(X) = F$.

Proposition

Si F est différentiable en X alors F est continue en X .

5 – Différentielles des fonctions composées

Si F est une fonction de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R}^m , si G est une fonction de \mathbb{R}^m dans \mathbb{R}^q , alors $G \circ F$ est une fonction de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R}^q .

Théorème 3

Si F est différentiable en X , et si G est différentiable en $F(X)$, alors $G \circ F$ est différentiable en X et on a :

$$d(G \circ F)(X) = dG(F(X)) \circ dF(X).$$

Exemple

$$F(x, y) = (x^2 + y^2, e^{xy})$$

$$G(u, v) = (xy, \sin x, x^2 y)$$

Chapitre 10 : Fonctions implicites – Inversion locale

1 – Fonctions implicites : cas $f(x, y) = 0$

Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$. On considère la courbe de niveau $\{f(x, y) = 0\} = L_0$.

Définition

On dit que la fonction $y = \varphi(x)$ est **définie implicitement par** $f(x, y) = 0$ si $f(x, \varphi(x)) = 0$, c'est-à-dire si $(x, \varphi(x)) \in L_0$.

Alors on dit que $y = \varphi(x)$ est une **fonction implicite** de $f(x, y) = 0$.

Exemple

$$f(x, y) = \ln(xy) - \sin x \quad \text{avec } xy > 0$$

$$f(x, y) = x^2 + y^2 - 1$$

Théorème (des fonctions implicites)

Soient $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe \mathcal{C}^1 et (x_0, y_0) un point tel que $f(x_0, y_0) = 0$.

Si $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$ alors :

(i) Il existe une fonction implicite $y = \varphi(x)$ de classe \mathcal{C}^1 , définie sur l'intervalle ouvert $B(x_0, \varepsilon)$, tel que $f(x, \varphi(x)) = 0$ et $y_0 = \varphi(x_0)$.

(ii) La dérivée de φ est donnée par $\varphi'(x) = \frac{-\frac{\partial f}{\partial x}(x, \varphi(x))}{\frac{\partial f}{\partial y}(x, \varphi(x))}$ en tout point où $\frac{\partial f}{\partial y}(x, \varphi(x)) \neq 0$.

Exemple : étude au point $(1, 1)$ de $f(x, y) = x^2 y + 3y^3 x^4 - 4$

2 – Fonctions implicites : cas $f(x_1 \dots x_n) = 0$

Théorème

Si $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ est de classe \mathcal{C}^1 et si $\frac{\partial f}{\partial x_n}(X_0) \neq 0$ alors :

(i) La fonction implicite $x_n = \varphi(x_1 \dots x_{n-1})$ existe sur une boule ouverte $B((x_{1,0} \dots x_{n-1,0}), \varepsilon)$ et on a :
 $f(x_1 \dots x_{n-1}, \varphi(x_1 \dots x_{n-1})) = 0$.

(ii) $\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = \frac{-\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1 \dots x_{n-1}, \varphi(x_1 \dots x_{n-1}))}{\frac{\partial f}{\partial x_n}(x_1 \dots x_{n-1}, \varphi(x_1 \dots x_{n-1}))}$

3 – Inversion locale

Soient U un ouvert de \mathbb{R}^n , F une application de U dans \mathbb{R}^n et $V = F(U) \subset \mathbb{R}^n$.

Définition

F est **inversible** sur U s'il existe une application G de V dans \mathbb{R}^n telle que $G \circ F = \mathbf{1}_U$ et $F \circ G = \mathbf{1}_V$.

Exemples

- (1) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ avec $f(x) = x^3$
- (2) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ avec $f(x) = x^2$
- (3) Si $A \in \mathbb{R}^n$, soit F de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R}^n avec $F(X) = X + A$.
- (4) $U = \{(r, \theta) / r > 0, 0 < \theta < \pi\}$
 $F(r, \theta) = r \cos \theta, r \sin \theta$

Définition

F de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R}^n est **localement inversible** en $X \in \mathbb{R}^n$ s'il existe des ouverts U et V avec $X \in U$ et $F(X) \in V$ et $F(U) = V$ tel que F est inversible sur U .

Théorème (de l'inversion locale)

Soit F de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R}^n de classe \mathcal{C}^1 .

On a équivalence entre :

- (i) La matrice jacobienne $J_X(F)$ est inversible (c'est-à-dire $\det J_X(F) \neq 0$).
- (ii) F est localement inversible en X .

Chapitre 1 : Intégration des fonctions de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R}

1 – Rappel : Intégration des fonctions d'une variable

Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ bornée.

a) Cas où f est en escalier.

Il existe une partition $a = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n = b$ telle que f est constante sur chaque intervalle $]t_i, t_{i+1}[$ ($f(x) = C_i$).

Alors $\int_a^b f(t) dt = \sum_{i=0}^{n-1} C_i (t_{i+1} - t_i)$.

b) Si f est bornée on l'approche par des fonctions en escalier.

Définition

f est **intégrable** sur $[a, b]$ s'il existe un nombre unique I tel que pour toutes fonctions en escalier u, v sur $[a, b]$ vérifiant $u(x) \leq f(x) \leq v(x)$ on a :

$$\int_a^b u(x) dx \leq I \leq \int_a^b v(x) dx$$

et si pour tout $\varepsilon > 0$ il existe des fonctions en escalier u_ε et v_ε vérifiant :

$$u_\varepsilon(x) \leq f(x) \leq v_\varepsilon(x)$$

et

$$0 \leq \int_a^b v_\varepsilon(x) dx - \int_a^b u_\varepsilon(x) dx < \varepsilon$$

Notation : I s'appelle l'intégrale de f sur $[a, b]$ et se note $\int_a^b f(x) dx$.

2 – Intégration des fonctions de plusieurs variables

Soit $f : [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \dots \times [a_n, b_n] \rightarrow \mathbb{R}$.

Ici on considère le cas $R = [a, b] \times [c, d] \subset \mathbb{R}^2$.

a) f est en escalier.

Il existe une partition de $[a, b] \times [c, d]$:

$$a = s_0 < s_1 < s_2 < \dots < s_m = b$$

$$c = t_0 < t_1 < \dots < t_n = d$$

telle que f est constante à l'intérieur de chaque rectangle $]s_i, s_{i+1}[\times]t_j, t_{j+1}[$ (où elle vaut C_{ij}).

On définit $\iint_R f(x, y) dx dy = \sum_{i,j} C_{ij} (s_{i+1} - s_i) (t_{j+1} - t_j)$.

b) f est bornée sur $R = [a, b] \times [c, d]$.

On approche f par des fonctions en escalier.

Définition

f est **intégrable** sur R s'il existe un nombre unique I tel que pour toutes fonctions en escalier $u(x, y)$ et $v(x, y)$, telles que $u(x, y) \leq f(x, y) \leq v(x, y)$, on a :

$$\iint_R u(x, y) dx dy \leq I \leq \iint_R v(x, y) dx dy$$

et si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe des fonctions en escalier u_ε et v_ε telles que :

$$u_\varepsilon(x, y) \leq f(x, y) \leq v_\varepsilon(x, y)$$

et

$$0 \leq \iint_R v_\varepsilon(x, y) dx dy - \iint_R u_\varepsilon(x, y) dx dy < \varepsilon$$

Notation : I s'appelle l'intégrale de f sur R et se note $\iint_R f(x, y) dx dy$.

Proposition (Propriétés de l'intégrale double)

1. Si f est continue sur R alors f est intégrable.
2. Si f est positive sur R alors $\iint_R f(x, y) dx dy$ est le volume sous le graphe de f au-dessus de R .
3. $\iint_R (\alpha f + \beta g)(x, y) dx dy = \alpha \iint_R f(x, y) dx dy + \beta \iint_R g(x, y) dx dy$.
4. Si $R = R_1 \cup R_2$ avec $R_1 \cap R_2 = \emptyset$ alors :

$$\iint_R f(x, y) dx dy = \iint_{R_1} f(x, y) dx dy + \iint_{R_2} f(x, y) dx dy$$

Théorème

Si f est continue sur R alors $\iint_R f(x, y) dx dy$ existe.

3 – Calcul des intégrales doubles

Théorème de Fubini

Si f est continue sur $R = [a, b] \times [c, d]$ alors :

$$\iint_R f(x, y) dx dy = \int_a^b \left(\int_c^d f(x, y) dy \right) dx = \int_c^d \left(\int_a^b f(x, y) dx \right) dy$$

Exemple

- (1) $\iint_R (x^2 + y^2) dx dy$ $R = [0, 1] \times [0, 1]$
- (2) $\iint_R (1 + x + y) dx dy$ $R = [0, 1] \times [0, 1]$

Interprétation géométrique du théorème

Notion de volume sous une surface

4 – Intégration sur les régions bornées de \mathbb{R}^2

Soit $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ où $D \subset \mathbb{R}^2$ est non rectangulaire.

On considère un rectangle R tel que $D \subset R$ et on définit \bar{f} sur R avec :

$$\bar{f}(x, y) = \begin{cases} f(x, y) & \text{si } (x, y) \in D \\ 0 & \text{si } (x, y) \notin D \end{cases}$$

Définition

Avec les notations précédentes on pose, si cela a un sens :

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_R \bar{f}(x, y) dx dy$$

On peut se ramener à deux types de domaine D :

Type 1 : $D = \left\{ (x, y) \mid \begin{array}{l} a \leq x \leq b \\ g_1(x) \leq y \leq g_2(x) \end{array} \right\}$ où g_1 et g_2 sont continues.

Type 2 : $D = \left\{ (x, y) \mid \begin{array}{l} c \leq y \leq d \\ h_1(y) \leq x \leq h_2(y) \end{array} \right\}$.

Théorème de Fubini

a) Si f est continue sur D de type 1, alors f est intégrable et on a :

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_a^b \left(\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y) dy \right) dx$$

b) Si f est continue sur D de type 2, alors f est intégrable et on a :

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_c^d \left(\int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x, y) dx \right) dy$$

Exemples

(1) $\iint_D (x + 2y) dx dy$: D est la région entre les deux paraboles $y = 2x^2$ et $y = 1 + x^2$.

(2) $\iint_D e^{x^2} dx dy$ sur le triangle $D = \left\{ (x, y) \mid \begin{array}{l} 0 \leq x \leq 1 \\ 0 \leq y \leq x \end{array} \right\}$.

Définition

Si D est un domaine borné, on appelle **aire de D** : $\text{aire}(D) = \iint_D 1 dx dy$.

5 – Intégrale double et changement de variables

Rappel à une variable :

$$\int_a^b f(x) dx = \int_c^d f(g(t)) g'(t) dt$$

où g est bijection de $[c, d]$ sur $[a, b]$.

Proposition

Si $G(u, v) = (x(u, v), y(u, v))$:

$$\iint_{G(S)} f(x, y) dx dy = \iint_S f(x(u, v), y(u, v)) |\det \text{Jac}(G(u, v))| du dv$$

$$\text{avec } \text{Jac}(G(u, v)) = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix}.$$

Cas des coordonnées polaires

$$x = x(r, \theta) = r \cos \theta$$

$$y = y(r, \theta) = r \sin \theta$$

$$J(G) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta \\ \sin \theta & r \cos \theta \end{pmatrix}$$

$$\text{d'où } \iint_{R=G(S)} f(x, y) dx dy = \iint_S f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr d\theta.$$

Exemples

(1) Calcul de l'aire d'un disque.

(2) $\iint_D e^{(-x^2-y^2)} dx dy$ où D est le disque unité.

(3) $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$.

(4) $\iint_R e^{(y-x)/y+x} dx dy$ où $R = \begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$ avec $x + y \leq 2$.

6 – Justification du théorème de changement de coordonnées

7 – Intégrales triples

$$\iiint_R f(x, y, z) dx dy dz$$

Exemples

Changement de variables en dimension 3.

Chapitre 2 : Champs de vecteurs et intégrales curvilignes

1 – Définition

Définition

Soit $U \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert.

Un **champ de vecteurs** sur U est une application F de U dans \mathbb{R}^n de classe C^1 .

F associe à chaque point un vecteur.

Exemples

(1) $F(x, y) = (-y, x)$

(2) $F(x, y) = (1, 0)$

(3) $F(x, y, z) = (x, y, z)$

(4) $F(X) = \frac{X}{\|X\|}$ si $X \neq 0$

(5) Si f est une fonction de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R} , soit $F(x) = \nabla f(x)$.
Ce champ de vecteurs est appelé champ de gradients.

2 – Intégrale curviligne

Définition

Soient $r : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ une courbe paramétrée de classe C^1 et F un champ de vecteurs défini sur l'image de r (qui est une courbe C).

Alors on pose :

$$\int_C F dr = \int_a^b F(r(t)) \cdot r'(t) dt$$

Cette quantité s'appelle **intégrale curviligne** de F sur C .

Exemples

$r(t) = (t, t^n)$, $0 \leq t \leq 1$

$F(x, y) = (-y, x)$

Interprétation : notion de travail d'une force

Proposition

Les principales propriétés sont :

$$\int_C (aF_1 + bF_2) dr = a \int_C F_1 dr + b \int_C F_2 dr$$

Si C est paramétré dans un sens par r , dans l'autre par s , on a : $\int_C F dr = - \int_C F ds$.

Si $C = C_1 + C_2$ alors : $\int_C F dr = \int_{C_1} F dr + \int_{C_2} F dr$.

3 – Champs de gradient et indépendance de chemin

Définition

F champ de vecteurs est un **champ de gradient** s'il existe f de U dans \mathbb{R} telle que $F = \nabla f$.

Exemple

$$F(x, y) = (y, x)$$

Théorème 1

Si F est un champ de gradient alors $\int_C F dr$ ne dépend que des extrémités de C .

Théorème 2

On a équivalence entre :

- F est un champ de gradient.
- $\int_C F dr$ ne dépend que des extrémités de C et ceci pour tout chemin de C .

Proposition

Si $F = (F_1, F_2, \dots, F_n)$ est un champ de gradient alors :

$$\forall i, \forall j, \quad \frac{\partial F_i}{\partial x_j} = \frac{\partial F_j}{\partial x_i}$$

Théorème 3

Soit F un champ de vecteurs sur U .

Si U est un ouvert étoilé alors F est un champ de gradient si et seulement si $\frac{\partial F_i}{\partial x_j} = \frac{\partial F_j}{\partial x_i}$ pour tout i et tout j .

Chapitre 3 : Théorème de Green-Riemann

Soit $S \subset \mathbb{R}^2$ un domaine compact délimité par une courbe fermée, simple et C^1 par morceaux. On oriente $C = \partial S$ en disant que le sens direct est celui qui laisse S à gauche.

Théorème (de Green-Riemann)

Soient S un domaine compact, $C = \partial S$ son bord orienté positivement.

Si $F(x, y) = (f_1(x, y), f_2(x, y))$ alors $\int_C F dr = \iint_S \left(\frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y} \right) dx dy$.

Notation

Voici une autre façon, équivalente, d'énoncer la conclusion du théorème de Green-Riemann :

Si $F = (P, Q)$: $\int_C P dx + Q dy = \iint_S \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy$.

En plus, au lieu de \int_C on écrit parfois \oint_C pour rappeler que le chemin C est une boucle.

Exemples

Corollaire

Aire $S = \int_C x dy = \frac{1}{2} \int -y dx + x dy$.

Application de Green-Riemann

Si $G(u, v) = (x(u, v), y(u, v))$ est un changement de variables d'un domaine R à un domaine $G(R)$ alors :

$$\iint_{G(R)} dx dy = \iint_R |\det J(G)| du dv$$

Chapitre 4 : Intégrales de surface

1 – Surface de \mathbb{R}^3

On peut décrire une surface de \mathbb{R}^3 de trois manières :

- Surface de niveau
 $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / f(x, y, z) = 0\}$ où f est une fonction de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R} .
Exemple : $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - R^2 = 0$.
- Graphe d'une fonction $z = f(x, y)$
Exemple : $z = x^2 + y^2$.
- Surface paramétrée
Soit $r : T \rightarrow \mathbb{R}^3$ où $T \subset \mathbb{R}^2 : r(u, v) = \{x(u, v), y(u, v), z(u, v)\}$.
Exemple : sphère, cône en coordonnées sphériques ou cylindriques.

2 – Aire de $S = r(T)$

On a Aire $(T) = \iint_T 1 \, du \, dv$.

Définition

On pose : Aire $(S) = \iint_T \left\| \frac{\partial r}{\partial u} \wedge \frac{\partial r}{\partial v} \right\| \, du \, dv$.

- Si r est injective alors $S = r(T)$ est une surface paramétrée **simple**.
- Si $\left\| \frac{\partial r}{\partial u} \wedge \frac{\partial r}{\partial v} \right\| \neq 0$ sur T , alors $S = r(T)$ est dite **lisse** (on suppose r de classe C^1).

Cas particulier : S est définie par $z = f(x, y)$ alors Aire $(S) = \iint \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2} \, dx \, dy$.

Exemple

Aire du parabolöide
Aire de la sphère

3 – Intégrale de surface

Si $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ est bornée sur $S = r(T)$. Alors :

Définition

On appelle **intégrale de surface** $\iint_{r(T)} f \, dS = \iint_T f(r(u, v)) \left\| \frac{\partial r}{\partial u} \wedge \frac{\partial r}{\partial v} \right\| \, du \, dv$.

Exemple

Calcul d'aire
Recherche de centre de gravité

4 – Changement de paramétrisation

Proposition

L'intégrale de surface est inchangée quand on change de paramétrisation.

5 – Champs de vecteurs

Soient $F(x, y, z) = (P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z))$ défini sur $S = r(T)$.

Soit $N = \frac{\partial r}{\partial u} \wedge \frac{\partial r}{\partial v}$ la normale à S , et $n = \frac{N}{\|N\|}$ la normale unitaire.

Définition

On appelle **flux de F à travers S** l'intégrale $\iint F \cdot n \, dS$.

Proposition

On a $\iint_S F \cdot n \, dS = \iint_T F(r(u, v)) \cdot \left(\frac{\partial r}{\partial u} \wedge \frac{\partial r}{\partial v} \right) du \, dv$.

Exemple

Calculer le flux de $(y, -x, 1)$ à travers la demi sphère $x^2 + y^2 + z^2 = a^2, z \geq 0$.

Notation : le flux se note $\iint P \, dy \wedge dz + Q \, dz \wedge dx + R \, dx \wedge dy$.

6 – Théorème de Stokes

Définition

Soit $F = (P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z))$ un champ de vecteurs de classe C^1 dans \mathbb{R}^3 . Le **rotationnel** de F est

$$\text{rot}(F) = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}, \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}, \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right).$$

Formellement, avec la notation $\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right)$, on peut définir $\text{rot}(F) = \nabla \wedge F$.

Théorème (Stokes)

Soit F un champ de vecteurs de classe C^1 , défini sur un sous-ensemble ouvert de \mathbb{R}^3 qui contient S . Supposons que le bord de S est une courbe C . Alors on a :

$$\int_S (\text{rot } F) \cdot n \, dS = \int_C F \, d\alpha.$$

Remarque

Dans le cas où $S \subset \mathbb{R}^2$, on retrouve Green-Riemann.

Exemple

Vérification de Stokes avec S paraboloidé $z = 4x^2 - y^2, z \geq 0 : F(x, y, z) = (z - y, z + x, -x - y)$.

7 – Interprétation physique - Notion de flux conservatif

8 – Démonstration du théorème de Stokes dans le cas où S est donnée par $z = f(x, y)$

9 – Divergence - Théorème de Gauss Ostrogradsky

Définition

Soit $F = (F_1, F_2, F_3)$ un champ de vecteurs de classe C^1 dans \mathbb{R}^3 . La **divergence** de F est

$$\operatorname{div}(F) = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z}.$$

Formellement, on peut écrire $\operatorname{div}(F) = \nabla \cdot F$.

Théorème

Soit $V \subset \mathbb{R}^3$ un volume délimité par une surface S fermée et orientée.

Soient n le vecteur unitaire normal vers l'extérieur et F un champ de vecteurs de classe C^1 .

Alors :

$$\iiint_V \operatorname{div}(F) \, dx \, dy \, dz = \iint_S F \cdot n \, dS$$

Exemple

Calcul du flux de $F(x, y, z) = (x, 0, 0)$ à travers la sphère $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

LICENCE

VAR : Fonctions de plusieurs variables, intégrales multiples, courbes paramétrées

Feuille d'Exercices 1

Exercice 1.1

Soient $x, y \in \mathbb{R}^n$. Montrer les identités suivantes :

(a) $x \cdot y = \frac{1}{4} (\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2)$

(b) $\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$

Exercice 1.2

Trouver l'équation du plan $P \subset \mathbb{R}^3$ passant par $A = (4, 2, -1)$ et orthogonal à $\vec{n} = (1, -1, 3)$.

Exercice 1.3

Trouver l'équation du plan $P \subset \mathbb{R}^3$ passant par les trois points suivants : $(2, 1, 1)$, $(3, -1, 1)$, $(4, 1, -1)$.

Exercice 1.4

1. Si $x, y \in \mathbb{R}^3$ tel que $x \wedge y = \vec{0}$ et $x \cdot y = 0$, montrer qu'au moins un des vecteurs x ou y est nul.
2. Si $x \neq \vec{0}$, $x \wedge y = x \wedge z$ et $x \cdot y = x \cdot z$, montrer que $y = z$.

Exercice 1.5

Soient $x = (x_1, x_2)$, $y = (y_1, y_2)$ et $P \subset \mathbb{R}^2$ le parallélogramme engendré par x, y .

Utiliser le produit vectoriel afin de montrer que l'aire de P est donnée par $|\det(x, y)| = |x_1 y_2 - x_2 y_1|$.

Exercice 1.6

Considérons la parallélépipède $P \subset \mathbb{R}^3$ engendré par les vecteurs x, y, z .

1. Montrer que le volume de P est donné par le "produit mixte" $(x \wedge y) \cdot z$.
2. Dédurre que $\text{vol}(P)$ est également donné par $|\det(x, y, z)|$.

Exercice 1.7

Considérons $F(t) = \left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}, 1 \right)$.

Montrer que l'angle entre $F(t)$ et $F'(t)$ est constant.

Exercice 1.8

Considérons l'hélice $F(t) = (a \cos t, a \sin t, bt)$ avec $a, b > 0$.

Montrer que l'angle entre l'axe Oz et la droite tangente est constante et $\cos \theta = b/\sqrt{a^2 + b^2}$.

Exercice 1.9

Soit $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^m$ une courbe telle que $F(t_0) = X_0 \neq \vec{0}$ soit le point le plus proche de l'origine. Montrer que $F'(t_0)$ est orthogonal à $F(t_0)$.

Exercice 1.10

Si $F(t)$ et $\|F(t)\|$ sont intégrables sur $[a, b]$, montrer que :

$$\left\| \int_a^b F(t) dt \right\| \leq \int_a^b \|F(t)\| dt$$

Déduire que le chemin le plus court entre deux points A et B dans \mathbb{R}^n passe par le segment \overline{AB} .

Exercice 1.11

On considère \mathbb{R}^2 muni du produit scalaire

$$\begin{aligned} (x_1, x_2) \circ (y_1, y_2) &\equiv (x_1, x_2) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \\ &= x_1 y_1 + 2x_2 y_2 \end{aligned}$$

1. Calculer la longueur de $V_1 = (1, 1)$ et $V_2 = (1, -1)$ ainsi que l'angle entre V_1, V_2 .
2. Montrer que ce produit scalaire vérifie les propriétés PS1-PS5 du cours.

*Courbure***Exercice 1.12**

Considérons l'hélice $\gamma(t) = (\cos t, \sin t, t)$.

1. Calculer l'abscisse curviligne $s(t) = \int_0^t \|\gamma'(u)\| du$.
2. Trouver la paramétrisation unitaire $\gamma(s) = \gamma(t(s))$ de l'hélice.
3. Calculer la courbure $\rho(s)$ de $\gamma(s)$.

Exercice 1.13

Soit $\gamma(s)$ une courbe paramétrée unitaire dans le plan \mathbb{R}^2 .

Montrer que $\rho(s) = \left| \frac{d\phi}{ds} \right|$ où $\phi(s)$ est l'angle entre le vecteur tangent $\gamma'(s)$ et le vecteur $e_1 = (1, 0)$.

Exercice 1.14

Soit $\gamma(t) \in \mathbb{R}^3$ une courbe paramétrée.

Il est parfois utile de pouvoir calculer ρ directement, sans passer par une paramétrisation unitaire de γ .

Montrer que $\rho = \|\gamma'(t) \wedge \gamma''(t)\| / \|\gamma'(t)\|^3$.

Exercice 1.15

Trouver la courbure de la spirale $\gamma(t) = (e^{-t} \cos t, e^{-t} \sin t, 0)$.

Que se passe-t-il lorsque $t \rightarrow \infty$?

Exercice 1.16

Soit $\gamma(s) \subset \mathbb{R}^3$ telle que $\|\gamma(s)\| = \|\gamma'(s)\| = 1, \forall s$. (Géométriquement, ceci veut dire que la courbe γ se ballade sur la sphère de rayon 1 et de centre $(0,0,0)$, et qu'elle est de vitesse 1.)

Montrer que $\rho(s) \geq 1$.

(Indication : utiliser produit scalaire + inégalité de Cauchy-Schwarz)

*Produit Scalaire***Exercice 1.17**

Calculer l'angle entre les vecteurs $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$ et $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$ dans \mathbb{R}^n .

Que se passe-t-il lorsque $n \rightarrow \infty$?

Exercice 1.18

Notons par $\mathcal{C}([0, 2\pi])$ l'ensemble des fonctions continues $f : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}$.

1. Montrer que $\mathcal{C}([0, 2\pi])$ est un espace vectoriel.

2. Montrer que $\langle f, g \rangle \equiv \int_0^{2\pi} f(x)g(x) dx$ est un produit scalaire sur $\mathcal{C}([0, 2\pi])$.
($\mathcal{C}([0, 2\pi])$ est-il de dimension finie ou infinie selon vous ?)

3. Montrer que les fonctions $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\cos mx}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin nx}{\sqrt{\pi}}$ ($n, m = 1, 2, \dots$) sont orthogonaux sur $[0, 2\pi]$.

(On peut calculer directement. Autrement, on peut montrer que $\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{inx} e^{-imx} dx = \delta_{nm}$.)

LICENCE

VAR : Fonctions de plusieurs variables, intégrales multiples, courbes paramétrées

Feuille d'Exercices 2

Exercice 2.1

Donner l'ensemble de définition et l'image de $f(x, y) = \frac{x}{x^2 - y^2}$.

Exercice 2.2

Dessiner le graphe de $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2 - 1}$.

Exercice 2.3

Dessiner le graphe de $f(x, y) = x^2 + y^2 - 4x - 6y + 13$.

Exercice 2.4

Dessiner la surface $S = \{(x, y, z) | z = -y^2\} \subset \mathbb{R}^3$.

Exercice 2.5

Tracer les courbes de niveau pour les fonctions suivantes :

(a) $f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}$ (on pourra utiliser les coordonnées polaires)

(b) $f(x, y) = x^2 - y^2$

(c) $f(x, y) = e^{xy}$

Exercice 2.6

Montrer que la fonction $f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2 + y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$ est continue en $(0, 0)$.

Exercice 2.7

Si $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ sont continues, montrer que $f + g$ est continue.

Exercice 2.8

Soit $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction ayant la propriété : " $f^{-1}(I)$ est ouvert pour tout intervalle ouvert I dans \mathbb{R} ".
Montrer que f est continue.

Exercice 2.9

Lesquels des sous-ensembles suivants de \mathbb{R}^2 sont ouverts ?

- (a) $\{(x, y) \mid |x| < 1 \text{ et } |y| < 1\}$
- (b) $\{(x, y) \mid xy < 1\}$
- (c) $\{(x, y) \mid y > x^2 \text{ et } |x| < 2\}$
- (d) $\{(x, y) \mid x > y\}$

Exercice 2.10

Donner l'intérieur, l'extérieur et la frontière des sous-espaces de \mathbb{R}^2 suivants :

- (a) $\{(x, y) \mid 1 < x^2 + y^2 \leq 2\}$
- (b) $\left\{ \left(x, \sin \frac{1}{x} \right) \mid x > 0 \right\}$
- (c) $\{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{Z}\}$

Exercice 2.11

Soit $X \subset \mathbb{R}^n$. Montrer que ∂X est fermé.

LICENCE

VAR : Fonctions de plusieurs variables, intégrales multiples, courbes paramétrées

Feuille d'Exercices 3

Exercice 3.1

Lesquels des sous-ensembles de \mathbb{R} (resp. \mathbb{R}^2) sont compacts ?

- (a) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$
- (b) $[0, +\infty[$
- (c) les rationnels, \mathbb{Q}
- (d) $\mathbb{Q} \cap [0, 1]$
- (e) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$
- (f) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 1 \text{ et } y = x^2\}$
- (g) $\left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 1 \text{ et } 0 \leq y \leq \frac{1}{x} \right\}$

Exercice 3.2

Soient $X, Y \subset \mathbb{R}^n$ compacts. Montrer que $X \cap Y$ et $X \cup Y$ sont compacts.

Exercice 3.3

Soient $X \subset \mathbb{R}^n$ compact, $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ continue. Montrer que $f(X) \subset \mathbb{R}$ est compact.

Exercice 3.4

Soient $X \subset \mathbb{R}^n$, $Y \subset \mathbb{R}^m$ compacts. Montrer que $X \times Y \subset \mathbb{R}^{m+n}$ est compact.

Exercice 3.5

Calculer les dérivées partielles de $f(x, y) = \text{Ln}(xy)$.

Exercice 3.6

On appelle fonction homogène d'ordre α toute fonction vérifiant $f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^\alpha f(x, y)$, $\forall \lambda > 0$.

Montrer que $f(x, y)$ homogène vérifie l'identité d'Euler : $x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} = \alpha f$.

Exercice 3.7

Les côtés d'une boîte (longueur, largeur et hauteur) grandissent à une vitesse de 1 cm/sec., 2 cm/sec. et 3 cm/sec. respectivement.

A quelle vitesse le volume s'accroît-il lorsque longueur = 2 cm, largeur = 3 cm et hauteur = 6 cm ?

Exercice 3.8

Soit $g(t) = f(x_0 + \alpha t, y_0 + \beta t)$. Calculer $g'(0)$.

Exercice 3.9

Trouver l'équation du plan tangent à la surface donnée par le graphe de $f(x, y) = x^2 + y^2$ au point (2,2,8).

Exercice 3.10

Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ de classe \mathcal{C}^1 . On pose $g(x, y) = f(x - y, y - x)$. Calculer $\frac{\partial g}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y}$.

LICENCE

VAR : Fonctions de plusieurs variables, intégrales multiples, courbes paramétrées

Feuille d'Exercices 4

Exercice 4.1

Soit f la fonction définie sur $\{(x, y) / y \neq 0\}$ par : $f(x, y) = \frac{1 + x^2 + y^2}{y} \sin y$.

Montrer que cette fonction est continue et étudier ses prolongements possibles.

Exercice 4.2

Même question pour $g(x, y) = \frac{1 + x + y}{x^2 - y^2}$ définie sur $\{(x, y) / x^2 \neq y^2\}$.

Exercice 4.3

Même question pour $h(x, y) = \frac{|y|}{x^2} e^{-\frac{|y|}{x^2}}$.

Exercice 4.4

Soit E l'ensemble des éléments (x, y) de \mathbb{R}^2 vérifiant $1 \leq |x| + |y| \leq 2$.
Montrer que E est fermé.

La formule $f(x, y) = \frac{1}{x^2 + y^2}$ définit-elle sur E une fonction continue ?

Trouver les points où f atteint sa borne supérieure et sa borne inférieure.

Exercice 4.5

On considère la fonction de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R} définie par : $f(x, y) = \sup \left\{ \frac{x}{1 + |y|}, \frac{y}{1 + |x|} \right\}$.

Cette fonction est-elle continue ?

Exercice 4.6

On donne deux fonctions g et h de classe \mathcal{C}^1 de \mathbb{R} dans \mathbb{R} et on suppose que la dérivée de h ne s'annule pas.

Montrer que la fonction f définie de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R} par : $f(x, y) = \frac{g(x) - g(y)}{h(x) - h(y)}$ où $h(x) \neq h(y)$ a un prolongement continu sur \mathbb{R}^2 .

Exercice 4.7

Parmi les applications suivantes de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R} , dire (en vous justifiant) lesquelles sont continues et lesquelles sont discontinues. (Indication : dans plusieurs cas, on peut utiliser des coordonnées polaires.)

$$f_1(x, y) = \frac{x + y}{x^2 + y^2}$$

$$f_2(x, y) = y \sin x$$

$$f_3(x, y) = (x^2 + y^2) \sin \frac{1}{x^2 + y^2}$$

$$f_4(x, y) = y \sin \frac{1}{x}$$

$$f_5(x, y) = \frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2}$$

$$f_6(x, y) = \frac{y}{x^2} e^{-\frac{|y|}{x^2}}$$

Exercice 4.8

Soit f une fonction continue de \mathbb{R} dans \mathbb{R} .

On note φ l'application définie sur $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / y \neq 0\}$ par : $\varphi(x, y) = (x + y) f\left(\frac{x}{y}\right)$.

Montrer que φ est continue.

Trouver une condition nécessaire et suffisante pour que φ puisse être prolongée continuellement sur \mathbb{R}^2 .

Exercice 4.9

Etudier la continuité de la fonction f définie par :

$$f(x, y) = x^2 \text{ si } |x| \leq |y|$$

$$f(x, y) = y^2 \text{ si } |x| > |y|$$

Exercice 4.10

Montrer que la fonction f définie par : $f(x, y) = \frac{x + y}{x^2 + y^2}$ a une limite lorsque $\|(x, y)\|$ tend vers l'infini.

Exercice 4.11

Montrer que l'application définie par :

$$f(x, y) = \frac{x^4}{y(y - x^2)} \quad \text{si } y \neq 0 \text{ et } y - x^2 \neq 0$$

$$f(x, y) = 0 \quad \text{si } y = 0 \text{ ou si } y - x^2 = 0$$

n'est pas continue en $(0, 0)$ mais que ses restrictions à toute droite passant par l'origine sont continues en ce point.

LICENCE

VAR : Fonctions de plusieurs variables, intégrales multiples, courbes paramétrées

Feuille d'Exercices 5

Exercice 5.1

Trouver l'équation du plan tangent à la surface $S = \{(x, y, z) \mid xyz = 1\}$ en $(2, 1, \frac{1}{2})$.

Exercice 5.2

Considérons les sphères $S_1 : (x - c)^2 + y^2 + z^2 = 3$ et $S_2 : x^2 + (y - 1)^2 + z^2 = 1$.

Trouver une valeur de c pour laquelle, à tout point d'intersection de S_1 et S_2 , les plans tangents sont orthogonaux.

Exercice 5.3

Soit $f(x, y) = x^2 + xy + y^2$.

Dans quelle direction f s'accroît-elle le plus rapidement au point $(-1, 1)$?

Trouver la dérivée directionnelle dans cette direction.

Exercice 5.4

Trouver une dérivée directionnelle de $f(x, y, z) = 3x - 5y + 2z$ en $(2, 2, 1)$ dans la direction de la normale (extérieure) à la sphère $x^2 + y^2 + z^2 = 9$.

Exercice 5.5

Soit f de classe C^1 sur la boule $B(X_0; r) \subset \mathbb{R}^n$.

Si $\frac{\partial f}{\partial X_1} = \dots = \frac{\partial f}{\partial X_n} = 0$ sur $B(X_0; r)$, montrer que f est constante sur la boule.

Exercice 5.6

Soient $L : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ une application linéaire, $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ une application telle que $|g(x)| \leq \|x\|^2$.

Posons $f(x) = L(x) + g(x)$.

Montrer que $Df(0) = L$.

Exercice 5.7

Soit $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ donnée par $f(x) = \|x\|^2$.

Déterminer les points x pour lesquels f est différentiable, ainsi que la différentielle.

LICENCE

VAR : Fonctions de plusieurs variables, intégrales multiples, courbes paramétrées

Feuille d'Exercices 6

Exercice 6.1

Déterminer tous les extrema locaux et absolus ainsi que les points de selle de la fonction $f(x, y) = xy(1 - x^2 - y^2)$ sur le carré $\{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$.

Exercice 6.2

La température sur la sphère $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ est donnée par $T(x, y, z) = 2 + xz + y^2$. Trouver les points les plus chauds et ceux les plus froids.

Exercice 6.3

Cet exercice a pour but de démontrer l'inégalité arithmético-géométrique :

$$\sqrt[n]{a_1 \cdot \dots \cdot a_n} \leq \frac{a_1 + \dots + a_n}{n} \quad \text{pour des nombres } a_i \geq 0$$

1. Utiliser la méthode de Lagrange pour trouver la valeur maximale de $f(x_1, \dots, x_n) = x_1^2 \cdot \dots \cdot x_n^2$ sur la sphère de rayon $r > 0 : x_1^2 + \dots + x_n^2 = r^2$. Pourquoi f admet-elle une valeur maximale ?
2. Dédire de la question précédente que $x_1^2 \cdot \dots \cdot x_n^2 \leq \left(\frac{x_1^2 + \dots + x_n^2}{n} \right)^n$.
3. En déduire l'inégalité arithmético-géométrique.

Exercice 6.4

Trouver la différentielle de $f(x, y) = (x^2 + y^2)^{1/2}$ en $(1, 1)$.

Exercice 6.5

Trouver la différentielle de $f(x, y) = 2x + 3y$ en (x_0, y_0) .

Exercice 6.6

Estimer $(0.99 \cdot e^{0.02})^8$.

Exercice 6.7

Trouver les points critiques de :

- (a) $f(x, y) = (x^2 + y^2) e^{-(x^2 + y^2)}$
- (b) $f(x, y) = x e^y$

Exercice 6.8

Trouver les extrema de $f(x, y) = x^2 + 5y^2 - 6x + 10y + 6$.

Exercice 6.9

Sans calcul, trouver la nature de $(0, 0)$ pour la fonction $f(x, y) = -xy + xy^2 + x^2y^2$.

Exercice 6.10

Trouver les extrema locaux ainsi que les points de selle pour $f(x, y) = x^3 + 3xy + y^3$. Déterminer l'approximation de Taylor de f jusqu'à l'ordre 2 en tout point.

Exercice 6.11

La température dans \mathbb{R}^3 est donnée par $T(x, y, z) = x - 2y + z$.

Trouver les points sur la sphère $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ où T est maximale.

LICENCE

VAR : Fonctions de plusieurs variables, intégrales multiples, courbes paramétrées

Feuille d'Exercices 7

Exercice 7.1

Décrire l'image de la bande $\{(x, y) \mid 0 \leq y \leq 2\pi\}$ par l'application $f(x, y) = (e^x \cos y, e^x \sin y)$.

Exercice 7.2

Calculer la matrice jacobienne de $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ donnée par : $f(r, \varphi, \theta) = (r \sin \varphi \cos \theta, r \sin \varphi \sin \theta, r \cos \varphi)$.

Exercice 7.3

Calculer la matrice jacobienne $\text{Jac}(f)$ de $f(x, y) = (x + y, x^2 y)$ et trouver les points où le déterminant de $\text{Jac}(f)$ est nul.

Exercice 7.4

Calculer $df(x)$ de $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ donnée par : $f(x) = Mx + B$, M étant une matrice $(3, 3)$ et $B \in \mathbb{R}^3$.

Exercice 7.5

Soit $h(x) = g(f(x))$ avec $f = (f_1, \dots, f_n) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$.

Montrer que $\nabla h(x) = \sum_{k=1}^n \frac{\partial g}{\partial x_k}(y) \nabla f_k(x)$, $y = f(x)$.

Exercice 7.6

Trouver les points de \mathbb{R}^2 tels que $f(x, y) = (x^2 - y^2, 2xy)$ soit localement inversible.

Exercice 7.7

Montrer que $f(x, y) = x e^y - y + 1 = 0$ définit une fonction $y = \varphi(x)$ implicitement en $(-1, 0)$ et calculer $\varphi'(-1)$.

Exercice 7.8

Regardons la fonction $f(u, v) = (x, y)$ avec $x = (v^2 - u^2)/2$ et $y = uv$.

- Déterminer dans quels points cette fonction est localement inversible.
- Nous observons que $f(1, 2) = (\frac{3}{2}, 2)$ et que f est localement inversible dans $(1, 2)$. Dans un voisinage de $(u, v) = (1, 2)$ on peut donc écrire $u = u(x, y)$ et $v = v(x, y)$. Trouver les formules pour $\partial u / \partial x$, $\partial u / \partial y$, $\partial v / \partial x$ et $\partial v / \partial y$ au point $(\frac{3}{2}, 2)$.

Exercice 7.9

- Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ différentiable en x . Montrer que $df(x)(1) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$.
- Réciproquement, supposons que $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = b$. Posons $T(h) = bh$, $\forall h \in \mathbb{R}$.
Montrer que $df(x)(h) = T(h) = bh$.

Exercice 7.10

Soit $\varphi(y) = \int_1^{y^2} \sin(y e^x) dx$. Calculer $\varphi'(y)$.

Exercice 7.11

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \int_0^1 \frac{e^{-tx}}{1+t^2} dt$.

Montrer que f est de classe \mathcal{C}^2 . Calculer $f(0)$ et $f'(0)$.

Exercice 7.12

Soit $f(x, y, z) = e^{(x^2+y^2+z^2)}$.

- Déterminer les points de continuité de f .
- Décrire les ensembles de niveau de f si $c = -1$, $c = 1$, $c = 2$.

Exercice 7.13

Soit $f(x, y) = y e^{xy}$.

- Calculer $\nabla f(x, y)$.
- Dans quelle direction $f(x, y)$ s'accroît-elle le plus vite à partir du point $(1, 1)$?
Donner le vecteur unitaire de cette direction.

Exercice 7.14

Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ de classe \mathcal{C}^1 avec $\frac{\partial f}{\partial x}(1, 1) = 3$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(1, 1) = 5$.

Calculer $g'(0)$ lorsque $g(t) = f(2t + t^2 + e^t, \sin t + \cos t)$.

Exercice 7.15

Trouver tous les points P sur la surface $S : 2x^2 - y^2 + z^2 = 25$ pour lesquels le plan tangent $T_P S$ est orthogonal à l'axe Oz .

Exercice 7.16

Considérer la fonction $f(x, y) = x^3 - 3x^2 + y^2$.

- Déterminer les points critiques de f ainsi que leur nature.
- Trouver les extrema de f sur le carré $\{(x, y) \mid -2 \leq x, y \leq 2\}$.

Exercice 7.17

Trouver la valeur maximale de $f(x, y, z) = x + z$ sur la sphère $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ (par la méthode de Lagrange).

Exercice 7.18

Soit $f(x, y) = (xy, e^{xy})$.

Calculer la matrice jacobienne de f et déterminer le rang de cette matrice en tout point (x, y) .

En quels points f est-il localement inversible?

Donner l'image du vecteur (a, b) pour $df(1, 0)$.

LICENCE

VAR : Fonctions de plusieurs variables, intégrales multiples, courbes paramétrées

Feuille d'Exercices 8

Exercice 8.1

Evaluer les intégrales suivantes :

(a) $\iint_R xy(x+y) \, dx dy$ $R : [0, 1] \times [0, 1]$

(b) $\iint_R \sin(x+y) \, dx dy$ $R : [0, \pi/2] \times [0, \pi/2]$

(c) $\int_0^\pi \int_0^x x \sin y \, dy dx$

Exercice 8.2

Dessiner les régions suivantes :

(a) $\{(x, y) \mid x + y \leq 1, x \geq 0, y \geq 0\}$

(b) $\{(x, y) \mid |x| + |y| \leq 1\}$

(c) $\{(x, y) \mid x^2 \leq y \leq x, 0 \leq x \leq 1\}$

Exercice 8.3

Calculer $\iint_R x \cos(x+y) \, dx dy$, R région triangulaire de sommets à $(0, 0)$, $(\pi, 0)$, (π, π) .

Exercice 8.4

Calculer l'aire de la région $\{(x, y) \mid y \leq x \leq y^2, 1 \leq y \leq 2\}$.

Exercice 8.5

Evaluer $\int_0^\pi \int_y^\pi \frac{\sin x}{x} \, dx dy$.

Exercice 8.6

Evaluer $\iint_R x^2 \, dx dy$ lorsque $R = \{(x, y) \mid x \geq 0, 1 \leq x^2 + y^2 \leq 2\}$.

Exercice 8.7

Soit f définie sur $R = [0, 1] \times [0, 1]$ comme suit :

$$f(x, y) = \begin{cases} 1 - x - y & \text{si } x + y \leq 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Calculer $\iint_R f$.

Feuille d'Exercices 9

Exercice 9.1

1. Calculer $\iint_D \frac{dx dy}{(x^2 + y^2 + 1)^{3/2}}$, $D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq a\}$.
2. Laissant $a \rightarrow \infty$, montrer que $\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dy dx}{(x^2 + y^2 + 1)^{3/2}} = 2\pi$.

Exercice 9.2

Calculer $\iint_D \frac{1}{(x^2 + y^2)^3} dx dy$, $D = \{(x, y) \mid 4 \leq x^2 + y^2 \leq 9\}$.

Exercice 9.3

1. Soient R le rectangle de sommets $(1, 2)$, $(1, 5)$, $(3, 2)$, $(3, 5)$ et $G : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ l'application linéaire donnée par la matrice $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$.
Trouver l'aire de $G(R)$.
2. Même question avec l'application linéaire G donnée par la matrice $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -6 \end{pmatrix}$.

Exercice 9.4

Soit $(x, y) = G(u, v) = (u + v, u^2 - v)$. Soit $A = \{(u, v) \mid u \geq 0, v \geq 0, u + v \leq 2\}$.

Calculer $\iint_{G(A)} \frac{1}{\sqrt{1 + 4x + 4y}} dx dy$.

Exercice 9.5

On considère $\int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} (1-y^2)^{1/2} dy dx$.

1. Décrire la région sur laquelle on intègre et montrer qu'elle est de type I et de type II.
2. Echanger l'ordre d'intégration et évaluer.

Exercice 9.6

Calculer $\int_0^1 \int_0^x \int_{x^2+y^2}^1 dz dy dx$. Décrire la région sur laquelle on intègre.

Exercice 9.7

Calculer $\iiint_D \frac{dx dy dz}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}$, $D = \{(x, y, z) \mid 1 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 4\}$.

Exercice 9.8

Calculer l'intégrale double $\iint_S xy^2 dx dy$ où S est limité par la parabole $y^2 = 2px$ et la droite $x = p$.

Exercice 9.9

Calculer l'intégrale double $\iint_S xy dx dy$ où le domaine d'intégration S est limité par les axes de coordonnées et par l'arc d'astroïde d'équations $x = R \cos^3 t$, $y = R \sin^3 t$ avec $0 \leq t \leq \pi/2$.

Exercice 9.10

Calculer l'intégrale double $\iint_S (x^2 + y^2) dx dy$ où le domaine d'intégration S est limité par le demi-cercle de rayon a et de centre $(0,0)$, et situé au-dessus de l'axe des x .

Exercice 9.11

Calculer l'intégrale double $\int_0^a \int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} \sqrt{x^2-y^2} dy dx$.

Exercice 9.12

Calculer l'intégrale double $\iint_S \sqrt{a^2-x^2-y^2} dx dy$ où S est la boucle du lemniscate d'équations $(x^2+y^2)^2 = a^2(x^2-y^2)$ et $x \geq 0$.

Exercice 9.13

Calculer l'aire de la surface limitée par les paraboles d'équations $y^2 = 10x + 25$ et $y^2 = -6x + 9$.

Exercice 9.14

Calculer l'intégrale triple $\iiint_V x^2 dx dy dz$ où V est l'ellipsoïde d'équation $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1$.

Indication : même dans le cas $a = b = c = 1$, cet exercice est intéressant. Rappel : $\sin^3(\phi) = \frac{1}{4}(3 \cdot \sin(\phi) - \sin(3\phi))$

Exercice 9.15

Calculer l'intégrale triple $\iiint_V \sqrt{x^2+y^2+z^2} dx dy dz$ où V est la boule de centre $(0,0,0)$ et de rayon R .

Exercice 9.16

Calculer l'intégrale triple $\iiint_V \frac{1}{(1+x+y+z)^3} dx dy dz$ où V est limité par les plans de coordonnées et par le plan d'équation $x+y+z=1$.

Exercice 9.17

Calculer l'intégrale triple $\iiint_V (x + y + z)^2 dx dy dz$ où V est la portion commune au parabolôide $\{2az \geq x^2 + y^2\}$ et à la boule $\{x^2 + y^2 + z^2 \leq 3a^2\}$.

Exercice 9.18

Calculer l'intégrale triple $\iiint_V z dx dy dz$ où V est le domaine limité par le plan $z = 0$ et par le demi-ellipsoïde supérieur $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$.

Exercice 9.19

Calculer l'intégrale triple $\iiint_V z dx dy dz$ où V est le domaine limité par le plan $z = h$ et par le cône d'équation $z^2 = \frac{h^2}{R^2} (x^2 + y^2)$.

Exercice 9.20

Calculer l'intégrale triple $\iiint_V dx dy dz$ où V est le domaine limité par les surfaces d'équations $x^2 + y^2 + z^2 = 2Rz$ et $x^2 + y^2 = z^2$, et contenant le point $(0, 0, R)$.

Exercice 9.21

Calculer l'intégrale triple $\int_0^2 \int_0^{\sqrt{2x-x^2}} \int_0^a z \sqrt{x^2 + y^2} dz dy dx$.

Exercice 9.22

Calculer le volume du corps limité par le plan xOy , le cylindre $x^2 + y^2 = ax$ et la sphère $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$.

Exercice 9.23

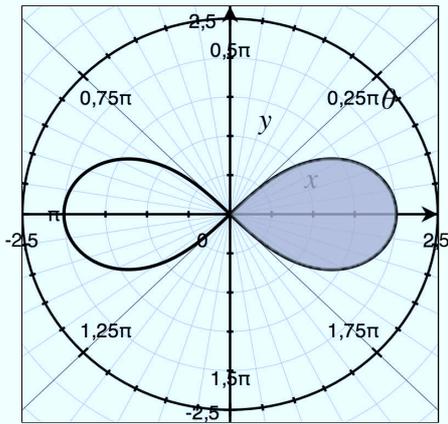
Calculer l'aire du parabolôide

$$\left\{ \left(x, y, \frac{x^2 + y^2}{2} \right) \mid x^2 + y^2 \leq 1 \right\}$$

Indication : utiliser des coordonnées polaires, c.à.d. la paramétrisation $f : (r, \theta) \mapsto (r \cos(\theta), r \sin(\theta), \frac{r^2}{2})$. La réponse est $\frac{2\pi(\sqrt{8}-1)}{3}$.

Exercice 9.24

- (a) Calculer l'aire d'une feuille de la région du plan déterminé par l'équation $r^2 \leq 4 \cdot \cos(2\theta)$ (voir le dessin).
 (b) Par rapport à l'axe de rotation $\{(0, 0, z) \mid z \in \mathbb{R}\}$, quel est le moment d'inertie d'une plaque de poids spécifique constant = 1 de la forme $\{(r, \theta, z) \mid r^2 \leq 4 \cdot \cos(2\theta), z = 0\}$



Exercice 9.25

- (a) Soit B la boule de centre $(0, 0, 1)$ et de rayon 1 . Expliquer pourquoi en coordonnées polaires cette boule est donnée par $\{(r, \phi, \theta) \mid 0 \leq r \leq 2 \cos(\phi)\}$.
- (b) Soit C le cône $\{(r, \phi, \theta \mid 0 \leq \phi \leq \frac{\pi}{6})\}$. Dessiner $B \cap C$, et calculer son volume.
- (c) Calculer le barycentre de $B \cap C$.

LICENCE

VAR : Fonctions de plusieurs variables, intégrales multiples, courbes paramétrées

Feuille d'Exercices 10

Exercice 10.1

Calculer les intégrales curvilignes $\int_C F \cdot dr$ lorsque :

- (a) $F(x, y) = (x^2 - 2xy, y^2 - 2xy)$
 C : graphe de $y = x^2$ entre $(-1, 1)$ et $(1, 1)$
- (b) $F(x, y, z) = (y^2 - z^2, 2yz, -x^2)$
 C : tracée par $r(t) = (t, t^2, t^3)$ avec $0 \leq t \leq 1$

Exercice 10.2

Calculer $\int_C F \cdot dr$ lorsque :

$$F(x, y) = (x^2 - y^2, 2xy)$$

$$(0, a) \quad (a, a)$$



C : le carré $(0, 0) \quad (a, 0) \quad (a, a) \quad (0, a)$ (pour $a > 0$)

et le chemin est traversé dans le sens géométrique.

Exercice 10.3

Calculer $\int_C F \cdot dr$ lorsque :

$$F(r, \theta) = (-4 \sin \theta, 4 \sin \theta) \quad \text{et } C : \text{spirale de } (1, 0) \text{ à } (0, 0) \text{ le long de } r = e^{-\theta}$$

Exercice 10.4

F est-il un champ de gradient ? Si oui, construire une fonction potentielle :

- (a) $F(x, y) = (x, y)$
- (b) $F(x, y, z) = (2xy^3, x^2z^3, 3x^2yz^2)$
- (c) $F(x, y) = (xy \cos xy + \sin xy, x^2 \cos xy)$
- (d) $F(x, y, z) = (x + z, -y - z, x - y)$

Exercice 10.5

Trouver une fonction potentielle pour $F(x) = \|x\|^p x$ sur $\mathbb{R}^n \setminus \bar{0}$.
(On traitera le cas $p = -2$ séparément.)

Exercice 10.6

On considère $F(x, y) = \left(\frac{-y}{x^2 + y^2}, \frac{x}{x^2 + y^2} \right)$ sur $\mathbb{R}^2 \setminus \bar{0}$.

1. Montrer que $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ sur $\mathbb{R}^2 \setminus \bar{0}$.
2. Calculer $\int_C F \cdot dr$, C tracée par $r(t) = (\cos t, \sin t)$ avec $0 \leq t \leq 2\pi$.
3. Les deux précédentes questions sont-elles contradictoires ?

LICENCE

VAR : Fonctions de plusieurs variables, intégrales multiples, courbes paramétrées

Feuille d'Exercices 11

Exercice 11.1

Evaluer les intégrales curvilignes suivantes à l'aide du théorème de Green-Riemann.

$$(a) \oint_C 2xy \, dx + (x^2 + y^2) \, dy \quad , \quad C : \text{ellipse } 4x^2 + 9y^2 = 36$$

c.à.d., l'intégrale du champ de vecteurs $F(x, y) = (2xy, x^2 + y^2)$ sur un chemin qui fait le tour dans le sens trigonométrique de l'ellipse C .

$$(b) \oint_C xy \, dx + \sin y \, dy \quad , \quad C : \text{triangle de sommets } (1, 1), (2, 2), (3, 0)$$

Exercice 11.2

Utiliser le théorème de Green-Riemann pour trouver l'aire de :

a) l'ellipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

b) la région entre les courbes $y = x^3$ et $y = \sqrt{x}$

Exercice 11.3

Soit $f(x, y)$ une fonction (à valeurs réelles) vérifiant $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$ sur S délimité par C .

Calculer $\oint_C \frac{\partial f}{\partial y} \, dx - \frac{\partial f}{\partial x} \, dy$.

Exercice 11.4

Evaluer $\oint_C \frac{-y}{x^2 + y^2} \, dx + \frac{x}{x^2 + y^2} \, dy$ lorsque C est le carré de sommets $(-2, -2), (-2, 2), (2, -2), (2, 2)$.

Exercice 11.5 Soit $F(x, y) = \left(\frac{-y}{x^2 + y^2}, \frac{x}{x^2 + y^2} \right)$.

Quelles sont les valeurs possibles pour $\oint_C F \cdot dr$ lorsque C est une courbe simple fermée dans $\mathbb{R}^2 \setminus \bar{0}$?

LICENCE

VAR : Fonctions de plusieurs variables, intégrales multiples, courbes paramétrées

Feuille d'Exercices 12

Exercice 12.1

Calculer l'aire de $S_+ = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 = a^2, z \geq 0\}$ en utilisant la représentation paramétrée $f(u, v) = (a \cos u \cos v, a \sin u \cos v, a \sin v)$.

Exercice 12.2

Calculer l'aire de la partie du plan $x + y + z = a$ contenue dans le cylindre $x^2 + y^2 = a^2$ ($a > 0$).

Exercice 12.3

Soient S le triangle de sommets $(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)$, $F(x, y, z) = (x, y, z)$ et n le vecteur unitaire normal à S avec z coordonnée ≥ 0 .

Calculer $\iint_S F \cdot n \, dS$.

Exercice 12.4

Calculer $\iint_S \operatorname{rot}(F) \cdot n \, dS$ à l'aide du théorème de Stokes lorsque :

- $F(x, y, z) = (y^2, xy, xz)$, $S_+ = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1, z \geq 0\}$,
 n vecteur unitaire normal à S_+ avec z coordonnée ≥ 0 .
- $F(x, y, z) = (y, z, x)$, $S_+ = \{(x, y, z) \mid z = 1 - x^2 - y^2, z \geq 0\}$,
 n vecteur unitaire normal à S avec z coordonnée ≥ 0 .

Exercice 12.5

Utiliser le théorème de Stokes pour montrer que $\int_C y \, dx + z \, dy + x \, dz = \pi a^2 \sqrt{3}$ lorsque C est la courbe d'intersection de la sphère $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ avec le plan $x + y + z = 0$.

Exercice 12.6

Utiliser le théorème de Stoke pour calculer $\int_C (y + z) \, dx + (z + x) \, dy + (x + y) \, dz$ lorsque C est la courbe d'intersection du cylindre $x^2 + y^2 = 2y$ avec le plan $y = z$.

LICENCE

VAR : Fonctions de plusieurs variables, intégrales multiples, courbes paramétrées

Feuille d'Exercices 13

Divergence, Théorème de Gauss

Exercice 13.1

Calculer, à l'aide du théorème de Gauss, le flux à travers la sphère d'unité $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ de $F(x, y, z)$ lorsque :

a) $F(x, y, z) = (2x, 2y, 2z)$

b) $F(x, y, z) = (x^3, y^3, z^3)$

Exercice 13.2

Supposons que $\operatorname{div}(F) > 0$ à l'intérieur de la boule unité $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$.

Montrer qu'il existe (au moins) un point p sur la sphère $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ tel que $F(p)$ ne soit pas tangent à la sphère.

Exercices supplémentaires

Exercice 13.3

Evaluer :

(a) $\int_0^1 \int_y^1 \cos(x^2) dx dy$

(b) $\iint_R \frac{1}{(1+x^2+y^2)^2} dx dy$

$$R = \{(x, y) \mid x \geq 0, y \geq 0, x^2 + y^2 \leq 1\}$$

Exercice 13.4

Evaluer $\iiint_V z dx dy dz$ lorsque V est le tétraèdre solide délimité par les quatre plans :

$$x = 0, y = 0, z = 0, x + y + z = 1.$$

Exercice 13.5

Trouver une fonction potentielle pour $F(x, y) = (2x + 3y^3, 9xy^2 + 2y)$ et ensuite calculer $\int_C F \cdot dr$ lorsque C est la courbe tracée par $r(t) = (t, \sin t)$ avec $0 \leq t \leq 2\pi$.

Exercice 13.6

Calculer $\iint_R (-\sin x e^{\cos y} + \sin y e^{\sin x}) dx dy$.

Exercice 13.7

Soit $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ donnée par $f(x) = \|x\|^2$.

Déterminer les points x pour lesquels f est différentiable, ainsi que la différentielle.

Exercice 13.8

Trouver les extrema locaux ainsi que les points de selle pour $f(x, y) = x^3 + 3xy + y^3$.

Exercice 13.9

La température est donnée par $T = (x, y, z) = x - 2y + z$.

Trouver les points sur la sphère $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ où T est maximale.

Conseil pour l'Examen

1. Savoir résoudre tous les exercices (feuilles 1 à 13).
2. Toujours faire un dessin !
3. Revoir surfaces, plans tangents, extrema (première partie du cours).