VAR - Correction du TD 04

Exercice 1

On peut répondre à cet exercice par un calcul brutal de F' puis de (F, F'). Il y a cependant des raisonnements plus astucieux. Posons $u(t) := 1/(1+t^2) \cdot (2t, 1-t^2)$, de telle sorte que l'on ait $F(t) = (u(t), 1)$. On reconnaît les formules donnant le cosinus et le sinus en fonction de la tangente de l'arc moitié ; autrement dit, si l'on pose $\theta(t) := 2 \arctan t$, alors on a $u(t) = (\cos(\theta(t)), \sin(\theta(t)))$. En particulier, $(u(t), u(t)) = 1$ pour tout t. En dérivant cette dernière relation, on obtient $2(u(t), u'(t)) = 0$ pour tout t. Or $F'(t) = (u'(t), 0)$, donc $(F(t), F'(t)) = (u(t), u'(t)) + 0 \cdot 1 = (u(t), u'(t)) = 0$.

On rappelle que l'angle φ entre deux vecteur u et v de $\mathbb{R}^n$ satisfait :

$$\cos(\varphi) = \frac{(u, v)}{\|u\| \|v\|}.$$

En particulier, le cosinus de l'angle entre $F(t)$ et $F'(t)$ vaut 0 pour tout t, alors que cet angle est compris entre 0 et π (c'est un angle non orienté). L'angle entre $F(t)$ et $F'(t)$ est donc constant, et vaut $\pi/2$.

Exercice 2

Soit e_z un vecteur générant l'axe (Oz), par exemple $e_z = (0, 0, 1)$. On cherche l'angle entre ce vecteur et la droite tangente à l'hélice, donc entre ce vecteur et le vecteur $F'(t)$. On calcule :

$$F'(t) = (-a \sin(t), a \cos(t), b),$$

d'où :

$$\cos(\theta(t)) = \frac{-a \sin(t) \cdot 0 + a \cos(t) \cdot 0 + b \cdot 1}{\sqrt{a^2 \sin^2(t) + a^2 \cos^2(t) + b^2}\sqrt{1}} = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

L'angle $\theta(t)$ est donc bien constant (car c'est une fonction continue de t dont le cosinus est constant), et son cosinus a bien la valeur annoncée.

Exercice 3

Définissons une fonction g en posant $g(t) = \|F(t)\| = \sqrt{(F(t), F(t))}$ pour tout réel t. On dérive cette fonction :

$$g'(t) = \frac{2(F(t), F'(t))}{2\sqrt{(F(t), F(t))}} = \frac{(F(t), F'(t))}{\|F(t)\|}.$$

Cette fonction est bien définie car F ne s'annule jamais. Par hypothèse, la fonction g atteint son minimum en t_0, et par conséquent sa dérivée s'annule en ce point. On a donc $(F(t_0), F'(t_0)) = 0$, ce qui revient bien à dire que $F(t_0)$ et $F'(t_0)$ sont orthogonaux.

Exercice 4

L'inégalité demandée découle de l'inégalité triangulaire et de la définition de l'intégrale (nous travaillons ici avec l'intégrale de Riemann). En effet, on a :

$$\begin{aligned}
\left\| \int_a^b F(t)\ \mathrm{d}t \right\| &= \left\| \lim_{n\to+\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} F\left(a + k\frac{b-a}{n}\right) \right\| \\
&= \lim_{n\to+\infty} \frac{b-a}{n} \left\| \sum_{k=0}^{n-1} F\left(a + k\frac{b-a}{n}\right) \right\| \\
&\leq \lim_{n\to+\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \left\| F\left(a + k\frac{b-a}{n}\right) \right\| \\
&= \int_a^b \|F(t)\|\ \mathrm{d}t.
\end{aligned}$$

Soient A et B deux points de $\mathbb{R}^n$, et soit γ une courbe joignant A et B, c'est-à-dire une fonction $\mathcal{C}^1$ de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}^n$ telle que $\gamma(a) = A$ et $\gamma(b) = B$. Alors l'inégalité ci-dessus devient :

$$L(\gamma) = \int_a^b \|\gamma'(t)\|\ \mathrm{d}t \geq \left\| \int_a^b \gamma'(t)\ \mathrm{d}t \right\| = \|\gamma(b) - \gamma(a)\| = \|B - A\|.$$

L'égalité est réalisé par exemple pour :

$$\gamma(t) = \frac{b-t}{b-a}A + \frac{t-a}{b-a}B.$$

Maintenant, supposons qu'il existe un point $C \notin [A, B]$ et un temps $t_C \in (a, b)$ tels que $\gamma(t_C) = C$. Alors on a par l'inégalité triangulaire :

$$L(\gamma) = \int_a^{t_C} \|\gamma'(t)\|\ \mathrm{d}t + \int_{t_C}^b \|\gamma'(t)\|\ \mathrm{d}t \geq \|C - A\| + \|B - C\| > \|B - A\|.$$

En particulier, si une courbe γ réalise la distance minimale entre A et B, alors elle doit rester dans le segment $[A, B]$: ce segment est bien le chemin le plus court de A à B.

Exercice 5

1) On trouve $\gamma'(t) = (-\sin(t), \cos(t), 1)$, et donc :

$$s(t) = \int_0^t \|\gamma'(u)\|\ \mathrm{d}u = \int_0^t \sqrt{\sin^2(u) + \cos^2(u) + 1}\,\mathrm{d}u = \sqrt{2}t.$$

2) Comme $s = \sqrt{2}t$, on a $t = s/\sqrt{2}$. Posons $\tilde{\gamma}(s) := \gamma(t(s))$. Alors :

$$\tilde{\gamma}(s) = \left(\cos\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right), \sin\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right), \frac{s}{\sqrt{2}}\right).$$

3) La courbe $\tilde{\gamma}$ étant unitaire, sa courbure vaut par défiition $\rho(s) = \|\tilde{\gamma}''(s)\|$. On calcule :

$$\tilde{\gamma}''(s) = \left(-\frac{1}{2}\cos\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right), -\frac{1}{2}\sin\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right), 0\right),$$

et donc $\rho(s) = 1/2$ pour tout s.

Exercice 6

Soit γ une courbe paramétrée unitaire dans $\mathbb{R}^2$, et soit φ l'angle entre le vecteur tangent γ' et le vecteur $(1,0)$. On a alors $\gamma' = (\|\gamma'\|\cos(\varphi), \|\gamma'\|\sin(\varphi)) = (\cos(\varphi), \sin(\varphi))$, la courbe étant paramétrée unitairement. En dérivant, on obtient $\gamma'' = (-\varphi'\sin(\varphi), \varphi'\cos(\varphi))$, et par définition la courbure vaut $\|\gamma''\| = \sqrt{(\varphi')^2\sin^2(\varphi) + (\varphi')^2\cos^2(\varphi)} = |\varphi'|$.

Exercice 7

Soit γ une courbe $\mathcal{C}^2$ d'une intervalle $[0, T_{max}]$ à valeurs dans $\mathbb{R}^3$.

Pour montrer cette formule en partant de la définition de la courbure, il faut reparamétriser la courbe γ afin de travailler avec une courbe γ' unitaire. On suppose que la dérivé de γ ne s'annule pas (auquel cas la formule n'a aucun sens), et on commence donc par calculer l'abscisse curviligne :

$$s(t) = \int_0^t \|\gamma'(u)\| \; \mathrm{d}u.$$

C'est une fonction continue et strictement croissante de $[0, T_{max}]$ à valeurs dans $[0, L(\gamma)]$, où $L(\gamma)]$ est la longueur (éventuellement infinie) de la courbe. Elle a donc un inverse $t \; : \; [0, L(\gamma)] \mapsto [0, T_{max}]$. Définissons, pour tout s dans $[0, L(\gamma)]$, une fonction $\tilde{\gamma} := \gamma \circ t$. Cette fonction est la courbe γ paramétrisée unitairement. Par définition, la courbure de la courbe $\tilde{\gamma}$ vaut $\tilde{\rho}(s) = \|\tilde{\gamma}''\|(s)$, et donc la courbure de la courbe γ vaut $\rho(t) = \tilde{\rho} \circ t^{-1} = \|\tilde{\gamma}''\| \circ s$.

Remarquons tout d'abord que $s'(t) = \|\gamma'(t)\|$, et donc $t'(s) = \|\gamma'\|^{-1} \circ t(s)$. De là, on calcule :

$$\tilde{\gamma}'(s) = t'(s) \cdot \gamma' \circ t(s) = \frac{\gamma'}{\|\gamma'\|} \circ t(s),$$

et :

$$\tilde{\gamma}''(s) = t'(s) \cdot \left(\frac{\gamma'}{\|\gamma'\|}\right) \circ t(s) = \frac{\gamma''\|\gamma'\| - \gamma'\|\gamma'\|'}{\|\gamma'\|^3} \circ t(s).$$

Finalement, on a donc :

$$\rho = \frac{\left\|\gamma''\|\gamma'\| - \gamma'\|\gamma'\|'\right\|}{\|\gamma'\|^3}.$$

Il reste à simplifier l'expression $\left\|\gamma''\|\gamma'\| - \gamma'\|\gamma'\|'\right\|$. Remarquons au passage que nous n'avons pas encore utilisé l'hypothèse selon laquelle γ prend ses valeurs dans $\mathbb{R}^3$, et la formule ci-dessus est donc valable en général. Pour commencer, on rappelle que l'on a $\|\gamma'\|' = (\gamma', \gamma'')\|\gamma'\|^{-1}$. Soit θ l'angle entre γ' et γ''. On calcule :

$$\begin{aligned}
\left\|\gamma''\|\gamma'\| - \gamma'\|\gamma'\|'\right\|^2 &= \left(\gamma''\|\gamma'\| - \gamma'\|\gamma'\|', \gamma''\|\gamma'\| - \gamma'\|\gamma'\|'\right) \\
&= \|\gamma'\|^2\|\gamma''\|^2 + \|\gamma'\|^2(\gamma', \gamma'')^2\|\gamma'\|^{-2} - 2(\gamma', \gamma'')^2\|\gamma'\|\|\gamma'\|^{-1} \\
&= \|\gamma'\|^2\|\gamma''\|^2 - (\gamma', \gamma'')^2 \\
&= \|\gamma'\|^2\|\gamma''\|^2\left(1 - \cos^2(\theta)\right) \\
&= \|\gamma'\|^2\|\gamma''\|^2\sin^2(\theta) \\
&= \|\gamma' \wedge \gamma''\|^2.
\end{aligned}$$

On a donc bien $\left\|\gamma''\|\gamma'\| - \gamma'\|\gamma'\|'\right\| = \|\gamma' \wedge \gamma''\|$, ce qui donne la formule recherchée.

Exercice 8

La méthode la plus simple pour aborder ce problème est d'utiliser le résultat de l'exercice 7. En effet, on calcule :

$$\gamma'(t) = (e^{-t}(-\cos(t) - \sin(t)), e^{-t}(\cos(t) - \sin(t)), 0),$$

puis :

$$\gamma''(t) = (2e^{-t}\sin(t)), -2e^{-t}\cos(t), 0),$$

et enfin :

$$\gamma'(t) \wedge \gamma''(t) = (0, 0, 2e^{-2t}[\cos(t)(\cos(t) + \sin(t)) - \sin(t)(\cos(t) - \sin(t))]) = (0, 0, 2e^{-2t}).$$

On a montré avec l'exercice 7 que la courbure $\rho(t)$ au temps t vaut :

$$\rho(t) = \frac{\|\gamma'(t) \wedge \gamma''(t)\|}{\|\gamma'(t)\|^3} = \frac{2e^{-2t}}{e^{-3t}((\cos(t) + \sin(t))^2 + (\cos(t) - \sin(t))^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{e^t}{\sqrt{2}}.$$

Quand t tends vers l'infini, la courbure tend elle aussi vers l'infini.

Exercice 9

On part de l'hypothèse selon laquelle la courbe γ "vit" sur la sphère centrée en l'origine et de rayon 1. On a alors $(\gamma, \gamma) = 1$, d'où :

$$(\gamma, \gamma)' = 2(\gamma, \gamma') = 0,$$

et :

$$(\gamma, \gamma)'' = 2(\gamma', \gamma') + 2(\gamma, \gamma'') = 0.$$

On a donc $(\gamma, \gamma'') = -(\gamma', \gamma')$. Or la courbe est paramétrée de façon unitaire, donc la courbure ρ est égale à $\|\gamma''\|$ et $(\gamma', \gamma') = \|\gamma'\|^2 = 1$. L'inégalité de Cauchy-Schwarz donne alors :

$$1 = |(\gamma, \gamma'')| \leq \|\gamma\| \, \|\gamma''\| = \rho,$$

ce qui est bien la conclusion attendue.

Ce résultat peut se généraliser : si une courbe lisse "vit" sur une sphère de rayon constant R, alors sa courbure est en tout point supérieure à $1/R$. La démonstration est pratiquement identique.

Exercice 10

La fonction f est polynomiale, et donc de classe $\mathcal{C}^1$. Par le théorème d'inversion locale, elle est donc localement inversible en un point si sa différentielle en ce point est bijective. On calcule maintenant la diff/'erentielle de f :

$$\mathrm{d}f(x, y) = \begin{pmatrix} 2x & -2y \\ 2y & 2x \end{pmatrix}$$

Le déterminant de cette matrice vaut $4(x^2 + y^2)$, et ne s'annule qu'au point $(0, 0)$. La fonction f et donc localement inversible en tout point de $\mathbb{R}^2$ différent de l'origine. De plus, $f(x, 0) = (x^2, 0)$ n'est injective sur aucun voisinage de 0, donc f n'est pas localement inversible en $(0, 0)$. L'ensemble de points de $\mathbb{R}^2$ en lesquels f est localement inversible est donc $\mathbb{R}^2$ privé du point $(0, 0)$.

Exercice 11

La fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$, et prend ses valeurs dans $\mathbb{R}$. Le point $(-1,0)$ appartient bien à la courbe C déquation $f=0$. On calcule :

$$\nabla f(x,y) = (e^y, xe^y - 1).$$

En particulier, la dérivée partielle selon y ne s'annule pas en $(-1,0)$. D'après le théorème des fonctions implicites, il existe un voisinage U du point $(-1,0)$, un voisinage V de -1 et une fonction $\varphi : V \mapsto \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ tels que, pour tout (x,y) dans U, on ait $(x,y) \in C$ si et seulement si $y = \varphi(x)$. En particulier, on a $g(x) := f(x,\varphi(x)) = 0$ sur V, ce qui donne en dérivant :

$$g'(x) = \frac{\partial f}{\partial x}(x,\varphi(x)) + \frac{\partial f}{\partial y}(x,\varphi(x))\varphi'(x) = 0,$$

et donc :

$$\varphi'(-1) = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(-1,0)}{\frac{\partial f}{\partial y}(-1,0)} = \frac{1}{2}.$$

Exercice 12

1) Cette fonction est localement inversible en tout point excepté $(0,0)$ (se référer à l'exercice 10).

2) On commence par calculer :

$$\mathrm{d}f(1,2) = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Soit g un inverse de f sur un voisinage de $(1,2)$. Si (u,v) est suffisamment proche de $(1,2)$, on a $g \circ f(u,v) = (u,v)$. Et dérivant cette relation, on obtient l'identité $\mathrm{d}g(3/2,2) \cdot \mathrm{d}f(1,2) = Id$, ou encore :

$$\mathrm{d}g(3/2,2) = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \end{pmatrix}(3/2,2) = \mathrm{d}f(1,2)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1/5 & 2/5 \\ -2/5 & 1/5 \end{pmatrix}.$$

Il suffit d'identifier les coefficients de la matrice.

Exercice 13

Le carré $C := [0,1] \times [0,1]$ est une partie compacte de $\mathbb{R}^2$. De plus, la fonction f est continue. Elle atteint ses extremums sur C. On calcule :

$$\nabla f(x,y) = (y(1-3x^2-y^2), x(1-x^2-3y^2)).$$

Dans l'intérieur du carré $C := [0,1] \times [0,1]$, les coordonnées x et y sont non nulles. Le gradient de f s'annule donc si et seulement si $1-3x^2-y^2 = 0$ et $-3x^2-y^2 = 0$. Ce système de deux équations à deux inconnues a pour solutions l'ensemble des couples (x,y) tels que $x^2 = y^2 = 1/4$. Le seul point de C vérifiant ces équations est le point $(1/2,1/2)$. La matrice hessienne de f vaut :

$$\nabla^2 f(x,y) = \begin{pmatrix} -6xy & 1-3x^2-3y^2 \\ 1-3x^2-3y^2 & -6xy \end{pmatrix}.$$

Pour $(x, y) = (1/2, 1/2)$, le déterminant de cette matrice est positif et sa trace est négative (ses valeurs propres sont -1 et -2), donc le point $(1/2, 1/2)$ est un maximum local. On calcule $f(1/2, 1/2) = 1/8$. Regardons maintenant ce qu'il se passe sur les bords du carr/'e. Si $x = 0$ ou $y = 0$, la fonction f s'annule. De plus, $f(1, y) = -y^3$, où y appartient à $[0, 1]$; sur cette arête, la fonction f atteint son maximum en $y = 0$ (il vaut 0) et son minimum en $y = 1$ (l vaut -1). De même, si $y = 1$ alors la fonction f atteint son maximum en $x = 0$ (il vaut 0) et son minimum en $x = 1$ (l vaut -1).

Finalement, le maximum global de f sur C vaut $1/8$ et est atteint en $(1/2, 1/2)$; le minimum global de f sur C vaut -1, et est atteint en $(1, 1)$.

Remarquons que f est strictement positive sur le carré si en seulement si $x > 0$, $y > 0$ et $x^2 + y^2 < 1$. En particulier, tout point de la forme $(x, 0)$ avec $x \in [0, 1)$ ou $(0, y)$ avec $y \in [0, 1)$ est un minimum local : tout voisinage suffisamment petit de tels points contient où bien des points en lesquels f s'annule (des points du bord), ou bien des points en lesquels f est strictement positive. Les points $(0, 1)$ et $(1, 0)$ ne sont ni des minimums locaux ni des maximums locaux.

En résumé, le point $(1/2, 1/2)$ et le seul maximum local. Le point $(1, 1)$ et les points de la forme $(x, 0)$ avec $x \in [0, 1)$ ou $(0, y)$ avec $y \in [0, 1)$ sont des minimums locaux.

Exercice 14

Posons $G(x, y, z) := x^2 + y^2 + z^2$. On cherche le maximum de la température T sur la courbe de niveau $S := \{G = 4\}$ (c'est une sphère de rayon 2). D'après le théorème du multiplicateur de Lagrange, là où ce maximum est atteint le gradient de T et le gradient de G sont colinéaires. On calcule :

$$\nabla G(x, y, z) = 2(x, y, z),$$

et :

$$\nabla T(x, y, z) = (z, 2y, x).$$

Ces deux vecteurs sont colinéaires si et seulement si $\nabla G \wedge \nabla T = 0$, c'est-à-dire si et seulement si les équations suivantes sont simultanément satisfaites :

$$\left\{ \begin{array}{lcl} y(x - 2z) & = & 0 \\ x^2 - z^2 & = & 0 \\ y(2x - z) & = & 0 \end{array} \right.$$

Si $x = 0$, alors $z = 0$ et ces équations sont satisfaites pour tout y. Si $x \neq 0$, alors $z = \pm x$, et $x - 2z \neq 0$ donc $y = 0$. L'ensemble des solutions sont les triplets de la forme $(0, y, 0)$, $(x, 0, x)$ et $(x, 0, -x)$, où x et y sont des réels. De plus, la condition $G(x, y, z) = 4$ doit aussi être satisfaite. L'ensemble des points critiques de la fonction f sur la surface S est donc $\{\pm(0, 2, 0), \pm(\sqrt{2}, 0, \sqrt{2}), \pm(\sqrt{2}, 0, -\sqrt{2})\}$. En calculant la valeur de la température en chacun de ces points, on voit que le minimum de T est atteint en $(\sqrt{2}, 0, -\sqrt{2})$ et en $(-\sqrt{2}, 0, \sqrt{2})$, et vaut 0. De même, le maximum de T est atteint en $(0, 2, 0)$ et en $(0, -2, 0)$, et vaut 6.

Exercice 15

1) Soit n un entier strictement positif, et soit r un réel strictement positif. On pose $f(x_1, \cdots, x_n) := \prod_{k=1}^n x_k^2$, et $G(x_1, \cdots, x_n) := \sum_{k=1}^n x_k^2$. On cherche le maximum de f sur la courbe de niveau $S := \{G = r^2\}$, qui est une sphère de rayon r. Ce maximum existe nécessairement car f est continue et S est compacte.

Remarquons tout d'abord que f est positive, et s'annule si et seulement si l'un des x_k s'annule. On peut donc supposer, quand nous cherchons le maximum de f, que tous les x_k sont non nuls. On calcule :

$$\nabla G(x_1, \cdots, x_n) = 2(x_1, \cdots, x_n),$$

et :

$$\nabla f(x_1, \cdots, x_n) = 2(x_1 \prod_{k=2}^{n} x_k^2, \cdots, \prod_{k=1}^{n-1} x_k^2 x_n) = \frac{2}{f(x_1, \cdots, x_n)}(1/x_1, \cdots, 1/x_n).$$

D'après le théorème du multiplicateur de Lagrange, là où le maximum de f est atteint sur S, le gradient de f est colinéaire au gradient de G, donc le vecteur $(x_1, \cdots, x_n)$ est colinéaire au vecteur $(1/x_1, \cdots, 1/x_n)$. Soit λ un réel tel que $(x_1, \cdots, x_n) = \lambda(1/x_1, \cdots, 1/x_n)$. On a alors $\lambda = x_1^2 = \cdots = x_n^2$, donc tous les x_k ont la même valeur absolue. En ces points, on a $f(x_1, \cdots, x_n) = x_1^{2n}$ et $G(x_1, \cdots, x_n) = nx_1^2 = r^2$, donc $f(x_1, \cdots, x_n) = n^{-n} r^{2n}$.

Le maximum de f sur l'hypersurface $S = \{G = r^2\}$ vaut donc $n^{-n} r^{2n}$.

2) D'après la question précédent, on a pour tout $(x_1, \cdots, x_n)$ dans $\mathbb{R}^n$:

$$\prod_{k=1}^{n} x_k^2 \leq n^{-n} \sqrt{\sum_{k=1}^{n} x_k^2}^{\,2n} = n^{-n} \left(\sum_{k=1}^{n} x_k^2 \right)^n = \left(\frac{\sum_{k=1}^{n} x_k^2}{n} \right)^n.$$

En prenant la racine n-ième, on a bien l'inégalité demandée :

$$\left(\prod_{k=1}^{n} x_k^2 \right)^{\frac{1}{n}} \leq \frac{\sum_{k=1}^{n} x_k^2}{n}.$$

3) Soient $a_1, \cdots, a_n$ des réels positifs. Posons $x_1 := \sqrt{a_1}, \cdots, x_n := \sqrt{a_n}$. L'inégalité de la quesiton précédente devient alors :

$$\left(\prod_{k=1}^{n} a_k \right)^{\frac{1}{n}} \leq \frac{\sum_{k=1}^{n} a_k}{n}.$$

Nota Bene : l'inégalité arithmético-géométrique peut se démontrer beaucoup plus facilement en utilisant astucieusement une inégalité de convexité appliquée a la fonction logarithme.

Exercice 16

1) On calcule :

$$\nabla f(x, y) = (3x^2 - 6x, 2y) = (3x(x-2), 2y).$$

Les points critiques de f sont donc les points $(0,0)$ et $(2,0)$. On calcule maintenant la matrice hessienne de f :

$$\nabla^2 f(x, y) = \begin{pmatrix} 6(x-1) & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Pour $(x, y) = (0, 0)$, le déterminant de cette matrice est négatif (ses valeurs propres sont -6 et 2), donc le point $(0,0)$ est un point selle. Pour $(x, y) = (2, 0)$, le déterminant de cette matrice est positif et sa trace est positive (ses valeurs propres sont 6 et 2), donc le point $(2, 0)$ est un minimum local.

2) Considérons le carré $[-2, 2] \times [-2, 2]$. C'est une partie compacte de $\mathbb{R}^2$, et la fonction f étant continue elle atteint ses extremums sur ce carré. Le seul point critique de f dans l'intérieur du carré

est le point $(0,0)$, qui est un point selle ; les extremums de f sont donc atteints sur le bord du domaine étudié.

Si $y = \pm 2$ et $x \in [-2,2]$, on a $f(x,y) = x^3 - 3x^2 + 4$. Cette fonction de x atteint son maximum en 0 (il vaut 4) et atteint son minimum en -2 (il vaut -16). Si $x = -2$ et $y \in [-2,2]$, on a $f(x,y) = y^2 - 20$. Cette fonction de y atteint son maximum en -2 et en 2 (il vaut -16) et atteint son minimum en 0 (il vaut -20). Si $x = 2$ et $y \in [-2,2]$, on a $f(x,y) = y^2 - 4$. Cette fonction de y atteint son maximum en -2 et en 2 (il vaut 0) et atteint son minimum en 0 (il vaut -4).

Le maximum de f vaut donc 4, et est atteint aux points $(0,-2)$ et $(0,2)$. Le minimum de f vaut -20, et est atteint au point $(-2,0)$.

Exercice 17

Posons $G(x,y,z) := x^2+y^2+z^2$. On cherche le maximum de la fonction f sur la courbe de niveau $S := \{G = 1\}$. D'après le théorème du multiplicateur de Lagrange, là où ce maximum est atteint le gradient de f et le gradient de G sont colinéaires. On calcule :

$$\nabla G(x,y,z) = 2(x,y,z),$$

et :

$$\nabla f(x,y,z) = (1,0,1).$$

Ce maximum est atteint en un point dont les coordonnées sont de la forme $(x,0,x)$. Or on a alors $G(x,0,x) = x^2 + x^2 = 1$, ce qui laisse deux points critiques : $(1/\sqrt{2},0,1/\sqrt{2})$ et $(-1/\sqrt{2},0,-1/\sqrt{2})$. Or $f(1/\sqrt{2},0,1/\sqrt{2}) = \sqrt{2}$ et $f(-1/\sqrt{2},0,-1/\sqrt{2}) = -\sqrt{2}$. Le maximum de f sur la surface S est donc atteint en $(1/\sqrt{2},0,1/\sqrt{2})$, et vaut $\sqrt{2}$.

Exercice 18

Le problème posé revient à maximiser la fonction $f(x,y,z) := \sqrt{2+x} + \sqrt{1+y} + \sqrt{1+z}$ sur le triangle $T := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x+y+z = 1, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0\}$. Ce triangle étant compact, et la fonction f étant continue, il existe nécessairement un point de T qui maximise f.

Recherchons tout d'abord les points critiques à l'intérieur du triangle, c'est-à-dire dans le domaine $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x+y+z = 1, x > 0, y > 0, z > 0\}$. Par la méthode du multiplicateur de Lagrange, en un tel point les vecteurs $\nabla f(x,y,z) = 1/2 \cdot (1/\sqrt{2+x}, 1/\sqrt{1+y}, 1/\sqrt{1+z})$ et $(1,1,1)$ sont colinéaires, donc $\sqrt{2+x} = \sqrt{1+y} = \sqrt{1+z}$, donc $x+1 = y = z$. Or, en un tel point, on a $1 = x+y+z = 2+3x \geq 2$, ce qui est impossible. La fonction f n'atteint pas son maximum dans l'intérieur de T. Regardons maintenant le bord de T.

Si $x = 0$, alors on peut exprimer f en fonction de y par $f_1(y) = \sqrt{2} + \sqrt{1+y} + \sqrt{2-y}$. Une étude de fonction montre que f_1 atteint sont maximum en $1/2$, et que celui-ci vaut $2 + \sqrt{6}$. Si $y = 0$, alors on peut exprimer f en fonction de x par $f_2(x) = \sqrt{2+x} + 1 + \sqrt{2-x}$. Une étude de fonction montre que f_1 atteint sont maximum en 0, et que celui-ci vaut $1 + 2\sqrt{2}$. Si $z = 0$, alors on peut exprimer f en fonction de x par $f_3(x) = \sqrt{2+x} + \sqrt{2-x} + 1$. Une étude de fonction montre que f_1 atteint sont maximum en 0, et que celui-ci vaut $1 + 2\sqrt{2}$.

Or $1 + 2\sqrt{2} < \sqrt{2} + \sqrt{6}$. Le maximum de f est donc atteint en $(0, 1/2, 1/2)$ et vaut $\sqrt{2} + \sqrt{6}$. Ceci correspond a la répartition finale des revenus suivante : $(2, 3/2, 3/2)$.

Exercice 19

Soient α et r des réels strictement positifs. Pour tout entier n strictement positif, on définit un domaine $T_n := \{(x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n \ : \ x_1 + \cdots + x_n = r, x_1 \geq 0, \cdots, x_n \geq 0\}$, et une fonction $f_n := x_1^\alpha + \cdots + x_n^\alpha$. Le problème revient à déterminer le (ou les) point de T_n qui maximise f_n ; un tel point existe car T_n est compact et f_n est continue.

Si $\alpha = 1$, alors f_n est constante et égale à r sur T_n. L'utilité ne dépend pas de la répartition des revenus.

On va démontrer par récurrence la proposition suivante : "Si $\alpha \in (0, 1)$, alors pour tout $n \geq 1$ l'utilité maximale est atteinte uniquement quand tous les agents ont le même revenu, et vaut $r^\alpha n^{1-\alpha}$. Si $\alpha > 1$, alors pour tout $n \geq 1$ l'utilité maximale est atteinte uniquement quand un agent concentre tous les revenus, et vaut r^α".

Cette proposition est vraie si $n = 1$: il y a alors un seul agent, donc une seule répartition possible des revenus, et on vérifie facilement les formules. Soit $n \geq 2$ un entier, et supposons cette proposition vraie au rang $n - 1$.

Supposons que le maximum de f_n est atteint à l'intérieur du simplexe T_n (attention : le terme d'intérieur est ici utilisé dans un sens un peu différent du sens habituel ; il signifie ici l'ensemble des points de T_n de coordonnées strictement positives). Alors, par la méthode du multiplicateur de Lagrange, les vecteurs $\nabla f_n = \alpha(x_1^{\alpha-1}, \cdots, x_n^{\alpha-1})$ et $(1, \cdots, 1)$ sont colinéaires. Comme α est différent de 0 et de 1, cela ne laisse qu'une seule possibilité, c'est-à-dire un seul point critique : le point $(r/n \cdots, r/n)$. On calcule $f_n(r/n \cdots, r/n) = r^\alpha n^{1-\alpha}$.

Si l'on se place sur le bord de T_n, c'est-à-dire là où l'un des x_i est nul, alors le problème revient à maximiser $x_1^\alpha + \cdots + x_{i-1}^\alpha + x_{i+1}^\alpha + \cdots + x_n^\alpha$ sur $\{(x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n \ : \ x_1 + \cdots + x_{i-1} + x_{i+1} + \cdots + x_n = r, x_1 \geq 0, \cdots, x_{i-1} \geq 0, x_{i+1} \geq 0, \cdots, x_n \geq 0\}$, donc à maximiser f_{n-1} sur T_{n-1}. Si $\alpha \in (0, 1)$, alors par l'hypothèse de récurrence ce maximum vaut $r^\alpha (n-1)^{1-\alpha} < r^\alpha n^{1-\alpha}$. Le maximum de f_n est alors bien atteint en $(r/n \cdots, r/n)$, et vaut bien $r^\alpha n^{1-\alpha}$, ce qui prouve la première partie de l'hypothèse de récurrence. Si $\alpha > (0, 1)$, alors par l'hypothèse de récurrence ce maximum vaut $r^\alpha > r^\alpha n^{1-\alpha}$. Le maximum de f_n est alors bien atteint quand l'un des x_i vaut r et les autres sont nuls, et vaut bien r^α, ce qui prouve la seconde partie de l'hypothèse de récurrence.

Remarquons que des inégalités de convexités permettent de conclure directement si $\alpha > 1$.