VAR - Correction du TD 03

Exercice 1

Cette fonction est définie sur $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ [x>0 \text{ et } y>0] \text{ ou } [x<0 \text{ et } y<0]\}$. Elle est dérivable sur ce domaine, et :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{1}{x},\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{1}{y}.$$

Exercice 2

a) On calcule :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 9x^2y - 8x + y^2 + 2,\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2xy + 3x^3.$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 18xy - 8,\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 2x,\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = 9x^2 + 2y.$$

b) On calcule :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) = \frac{3x^2}{x^3+y} - 2,\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) = \frac{1}{x^3+y},\ \frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) = 0.$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y,z) = \frac{-3x^4+6xy}{(x^3+y)^2},\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y,z) = -\frac{1}{(x^3+y)^2},\ \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(x,y,z) = 0.$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y,z) = -\frac{3x^2}{(x^3+y)^2},\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}(x,y,z) = 0,\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}(x,y,z) = 0.$$

c) On calcule :

$$\frac{\partial f}{\partial u}(u,v,w) = \frac{1}{2\sqrt{u-v}},\ \frac{\partial f}{\partial v}(u,v,w) = -\frac{1}{2\sqrt{u-v}},\ \frac{\partial f}{\partial w}(u,v,w) = 2\alpha w^{\alpha-1}.$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}(u,v,w) = -\frac{1}{4(u-v)^{\frac{3}{2}}},\ \frac{\partial^2 f}{\partial v^2}(u,v,w) = -\frac{1}{4(u-v)^{\frac{3}{2}}},\ \frac{\partial^2 f}{\partial w^2}(u,v,w) = 2\alpha(\alpha-1)w^{\alpha-2}.$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v}(u,v,w) = \frac{1}{4(u-v)^{\frac{3}{2}}},\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial w}(u,v,w) = 0,\ \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial w}(u,v,w) = 0.$$

Exercice 3

Soient x et h dans $\mathbb{R}^3$. Par définition de la différentielle, on a $f(x+h) = f(x) + df(x)\cdot h + o(\|h\|) = B + Mx + Mh = f(x) + M \cdot h$. En identifiant les termes des deux membres, on obtient $df(x) = M$.

Exercice 4

On peut procéder par le calcul direct, ou être plus astucieux et passer par le produit scalaire. Nous choisissons ici la première option. Posons $X := (x, y)$. On calcule donc :

$$df(X) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y), \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right) = \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) = \frac{X^*}{\|X\|},$$

où X^* est la transposée de X (le vecteur X est un vecteur colonne, malgré la notation malheureuse $X = (x, y)$, donc X^* est un vecteur ligne), de telle sorte que l'on ait $X^*X = (X, X)$. En appliquant cette formule à $X = (1, 1)$, on trouve :

$$df(1,1) = \frac{1}{\|(1,1)\|}(1,1) = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1).$$

Exercice 5

On peut appliquer la méthode de l'exercice précédent, ou bien simplement le résultat de l'exercice 3. Dans les deux cas, on trouve $df(x, y) = (2, 3)$ pour tout (x, y) dans $\mathbb{R}^2$.

Exercice 6

Posons $f(x, y) := (xe^y)^8$. On a $f(1+x, y) = f(1, 0)+df(1, 0)\cdot(x, y)+o(\|(x, y)\|)$ par définition de la différentielle. Si x et y sont assez petits, on peut approcher $f(1+x, y)$ par $f(1, 0)+df(1, 0)\cdot(x, y)$. On calcule $df(x, y) = (8x^7e^{8y}, 8x^8e^{8y})$ pour tout (x, y), et donc $df(1, 0) = (8, 8)$. Par conséquent, on approche $f(1 + x, y)$ par $1 + (8, 8) \cdot (x, y)$, et en particulier :

$$(0,99 \cdot e^{0,02})^8 = f(1 - 0,01, 0,02) \sim 1 - 0,08 + 0,16 = 1,08.$$

La valeur exacte de $(0,99 \cdot e^{0,02})^8$ est proche de $1,083$. Cette méthode donne donc une meilleure valeur approchée qu'une approximation à l'ordre 0 (où l'on pose $(0,99 \cdot e^{0,02})^8 \sim f(1,0) = 1$).

Exercice 7

Un point critique d'une fonction continûment dérivable est un point où sa différentielle s'annule.

a) Posons $f(x, y) := (x^2 + y^2)e^{-(x^2+y^2)}$. On calcule $df(x, y) = 2(1 - (x^2 + y^2))e^{-(x^2+y^2)}(x, y)$. L'ensemble des points critiques de f est $\{(0, 0)\} \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ \|(x, y)\| = 1\}$.

b) Posons $f(x, y) := xe^y$. On calcule $df(x, y) = (e^y, xe^y)$. La différentielle de f ne s'annule jamais : l'ensemble des points critiques de f est vide.

Exercice 8

La fonction f est polynômiale : en effet, on a $f(x_1, \cdots, x_n) = \sum_{i=1}^n x_i^2$. Elle est donc infiniment différentiable, et a fortiori continûment différentiable sur $\mathbb{R}^n$. Un calcul brut donne $df(x) = 2x^*$. On peut retrouve ce résultat en passant par le produit scalaire. On a $f(x) = (x, x)$, et donc $f(x + h) = (x, x) + (x, h) + (h, x) + (h, h) = f(x) + 2(x, h) + o(\|h\|)$. Par identification, on retrouve $df(x) \cdot h = 2(x, h) = 2x^* \cdot h$ pour tout h, et donc $df(x) = 2x^*$.

Exercice 9

a) Soit $f(x,y) := ye^{x,y}$. De même que précédemment, on calcule $\nabla f(x,y) = e^{xy}(y^2, 1+xy)$.

b) En particulier, on a $df(1,1) = e(1,2)$. Le gradient indiquant la direction dans laquelle la fonction croît le plus vite, la fonction croît donc le plus vite dans la direction du vecteur $(1,2)$ au point $(1,1)$. Le vecteur unitaire dans cette direction et ce sens est $(1/\sqrt{5}, 2/\sqrt{5})$.

Exercice 10

Soit $f(x,y) := x^2 + xy + y^2$. On calcule $\nabla f(x,y) = (2x+y, x+2y)$. Le gradient de f en $(-1,1)$ vaut donc $(-1,1)$, et la fonction f croît le plus rapidement dans cette direction en $(-1,1)$.

Soit $u := (-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$ le vecteur unitaire dans cette direction. Posons $g(t) := f((-1,1)+tu)$. On a $g(t) = g(0) + t\nabla f(-1,1)\cdot u + o(t)$, et donc $g'(0) = \nabla f(-1,1)\cdot u = \sqrt{2}$. La dérivé directionnelle de f dans cette direction vaut donc $\sqrt{2}$.

Exercice 11

Soit f une fonction continûment dérivable sur $\mathbb{R}^2$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. Soient x_0, y_0, α et β des réels. Posons $X(t) := x_0 + \alpha t$ et $Y(t) := t_0 + \beta t$. Alors $g(t) = f(X(t), Y(t))$. La formule de dérivation en chaîne donne donc :

$$g'(t) = \frac{\partial f}{\partial X}\frac{\partial X}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial Y}\frac{\partial Y}{\partial t} = \nabla f(X(t), Y(t))\cdot(\alpha, \beta).$$

En particulier, on a $g'(0) = \nabla f(x_0, y_0)\cdot(\alpha,\beta)$.

Exercice 12

a) On calcule $\nabla f(x,y,z) = (6x^2y+1, 2x^3 - 4y - 2e^z, -2ye^z)$.

b) On calcule $dg(t) = (1, -2e^{-2t}, 3)$ (il s'agit d'un vecteur colonne !).

c) La formule de dérivation d'une fonction composée donne :

$$\begin{aligned}
F'(t) &= \nabla f(g(t))\cdot dg(t) \\
&= 6x(t)^2y(t) + 1 - 2e^{-2t}(2x(t)^3 - 4y(t) - 2e^{z(t)}) - 6y(t)e^{z(t)} \\
&= 6t^2e^{-2t} + 1 - 2e^{-2t}(2t^3 - 4e^{-2t} - 2e^{3t}) - 6e^{-2t}e^{3t} \\
&= 6t^2e^{-2t} - 4t^3e^{-2t} + 8e^{-4t} - 2e^t + 1
\end{aligned}$$

Exercice 13

Soit f une fonction $\mathcal{C}^1$ de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$. Posons $X(x,y) = x - y$ et $Y(x,y) = y - x$. On a alors $g(x,y) = f(X(x,y), Y(x,y))$. On a alors :

$$\frac{\partial g}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial X}\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial Y}\frac{\partial Y}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial X} - \frac{\partial f}{\partial Y},$$

et :

$$\frac{\partial g}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial X}\frac{\partial X}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial Y}\frac{\partial Y}{\partial y} = -\frac{\partial f}{\partial X} + \frac{\partial f}{\partial Y}.$$

En sommant les deux égalités obtenues, on a enfin :

$$\frac{\partial g}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} = 0.$$

Exercice 14

On calcule brutalement (sans avoir besoin d'expliciter F en fonction de u et v) :

$$\begin{aligned}\frac{\partial F}{\partial u} &= \frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial u} \\ &= (2x(u,v) - y(u,v)) \cdot 2u - x(u,v) \cdot v - 6z(u,v) \\ &= 2u(2u^2 - 2v^2 - uv + v) - v(u^2 - v^2) - 6(v^2 + u) \\ &= 4u^3 - 4uv^2 - 2u^2v + 2uv - vu^2 + v^3 - 6v^2 - 6u \\ &= 4u^3 - 3u^2v - 4uv^2 + v^3 + 2uv - 6v^2 - 6u,\end{aligned}$$

et :

$$\begin{aligned}\frac{\partial F}{\partial v} &= \frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial v} \\ &= -(2x(u,v) - y(u,v)) \cdot 2v - x(u,v) \cdot (u-1) - 6z(u,v) \cdot 2v \\ &= -2v(2u^2 - 2v^2 - uv + v) - (u-1)(u^2 - v^2) - 12v(v^2 + u) \\ &= -4u^2v + 4v^3 + 2uv^2 - 2v^2 - u^3 + u^2 + uv^2 - v^2 - 12v^3 - 12uv \\ &= -u^3 - 4u^2v + 3uv^2 - 8v^3 + u^2 - 12uv - 3v^2.\end{aligned}$$

Exercice 15

Posons $x(t) := 2t + t^2 + e^t$ et $y(t) := \sin(t) + \cos(t)$. Alors $(x(0), y(0)) = (1,1)$, et on calcule $x'(0) = 3$ et $y'(0) = 1$. La formule de dérivation d'une fonction composée donne :

$$\begin{aligned}g'(0) &= \frac{\partial f}{\partial x}(1,1)\frac{\partial x}{\partial t}(0) + \frac{\partial f}{\partial y}(1,1)\frac{\partial y}{\partial t}(0) \\ &= 3 \times 3 + 1 \times 5 \\ &= 14.\end{aligned}$$

Exercice 16

Voir la correction de l'exercice 17 pour une méthode possible.

Exercice 17

1) On dit que f est une fonction homogène de degré $\alpha \in \mathbb{R}$ si, pour tout $(y_1, \cdots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ et pour tout $t > 0$, on a :

$$f(tx_1, \cdots, tx_n) = t^\alpha f(x_1, \cdots, x_n).$$

2) Fixons le point $(x_1, \cdots, x_n)$ et posons $g(t) := f(tx_1, \cdots, tx_n)$. En dérivant le membre de droite de l'identité précédente avec la formule de dérivation en chaîne, on obtient :

$$g'(t) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_k}(tx_1, \cdots, tx_n)\frac{\partial tx_k}{\partial t}(t) = \sum_{k=1}^{n} x_k \frac{\partial f}{\partial x_k}(tx_1, \cdots, tx_n).$$

En dérivant cette fois-ci le membre de gauche, on obtient :

$$g'(t) = \alpha t^{\alpha-1} f(x_1, \cdots, x_n).$$

Enfin, en posant $t = 1$, on a l'identité d'Euler :

$$g'(1) = \sum_{k=1}^{n} x_k \frac{\partial f}{\partial x_k} = \alpha f.$$

Exercice 18

On applique directement une formule du cours. Le plan tangent (P) au graphe de f en $(2, 2, 8)$ a pour équation :

$$(P)\ :\ z - 8 = (x-2)\frac{\partial f}{\partial x}(2,2) + (y-2)\frac{\partial f}{\partial y}(2,2) = 4(x-2) + 4(y-2),$$

ou encore :

$$(P)\ :\ 4x + 4y - z = 8.$$

Exercice 19

On applique directement une (autre) formule du cours. Le plan tangent (P) à la surface de niveau de $f(x,y,z) = xyz$ en $(2, 1, 1/2)$ a pour équation :

$$(P)\ :\ (x-2)\frac{\partial f}{\partial x}(2,1,1/2) + (y-1)\frac{\partial f}{\partial y}(2,1,1/2) + (z-1/2)\frac{\partial f}{\partial z}(2,1,1/2) = 0,$$

ou encore :

$$(P)\ :\ \frac{x}{2} + y + 2z = 3.$$

Exercice 20

On suppose que l'intersection de S_1 et S_2 est non vide (les paramètres pour lesquels cette intersection est vide sont une solution du problème tel qu'il est posé, mais sont totalement inintéressants).

Soit c un réel. Posons $f_1(x,y,z) = (x-c)^2 + y^2 + z^2$ et $f_2(x,y,z) = x^2 + (y-1)^2 + z^2$. Soit p un point de $S_1 \cap S_2$. Dire que les plans tangent à S_1 et à S_2 sont orthogonaux en p revient à dire que les vecteurs normaux à S_1 et à S_2 sont orthogonaux en p, ou autrement dit que $(\nabla f_1(p), \nabla f_2(p)) = 0$.

Tout point de l'intersection doit satisfaire les équations suivantes :

$$\begin{cases} x^2 + (y-1)^2 + z^2 & = & 1; \\ (x-c)^2 + y^2 + z^2 & = & 3. \end{cases}$$

Ces équations peuvent se réecrire ainsi :

$$\left\{\begin{array}{lcl} x^2+(y-1)^2+z^2 & = & 1; \\ y-cx & = & \frac{3-c^2}{2}. \end{array}\right.$$

De plus, c est une solution non triviale du problème posé si et seulement si, en plus, tout point de l'intersection satisfait l'équation suivante :

$$x(x-c)+y(y-1)+z^2=0.$$

Or on remarque que :

$$x(x-c)+y(y-1)+z^2=x^2+(y-1)^2+z^2-cx+y-1=y-cx=\frac{3-c^2}{2}.$$

Le paramètre c est une solution non triviale du problème posé si est seulement si $c^2=3$, donc si et seulement si $c\in\{-\sqrt{3},\sqrt{3}\}$.

Exercice 21

Posons $f(x,y,z):=2x^2-y^2+z^2$. Soit T_pS le plan tangent à la surface $S=f^{-1}(25)$ au point p. Le plan tangent à la courbe de niveau de f au point p est orthogonal au gradient de f en ce point. On cherche tous les points p pour lesquels le plan tangent à S en p est orthogonal à l'axe (Oz). Par conséquent, on cherche tous les points de S en lesquels le gradient de f est inclus dans l'axe (Oz), donc colinéaire au vecteur $(0,0,1)$.

On calcule $\nabla f(x,y,z)=2(2x,-y,z)$. Ce vecteur est colinéaire au vecteur $(0,0,1)$ si et seulement si $x=y=0$ et $z\neq 0$. Les solutions au problème posé sont donc les points (x,y,z) de S tels que $x=y=0$ et $z\neq 0$, c'est-à-dire les points $(0,0,-5)$ et $(0,0,5)$.

Exercice 22

Posons $g(x,y,z):=x^2+y^2+z^2$. On calcule $\nabla g(x,y,z)=2(x,y,z)$. La normale extérieure a la sphère de rayon 3 au point $(2,2,1)$ est dans la direction du gradient de g en ce point, car les courbes de niveau d'une fonction contiûment dérivable sont orthogonales au gradient. La normale extérieure est donc dans la direction du vecteur $(4,4,2)$. En renormalisant ce vecteur, on trouve que la normale extérieure en ce point vaut $u=(2/3,2/3,1/3)$.

La dérivée directionnelle de f dans la direction de u vaut $\nabla f(2,2,1)\cdot u=3*2/3-5*2/3+2*1/3=-2/3$.

Exercice 23

On calcule :

$$\mathrm{d}f(\rho,\theta)=\begin{pmatrix} \frac{\partial\rho\cos(\theta)}{\partial\rho} & \frac{\partial\rho\cos(\theta)}{\partial\theta} \\ \frac{\partial\rho\sin(\theta)}{\partial\rho} & \frac{\partial\rho\sin(\theta)}{\partial\theta} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\rho\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \rho\cos(\theta) \end{pmatrix}.$$

Le déterminant de la jacobienne de f en (ρ,θ) vaut $\det\mathrm{Jac}(f)=\rho$.

Exercice 24

On calcule :

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}f(\rho,\varphi,\theta) &= \begin{pmatrix} \frac{\partial \rho\sin(\varphi)\cos(\theta)}{\partial \rho} & \frac{\partial \rho\sin(\varphi)\cos(\theta)}{\partial \varphi} & \frac{\partial \rho\sin(\varphi)\cos(\theta)}{\partial \theta} \\ \frac{\partial \rho\sin(\varphi)\sin(\theta)}{\partial \rho} & \frac{\partial \rho\sin(\varphi)\sin(\theta)}{\partial \varphi} & \frac{\partial \rho\sin(\varphi)\sin(\theta)}{\partial \theta} \\ \frac{\partial \rho\cos(\varphi)}{\partial \rho} & \frac{\partial \rho\cos(\varphi)}{\partial \varphi} & \frac{\partial \rho\cos(\varphi)}{\partial \theta} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \sin(\varphi)\cos(\theta) & \rho\cos(\varphi)\cos(\theta) & -\rho\sin(\varphi)\sin(\theta) \\ \sin(\varphi)\sin(\theta) & \rho\cos(\varphi)\sin(\theta) & \rho\sin(\varphi)\cos(\theta) \\ \cos(\varphi) & -\rho\sin(\varphi) & 0 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Le déterminant de la jacobienne de f en (ρ,φ,θ) vaut $\det \mathrm{Jac}(f) = \rho^2\sin(\varphi)$.

Exercice 25

On calcule :

$$\mathrm{d}f(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial x+y}{\partial x} & \frac{\partial x+y}{\partial y} \\ \frac{\partial x^2 y}{\partial x} & \frac{\partial x^2 y}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2xy & x^2 \end{pmatrix}.$$

Le déterminant de la jacobienne de f en (x,y) vaut $x^2 - 2xy = x(x-2y)$. Il s'annule sur les droites d'équation $x = 0$ et $x = 2y$.

Exercice 26

Il s'agit d'une application directe de la formule donnant la dérivée d'une fonction composée.

Exercice 27

On calcule :

$$\mathrm{d}f(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial xy}{\partial x} & \frac{\partial xy}{\partial y} \\ \frac{\partial e^{xy}}{\partial x} & \frac{\partial e^{xy}}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y & x \\ ye^{xy} & xe^{xy} \end{pmatrix}.$$

Le déterminant de la jacobienne de f est nul en tout point (les deux colonnes sont liées). Le rang de la matrice jacobienne est donc de 0 ou 1. Il est de 0 la où la matrice est nulle, donc en $(0,0)$, et de 1 ailleurs.