Examen

(Calculatrices et documents interdits)

Connaissances élémentaires (2 points)
a) Quel est le chiffre des unités de 2013^{1023} ? Justifier la réponse.
Le chiffre des unités de l'écriture décimale (ce point n'était pas précisé dans l'énoncé ; j'aurais été embêté que quelqu'un me dise qu'il ne pouvait pas répondre à la question pour cette raison ; il est possible de choisir de répondre à la question dans une autre base ; le plus facile est sans doute la base 2 car le nombre est impair ; mais revenons aux choses sérieuses...), le chiffre des unités de l'écriture décimale d'un nombre entier, disais-je, est déterminé par sa classe pour la relation d'équivalence de congruence modulo 10. La relation de congruence modulo 10 étant compatible avec la multiplication, on a

$$2013^{1023} \equiv 3^{1023} \pmod{10}.$$

Ensuite on peut remarquer que $3^4 = 81 \equiv 1 \pmod{10}$, et que $1023 = 3 + 1020 = 3 + 4 * 255$. On en déduit

$$3^{1023} = 3^{3+4*255} = 3^3 * (3^4)^{255} = 27 * (3^4)^{255} \equiv 7 * 1^{255} \equiv 7 \mod 10.$$

Conclusion : le chiffre des unités de l'écriture décimale de 2013^{1023} est 7.
b) Énoncer le théorème des valeurs intermédiaires (pour une fonction d'une variable).
Ce théorème est au programme des classes scientifiques du lycée. Il n'est pas démontré dans ces classes mais est à la base de plusieurs raisonnements d'analyse : par exemple, c'est ce théorème qu'on invoque pour justifier le fait que certaines fonctions s'annulent entre deux points. Quelques secondes de réflexion doivent suffire à se persuader qu'une condition de continuité est nécessaire. Voici un énoncé :
Soient a et b deux nombres réels, avec $a < b$, et f une fonction définie sur l'intervalle $[a, b]$, continue sur cet intervalle. Si $f(a) < 0$ et $f(b) > 0$, alors il existe $c \in]a, b[$ tel que $f(c) = 0$.
En voici un autre équivalent (bien que légèrement différent ; cherchez la différence et comprenez pourquoi les deux énoncés sont équivalents)
Soient a et b deux nombres réels, avec $a < b$, et f une fonction définie sur l'intervalle $[a, b]$, continue sur cet intervalle. Si $f(a) < 0$ et $f(b) > 0$, alors il existe $c \in [a, b]$ tel que $f(c) = 0$.
Mais ces énoncés ont une forme particulière. Ils privilégient la valeur 0. Voici un troisième énoncé (équivalent aux deux autres ; montrez-le) :
Soient a et b deux nombres réels, avec $a < b$, et f une fonction définie sur l'intervalle $[a, b]$ continue sur cet intervalle. Pour tout nombre y appartenant à $[f(a), f(b)]$ (ou $[f(b), f(a)]$), il existe $c \in]a, b[$ tel que $f(c) = y$.
Il suffisait de donner l'un de ces énoncés pour avoir un point.

Exercice 1
a) Donner une exemple de fonction définie sur $\mathbb{R}^2$, bornée, continue sur $\mathbb{R}^2$, n'atteignant ni sa borne inférieure, ni sa borne supérieure.
On peut construire des exemples avec la fonction arctan qui est croissante sur $\mathbb{R}$, tend vers $-\pi/2$ en $-\infty$, $\pi/2$ en $+\infty$, est bornée et n'atteint pas ses bornes. Les fonctions suivantes conviennent :
$(x, y) \mapsto \arctan(x)$
$(x, y) \mapsto \arctan(x + y)$
$(x, y) \mapsto \arctan(xy)$
b) Calculer la matrice hessienne en $(0, 1)$ de la fonction F sur $\mathbb{R}^2$ à valeurs réelles définie par

$$F(x, y) = \ln(1 + x^2 + y^2) - 2xy.$$

Il faut calculer les dérivées partielles premières et deuxième de F :

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{2x}{1 + x^2 + y^2} - 2y,$$

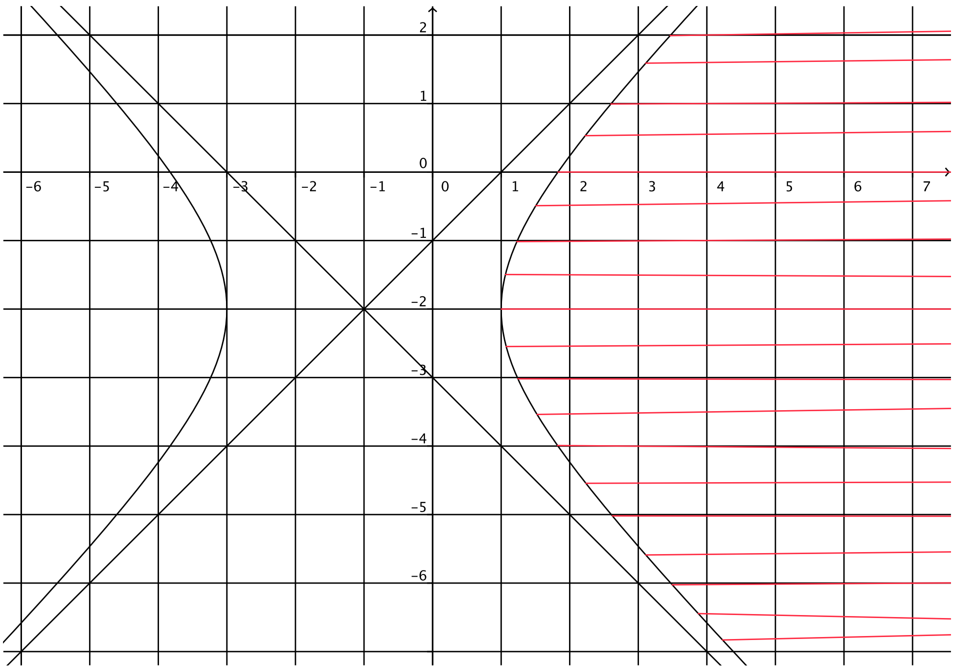
$$\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{2y}{1 + x^2 + y^2} - 2x,$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = \frac{2(1+x^2+y^2)-4x^2}{(1+x^2+y^2)^2} = \frac{2(1-x^2+y^2)}{(1+x^2+y^2)^2},$$
$$\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = \frac{-4xy}{(1+x^2+y^2)^2} - 2,$$
$$\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = \frac{2(1+x^2-y^2)}{(1+x^2+y^2)^2}.$$

La matrice hessienne de F en $(0,1)$ est
$$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

c) Énoncer le théorème d'inversion locale pour une fonction définie sur $\mathbb{R}^d$ à valeurs dans $\mathbb{R}^d$.
Soient f définie sur un domaine D de $\mathbb{R}^d$ à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ de classe $\mathcal{C}^1$ et x_0 un point intérieur à D. Alors si $f'(x_0)$ est inversible (en tant qu'application linéaire) f est localement inversible en x_0. Si g désigne son inverse locale, g est aussi de classe C^1 et en $y = f(x)$ on a $g'(y) = f'(x)^{-1}$ (l'exposant désigne ici l'opération d'inversion d'une matrice).

Exercice 2
a) Dessiner l'ensemble
$$E = \{(x, y) \;/\; (x+1)^2 - (y+2)^2 > 4,\; x > 0\}.$$



b) Montrer, en utilisant un théorème sur les fonctions continues définies sur $\mathbb{R}^2$, que l'ensemble E est un sous-ensemble ouvert de $\mathbb{R}^2$.
L'ensemble E est l'intersection des deux ensembles
$$\{(x, y) \;/\; (x+1)^2 - (y+2)^2 > 4\} \text{ et } \{(x, y) \;/\; x > 0\}.$$
Les deux fonctions
$$\phi : (x, y) \mapsto (x+1)^2 - (y+2)^2 \text{ et } \psi : (x, y) \mapsto x$$
sont continues sur $\mathbb{R}^2$ (ce sont des fonctions polynomiales). Or l'image réciproque d'un ouvert de $\mathbb{R}$ par une fonction partout continue de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ est un ouvert de $\mathbb{R}^2$. Les deux ensembles
$$\phi^{-1}(]4, +\infty[) = \{(x, y) \;/\; (x+1)^2 - (y+2)^2 > 4\} \text{ et } \psi^{-1}(]0, +\infty[) = \{(x, y) \;/\; x > 0\}$$
sont donc des ouverts de $\mathbb{R}^2$. Comme l'intersection de deux ouverts est ouverte, l'ensemble E est ouvert.

Exercice 3
On considère la fonction de deux variables g définie par

$$g(x,y) = x^2y^2 + x^2 - y^2 + 2xy.$$

a) Que vaut $g(1,1)$?
g(1,1)=3
b) Donner l'équation cartésienne du plan tangent au graphe de g en $(1,1,g(1,1))$.
L'équation du plan tangent au graphe de g est donnée par

$$z - g(1,1) = \frac{\partial g}{\partial x}(1,1)(x-1) + \frac{\partial g}{\partial y}(1,1)(y-1).$$

Ici on a

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x,y) = 2xy^2 + 2x + 2y, \quad \frac{\partial g}{\partial y}(x,y) = 2x^2y - 2y + 2x,$$

$$\frac{\partial g}{\partial x}(1,1) = 6, \quad \frac{\partial g}{\partial y}(1,1) = 2.$$

L'équation recherchée est donc

$$z - 3 = 6(x-1) + 2(y-1).$$

Exercice 4
a) Montrer que l'ensemble

$$K = \{(x,y,z) \ / \ x^2 + y^2 + z^2 \leq 2\}$$

est un sous-ensemble compact de $\mathbb{R}^3$.
Par définition un ensemble compact est un ensemble fermé et borné. Il nous faut donc montrer que K est fermé et borné.
La fonction

$$\chi : (x,y) \mapsto x^2 + y^2 + z^2$$

est continue sur $\mathbb{R}^3$. L'image réciproque d'un ensemble fermé de $\mathbb{R}$ par une fonction partout continue de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}$ est fermée, donc :

$$K = \chi^{-1}(]-\infty, 2])$$

est fermé.
Si le point (x,y,z) appartient à K, comme x^2, y^2 et z^2 sont positifs ou nul, on a

$$|x| \leq \sqrt{2}, \ |y| \leq \sqrt{2}, \ |z| \leq \sqrt{2}.$$

L'ensemble K est donc bien borné.
b) Trouver le ou les points critiques de la fonction définie par

$$f(x,y,z) = x^2 - 2yz - 2x + 1$$

La fonction f a-t-elle des extrema en ce ou ces points critiques ?
Calculons les dérivées partielles de f :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) = 2x - 2, \ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) = -2z, \ \frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) = -2y.$$

Les points critiques sont les points en lesquels ces trois dérivées s'annulent. Il n'y en a qu'un ici :

$$(1,0,0).$$

La fonction f n'a pas d'extremum en ce point. Une façon de le voir est de considérer les images des points $(1,a,a)$ et $(1,a,-a)$ pour a non nul :

$$f(1,a,a) = -2a^2 < 0 = f(1,0,0) \text{ et } f(1,a,-a) = 2a^2 > 0 = f(1,0,0).$$

Dans tout voisinage de $(1, 0, 0)$ il existe des points dont l'image par f est plus grande que celle de $(1, 0, 0)$ et d'autres dont l'image est plus petite que celle de $(1, 0, 0)$: f n'a donc pas d'extremum en $(1, 0, 0)$.
c) La fonction f est-elle bornée sur l'ensemble $K = \{(x, y, z) \ / \ x^2 + y^2 + z^2 \leq 2\}\}$? Pourquoi ?
Oui, la fonction f est bornée sur K car f est continue (c'est une fonction polynomiale) et K est compact. Or tout fonction continue sur un ensemble compact est bornée (et atteint ses bornes si K n'est pas vide, cas peu intéressant qui ne se produit pas ici).
d) Trouver les valeurs maximales et minimales de f sur K. Justifier le fait que les valeurs données sont bien les valeurs minimale et maximale de la fonction sur l'ensemble considéré. Donner aussi les points où ces valeurs sont atteintes.
Comme f n'a pas d'extremum libre, elle atteint ses bornes sur le bord de K. Pour trouver les points où les extrema sont atteints nous allons utiliser le théorème des extrema liés. En un point de la sphère d'équation $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ où f est extrémale, les gradients de f et de $(x, y, z) \mapsto x^2 + y^2 + z^2$ sont colinéaires. Ces gradients valent :

$$(2x - 2, -2z, -2y) \text{ et } (2x, 2y, 2z).$$

On cherche donc x, y, z, λ tels que

$$x - 1 = \lambda x, \ \ -z = \lambda y, \ \ -y = \lambda z, \ \ x^2 + y^2 + z^2 = 2.$$

Des deuxième et troisième égalité on déduit $z = \lambda^2 z$, soit $(1 - \lambda^2)z = 0$. Si z est nul alors y aussi. On obtient deux points sur la sphère où les jacobiens sont proportionnels :

$$(\sqrt{2}, 0, 0) \text{ et } (-\sqrt{2}, 0, 0).$$

Si z n'est pas nul alors $\lambda = \pm 1$, y n'est pas nul. Mais la relation $x - 1 = \lambda x$ n'est pas satisfaite pour $\lambda = 1$. La seule possibilité est alors $\lambda = -1$ donc $y = z$ et $x - 1 = -x$ soit $x = 1/2$. En reportant dans la dernière égalité on obtient $y^2 = 7/8$. Nous obtenons donc deux nouveaux points où les gradients sont proportionnels :

$$(1/2, \sqrt{7}/2\sqrt{2}, \sqrt{7}/2\sqrt{2}) \text{ et } (1/2, -\sqrt{7}/2\sqrt{2}, -\sqrt{7}/2\sqrt{2}).$$

Calculons maintenant les valeurs de f en les quatre points trouvés :

$$f(\sqrt{2}, 0, 0) = 3 - 2\sqrt{2}, \ \ f(-\sqrt{2}, 0, 0) = 3 + 2\sqrt{2},$$

$$f(1/2, \sqrt{7}/2\sqrt{2}, \sqrt{7}/2\sqrt{2}) = f(1/2, -\sqrt{7}/2\sqrt{2}, -\sqrt{7}/2\sqrt{2}) = -3/2.$$

Les points de la boule où f atteint ses bornes sont nécessairement parmi ces quatre points. On en déduit que f atteint son maximum, $3 + 2\sqrt{2}$, en $(-\sqrt{2}, 0, 0)$ et son minimum, $-3/2$, en $(1/2, \sqrt{7}/2\sqrt{2}, \sqrt{7}/2\sqrt{2})$ et $(1/2, -\sqrt{7}/2\sqrt{2}, -\sqrt{7}/2\sqrt{2})$.

Exercice 5
a) Écrire la matrice jacobienne de l'application G définie sur $\mathbb{R}^3$ et à valeurs dans $\mathbb{R}^3$ par :

$$G(\rho, \theta, \phi) = (\rho \cos(\theta) \sin(\phi), \rho \sin(\theta) \sin(\phi), \rho \cos(\phi)).$$

b) Calculer le déterminant de cette matrice jacobienne (en simplifier l'écriture autant que possible).
Les réponses aux deux questions de cet exercice figurent dans le cours.

Exercice 6
Le but de l'exercice est de calculer l'intégrale triple suivante :

$$\iiint_V y \, dx \, dy \, dz$$

où V est le domaine limité par les plans $y = 0$, $z = 0$ et par la sphère $x^2 + y^2 + z^2 = 1$:

$$V = \{(x, y, z) \ / \ y \geq 0, \ \ z \geq 0, \ \ x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}.$$

a) Décrire le domaine V en coordonnées sphériques (grâce à l'application de l'exercice 5).
$\rho \in [0, 1]$, $\theta \in [0, \pi]$, $\phi \in [0, \pi/2]$

b) Exprimer l'intégrale en coordonnées sphériques.

$$\iiint_{[0,1]\times[0,\pi]\times[0,\pi/2]} \rho\sin(\theta)\sin(\phi)\rho^2\sin(\phi)\; d\rho\; d\theta\; d\phi$$

c) Calculer l'intégrale.
Résultat : $\pi/8$.