1 L'espace $\mathbb{R}^n$

1.1 Produit scalaire, norme et distance dans $\mathbb{R}^n$

Définition
Si $x = (x_1 \dots x_n)$ et $y = (y_1 \dots y_n)$ sont deux vecteurs de $\mathbb{R}^n$, on définit leur **produit scalaire** par :

$$\langle x, y \rangle = x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n$$

Définition
On appelle **norme** de x (ou longueur) $\|x\| = \langle x, x \rangle^{1/2}$ et la **distance** entre deux vecteurs $d(x\,,\,y) = \|x - y\|$.

Proposition
On a les propriétés suivantes :

(1) $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$

(2) $\langle x, y + z \rangle = \langle x, y \rangle + \langle x, z \rangle$

(3) $\langle \alpha x, y \rangle = \alpha \langle x, y \rangle$

(4) $\langle x, x \rangle \geqslant 0$ avec $\langle x, x \rangle = 0$ si et seulement si $x = 0$

Théorème
Le produit scalaire vérifie l'**inégalité de Cauchy-Schwarz** $\langle x, y \rangle^2 \leqslant \|x\|^2 \; \|y\|^2$ avec égalité si et seulement si x et y sont colinéaires.

Théorème
La norme définie précédemment s'appelle **norme euclidienne** et vérifie :

(i) $\|x\| = 0$ si et seulement si $x = 0$

(ii) $\|x\| > 0$ si $x \neq 0$

(iii) $\|\alpha\, x\| = |\alpha| \; \|x\|$

(iv) $\|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$

Définition
L'**angle** entre deux vecteurs non nuls est $\theta \in [0\,,\,\pi]$ vérifiant $\cos\theta = \dfrac{\langle x, y \rangle}{\|x\| \; \|y\|}$.

Définition
x et y de $\mathbb{R}^n$ sont dits **orthogonaux** si et seulement si $\langle x, y \rangle = 0$.

Définition (plan dans $\mathbb{R}^3$)
Soient $A = (x_0\,,\,y_0\,,\,z_0)$ un point de $\mathbb{R}^3$ et $N = (a\,,\,b\,,\,c)$ un vecteur non nul.
Le plan passant par A et orthogonal à N est $P = \{x \in \mathbb{R}^3 / (x - A) \cdot N = 0\}$.

1.2 Produit vectoriel dans $\mathbb{R}^3$

Définition
Si $x = (x_1\,,\,x_2\,,\,x_3)$ et $y = (y_1\,,\,y_2\,,\,y_3)$ sont deux vecteurs de $\mathbb{R}^3$, on définit le **produit vectoriel** de x et de y par : $x \wedge y = (x_2\, y_3 - x_3\, y_2\,,\, x_3\, y_1 - x_1\, y_3\,,\, x_1\, y_2 - y_1\, x_2)$.

Aide mémoire : cela "vaut" det $\begin{pmatrix} i & j & k \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{pmatrix}$.

Théorème
On a les propriétés suivantes :

(1) $x \wedge y = -\, y \wedge x$

(2) $x \wedge (y + z) = x \wedge y + x \wedge z$

(3) $\alpha\, x \wedge y = x \wedge \alpha\, y = \alpha(x \wedge y)$

(4) $x \cdot (x \wedge y) = 0$ et $y \cdot (x \wedge y) = 0$

(5) $\|x \wedge y\|^2 = \|x\|^2\, \|y\|^2 - (x \cdot y)^2$ (identité de Lagrange)

Interprétation géométrique de $x \wedge y$
$\|x \wedge y\| = \|x\|\, \|y\|\, \sin\theta$ est l'**aire du parallélogramme** engendré par x et y.

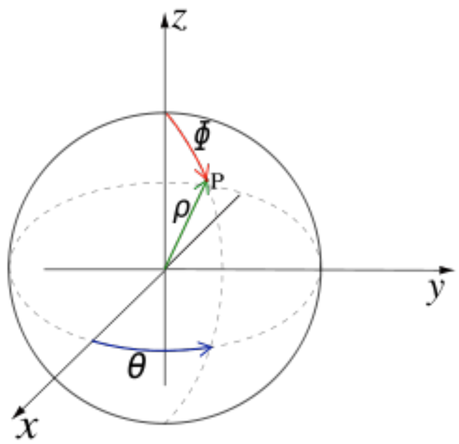
1.3 Coordonnées polaires, cylindriques, sphériques

Plutôt que de repérer un point (x, y) du plan $\mathbb{R}^2$ par ses coordonnées cartésiennes dans le repère orthonormé formé par la base canonique, on peut le faire au moyen de sa distance à l'origine et de l'angle formé par le premier vecteur de la base canonique et le vecteur (x, y). La distance à l'origine est définie au moyen du produit scalaire comme ci-dessus. L'angle n'est pas déterminé de manière unique. Plusieurs choix sont possibles. On peut ainsi définir les coordonnées polaires d'un point du plan au moyen de l'application suivante :

$$]0, +\infty[\times[0, 2\pi[\to \mathbb{R}^2 \quad (\rho, \theta) \mapsto (\rho\cos\theta, \rho\sin\theta).$$

On aurait pu choisir (le choix est tout aussi bon) de faire varier θ dans $[-\pi, \pi[$. On n'attribue généralement pas de coordonnées polaires au point origine : il est facile de définir sa distance à l'origine, l'angle n'aurait pas de sens.
Dans $\mathbb{R}^3$ on définit les coordonnées sphériques d'un point au moyen de l'application

$$]0, +\infty[\times[0, 2\pi[\times]0, \pi[\to \mathbb{R}^3 \quad (\rho, \theta, \phi) \mapsto (\rho\cos\theta\sin\phi, \rho\sin\theta\sin\phi, \rho\cos\phi).$$



Le couple (ρ, θ) forme les coordonnées polaires de la projection du point sur le plan d'équation $z = 0$. Là encore on aurait pu choisir d'autres intervalles pour domaines de θ et ϕ. En géographie par exemple la latitude qui correspond à ϕ varie de -90 à 90 degrés et c'est l'angle avec le plan de l'équateur qui la définit (pas l'angle avec l'axe pôle sud pôle nord). Pour une illustration très parlante des coordonnées polaires on pourra regarder le premier chapitre du film dimensions [1]

[1] `http://www.dimensions-math.org/Dim_fr.htm`

1.4 Topologie de $\mathbb{R}^n$

Définition
Soient $a \in \mathbb{R}^n$ et $r > 0$.
On appelle $B(a\,,\,r) = \{x \in \mathbb{R}^n \,/\, \|x - a\| < r\}$ la **boule ouverte** de centre a et de rayon r.

Exemple
Dans $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$ on retrouve les intervalles, les disques, les boules ouvertes.

Proposition
Soient $A \subset \mathbb{R}^n$, $a \in \mathbb{R}^n$.
Alors une des trois conditions suivantes est vérifiée :

(i) $\exists r > 0$ tel que $B(a\,,\,r) \subset A$

(ii) $\exists r > 0$ tel que $B(a\,,\,r) \subset A^c$ où $A^c = \mathbb{R}^n \setminus A$

(iii) $\forall r > 0$, $B(a\,,\,r)$ contient des points de A et de A^c.

Définition
L'**intérieur** de A (noté $\mathrm{int}(A)$ ou $\overset{\circ}{A}$) est l'ensemble des points de $\mathbb{R}^n$ vérifiant (i).
L'**extérieur** de A (noté $\mathrm{ext}\ A$) est l'ensemble des points de $\mathbb{R}^n$ vérifiant la condition (ii).
La **frontière** de A (notée ∂A) est l'ensemble des points de $\mathbb{R}^n$ vérifiant la condition (iii).
La **fermeture** de A (notée $\overline{A}$) est la réunion de A et de ∂A.

Exemples dans $\mathbb{R}^2$
$A = \{x \in \mathbb{R}^2 \,/\, \|x\| < 1\}$
$A = \{(n\,,\,0) \,/\, n \in \mathbb{Z}\}$

Définition
Un ensemble A de $\mathbb{R}^n$ est :

(i) **ouvert** si $\forall a \in A$, $\exists r > 0$ tel que $B(a\,,\,r) \subset A$

(ii) **fermé** si A^c est ouvert.

Proposition
A est ouvert si et seulement si $\overset{\circ}{A} = A$.
A est fermé si et seulement si $\overline{A} = A$.

Exemples
$A_1 = \{(x\,,\,y) \,/\, x^2 + y^2 < 1\}$ est ouvert.
$A_2 = \{(x\,,\,y) \,/\, x^2 + y^2 \leqslant 1\}$ est fermé.
$A_3 = A_1 \cup \{(1\,,\,0)\}$ n'est ni ouvert ni fermé.
$]0\,,\,1[\subset \mathbb{R}$ est ouvert dans $\mathbb{R}$.
$]0\,,\,1[\times \{0\} \subset \mathbb{R}^2$ n'est ni ouvert ni fermé.
$[0\,,\,1] \subset \mathbb{R}$ est fermé dans $\mathbb{R}$.
$[0\,,\,1] \times \{0\} \subset \mathbb{R}^2$ est fermé dans $\mathbb{R}^2$.

Proposition

1. $\mathbb{R}^n$ et $\oslash$ sont ouverts (et donc aussi fermés).
2. Toute réunion d'ouverts est un ouvert.
3. Toute intersection <u>finie</u> d'ouverts est un ouvert.

1.5 Suites dans $\mathbb{R}^n$

Définition
Une suite dans $\mathbb{R}^n$ est une famille de vecteurs $x_k = (x_1^{(k)}, \ldots, x_n^{(k)})$ indexée par l'ensemble des entiers naturels $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$. Chaque terme de la suite x_k est un vecteur avec ses n coordonnées.

Définition
Une suite $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ **converge** dans $\mathbb{R}^n$ vers $b \in \mathbb{R}^n$ si $\forall\varepsilon > 0\,,\ \exists N \in \mathbb{N}$ tel que $k \geqslant N$ entraîne $\|x_k - b\| < \varepsilon$.
De manière équivalente on peut définir la convergence d'une suite de vecteurs (x_k) par la convergence de chacune des suites réelles données par les coordonnées $x_i^{(k)}$, i allant de 1 à n, k variant dans $\mathbb{N}$ (les suites des coordonnées sont indexées par k et il y en a n : $(x_i^{(k)})_{k\in\mathbb{N}}$).
Une autre façon de dire que la suite (x_k) tend vers b est de dire que la suite réelle de nombre positifs ou nuls $(d(x_k, b))_{k\in\mathbb{N}}$ tend vers 0.

Remarques

1. On dit que b est **la limite** de la suite (x_k) et on note $x_k \to b$.
2. $x_k \to b$ si et seulement si $\forall\varepsilon > 0$ la boule $B(b\,,\,\varepsilon)$ contient toute la suite sauf un nombre fini de x_k.

Proposition
A est fermé si et seulement si pour toute suite convergente contenue dans A et convergente, la limite est dans A.

Cette proposition fournit un critère pour démontrer qu'un ensemble A n'est pas fermé : il suffit de trouver une suite de points de A convergeant vers un point n'appartenant pas à A.

Théorème
Soit (x_k) une suite bornée. Il existe une sous-suite de (x_k) convergeant dans $\mathbb{R}^n$.

1.6 Ensembles compacts

Définition
$X \subset \mathbb{R}^n$ est compact si X est fermé et borné (borné veut dire qu'il existe $R > 0$ tel que $X \subset B(0\,,\,R)$).

Exemples
$[0, 23]$ est un compact dans $\mathbb{R}$.
$\{(x, y)\ /x^2 + (y - 2)^2 \leq 6\}$ est un compact de $\mathbb{R}^2$.
$[2, 3] \times [1, 3] \times [5, 7]$ est un compact dans $\mathbb{R}^3$.

Théorème (Bolzano-Weierstrass)
Soit $X \subset \mathbb{R}^n$ compact.
Alors toute suite $(x_k) \subset X$ contient une sous-suite (x_{l_k}) qui converge vers un point de X.