VAR - Correction du TD 01

Exercice 1

Il suffit de développer l'un des membres de ces identités pour vérifier leur validité. Ainsi, pour montrer (a) on procède comme suit. Soient x et y dans $\mathbb{R}^n$. On calcule :

$$\begin{aligned}
\frac{\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2}{4} &= \frac{(x+y \cdot x+y) - (x-y \cdot x-y)}{4} \\
&= \frac{(x\cdot x) + 2(x\cdot y) + (y \cdot y) - (x\cdot x) + 2(x\cdot y) - (y\cdot y)}{4} \\
&= \frac{4(x\cdot y)}{4} \\
&= (x\cdot y).
\end{aligned}$$

Cette première identité montre au passage que, si une norme dérive d'une produit scalaire, alors on peut retrouver le produit scalaire à partir de la norme en question.

La seconde identité se démontre par exemple de la façon suivante. Soient x et y dans $\mathbb{R}^n$. On calcule :

$$\begin{aligned}
\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 &= (x+y\cdot x+y) + (x-y\cdot x-y) \\
&= (x\cdot x) + 2(x\cdot y) + (y\cdot y) + (x\cdot x) - 2(x\cdot y) + (y \cdot y) \\
&= 2(x\cdot x) + 2(y\cdot y) \\
&= 2\left(\|x\|^2 + \|y\|^2\right).
\end{aligned}$$

Exercice 2

Un plan de l'espace $\mathbb{R}^3$ peut s'écrire comme un ensemble de la forme :

$$\left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ ax+by+cz = t\right\},$$

où a, b, c et t sont des réels. Si on pose $\vec{v} = (a,b,c)$, ce plan s'écrit :

$$\left\{\vec{u} \in \mathbb{R}^3 \ : \ (\vec{u}\cdot\vec{v}) = t\right\}.$$

Ici, on cherche un plan orthogonal au vecteur $\vec{n} = (1,-1,3)$. On peut donc choisir $\vec{v} = \vec{n}$ (fixer par exemple $t=0$ pour vérifier que cela donne bien le résultat désiré). Le plan P que l'on cherche a donc pour équation $x - y + 3z = t$ pour un certain réel t. Le point $A = (4,2,-1)$ appartenant à ce plan, on calcule $t = -1$, et donc l'équation du plan recherché est donc :

$$x - y + 3z = -1.$$

Exercice 3

On pourrait attaquer problème en résolvant un système de trois équations à trois inconnues. Ce n'est cependant pas la manière la plus efficace de procéder. Notons $A = (2,1,1)$, $B = (3,-1,1)$ et $C = (4,1,-1)$. Alors on a $\overrightarrow{AB} = (1,-2,0)$ et $\overrightarrow{BC} = (1,2,-2)$, et le vecteur $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{BC} = (4,2,4)$ est orthogonal au plan dont on cherche l'équation. On s'est ramené au problème précédent (exercice 2). On trouve alors qu'une équation du plan passant par les points A, B et C est :

$$2x + y + 2z = 7.$$

Exercice 4

Soit n un entier naturel strictement positif. Posons $u := (1,0,0,\cdots,0)$ et $v := (1,1,\cdots,1)$, où u et v sont deux vecteurs de $\mathbb{R}^n$. Soit $\theta_n \in [0,\pi]$ l'angle entre u et v. On calcule $(u \cdot v) = 1$, puis $(u \cdot u) = 1$ et enfin $(v \cdot v) = n$. Le cours nous dit que :

$$\cos(\theta_n) = \frac{(u \cdot v)}{\|u\|\,\|v\|} = \frac{(u \cdot v)}{\sqrt{(u \cdot u)(v \cdot v)}} = \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

Par conséquent, et parce que θ_n appartient à $[0,\pi]$, on a $\theta_n = \arccos(1/\sqrt{n})$.

Quand n tend vers $+\infty$, l'expression $1/\sqrt{n}$ tend vers 0. La fonction arccosinus étant continue, θ_n tend vers $\arccos(0) = \pi/2$.

Exercice 5

Commençons par les coordonnées polaire. Pour un point donné du plan (x,y) distinct de l'origine, on cherche des paramètres (r,θ) tels que :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos\theta \\ r\sin\theta \end{pmatrix}.$$

On a toujours $r > 0$, et par convention on prendra θ dans $(-\pi,\pi]$. Le paramètre r se calcule directement par $r = \sqrt{x^2+y^2}$. Le paramètre θ est un peu plus délicat à traiter ; on a $\tan\theta = y/x$ (le cas $x = 0$ est évident). On en déduit $\theta = \arctan(y/x)$ si $x > 0$, mais si $x < 0$ il faut faire attention à ajouter ou retrancher π. Finalement, on obtient :

$$\begin{aligned}
(1,1) &\mapsto (r,\theta) = (\sqrt{2}, \pi/4) \;; \\
(0,2) &\mapsto (r,\theta) = (2, \pi/2) \;; \\
(2,1) &\mapsto (r,\theta) = (\sqrt{5}, \arctan(1/2)) \;; \\
(1,-3) &\mapsto (r,\theta) = (\sqrt{10}, -\arctan(3)) \;; \\
(-2,-3) &\mapsto (r,\theta) = (\sqrt{13}, \arctan(3/2) - \pi).
\end{aligned}$$

Occupons-nous maintenant des coordonnées sphériques. Cette fois-ci, pour un point de l'espace (x,y,z) tel que $(x,y) \neq (0,0)$, on se donne un triplet de paramètres (r,θ,φ) tel que :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos\theta\sin\varphi \\ r\sin\theta\sin\varphi \\ r\cos\varphi \end{pmatrix}.$$

Là encore, r est facile à calculer. On retrouve θ en projetant le point sur le plan $(0xy)$ et en suivant la méthode de calcul pour les coordonnées polaires. Enfin, on choisit φ dans $(0, \pi)$, de telle sorte que l'on a immédiatement $\varphi = \arccos(z/r)$. On calcule donc :

$$\begin{aligned}(1,1,1) &\mapsto (r,\theta,\varphi) = (\sqrt{3}, \pi/4, \arccos(\sqrt{3}/3)) \ ; \\ (0,2,0) &\mapsto (r,\theta,\varphi) = (2, \pi/2, \pi/2) \ ; \\ (1,-3,-1) &\mapsto (r,\theta,\varphi) = (\sqrt{11}, -\arctan(3), \arccos(\sqrt{11}/11)).\end{aligned}$$

Exercice 6

Dessinez (et, en cas de doute, n'hésitez pas à venir poser des questions).

Exercice 7

Supposons les $(a_i)_{1 \leq i \leq n}$ non tous nuls. Soit j tel que a_j est non nul. Notons e_j le vecteur dont toutes les coordonnées sont nulles, sauf la j-ième, qui vaut 1. Soit t un réel. Montrons d'abord que E_t est non vide. Posons $x := a_j/t \cdot e_j$. Alors :

$$\sum_{i=1}^{n} a_i x_i = a_j \cdot t/a_j = t,$$

donc x appartient à E_t.

Montrons maintenant que E_t est fermé. Soit x dans le complémentaire de E_t. Donnons-nous un $\varepsilon > 0$. Soit x' un point de $B(x, \varepsilon)$. On calcule :

$$\begin{aligned}\left\| \sum_{i=1}^{n} a_i x_i' - \sum_{i=1}^{n} a_i x_i \right\| &\leq \sum_{i=1}^{n} \|a_i\| \, \|x_i' - x_i\| \\ &\leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2} \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i' - x_i)^2} \\ &= \sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2} \, \|x' - x\| \\ &\leq \varepsilon \sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2}.\end{aligned}$$

Donc, si ε est choisi assez petit, on aura $\sum_{i=1}^{n} a_i x_i' \neq t$ pour tout x' dans la boule $B(x, \varepsilon)$, ce qui implique que le complémentaire de E_t dans $\mathbb{R}^n$ est un ouvert. L'ensemble E_t est donc fermé. Montrons enfin que E_t est d'intérieur vide.

Montrons enfin que, sous les mêmens hypothèses, E_t est d'intérieur vide. Soit x un point de E_t, et $\varepsilon > 0$. Alors $x' := x + \varepsilon/2 e_j$ appartient à $B(x, \varepsilon)$, et pourtant on calcule :

$$\sum_{i=1}^{n} a_i x_i' = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i + a_j \varepsilon/2 = t + a_j \varepsilon/2 \neq t.$$

Ainsi, x' n'appartient pas à E_t, donc $B(x,\varepsilon)$ n'est pas inclus dans E_t et ce pour tout $\varepsilon > 0$. L'ensemble E_t est donc d'intérieur vide.

On montre facilement que, si tous les a_i sont nuls, alors E_t est vide si $t \neq 0$ et $E_0 = \mathbb{R}^n$.

Exercice 8

(a) : Soit x dans $(0,1)$. Nécessairement, on a $\min\{x, 1-x\} > 0$. Soit x' dans $B(x, \min\{x, 1-x\})$. Alors $x' > x - x = 0$ d'une part, et d'autre part $y < x + (1-x) = 1$. Donc x' appartient à $(0,1)$. Ceci étant vrai pour tout x' dans cette boule ouverte, on a $B(x, \min\{x, 1-x\}) \subset (0,1)$ pour tout x dans $(0,1)$. Par conséquent, $(0,1)$ est ouvert.

(b) : Soit (x,y) dans $A = \{(x,y) \;:\; |x| < 1,\; |y| < 1\}$. Nécessairement, on a $1-|x| > 0$ et $1-|y|$. Soit (x',y') dans $B((x,y), \min\{1-|x|, 1-|y|\})$. Alors on montre que $|x-x'| < 1-|x|$ et $|y-y'| < 1-|y|$. De là, on sait que $|x'| \leq |x-x'| + |x| < 1$ et que $|y'| < 1$, donc (x',y') appartient à A. De même que pour le (a), on déduit que B est ouvert.

(c) : Soit (x,y) dans $A = \{(x,y) \;:\; x^2+y^2 < 1\}$. Soit (x',y') dans $B((x,y), 1 - \|(x,y)\|)$. Alors, par l'inégalité triangulaire, $\|(x',y')\| \leq \|(x,y)\| + \|(x',y')-(x,y)\| < 1$, et par conséquent (x',y') appartient à A. De même que pour le (a), on déduit que A est ouvert.

(d) : Soit (x,y,z) dans $(0,1)^3 = \{(x,y,z) \;:\; x \in (0,1),\; y \in (0,1),\; z \in (0,1)\}$. On montre de la même façon qu'au (a) et qu'au (b) que la boule ouverte

$$B\left((x,y,z), \min\left\{x, 1-x, y, 1-y, z, 1-z\right\}\right)$$

est incluse dans $(0,1)^3$, et donc que $(0,1)^3$ est ouvert.

Au passage, remarquez que les bornes que nous avons utilisées ici sont optimales. On peut, si on le souhaite, garder une marge de sécurité, et montrer par exemple dans le (a) que la boule $B(x, \min\{x, 1-x\}/2)$ est incluse dans $(0,1)$.

Exercice 9

Tous ces sous-ensembles de $\mathbb{R}^2$ sont ouverts.

Exercice 10

N'oubliez pas de faire des dessins !

(a) :
- Intérieur : $\{(x,y) \;:\; 1 < x^2+y^2 < 2\}$,
- Extérieur : $\{(x,y) \;:\; x^2+y^2 < 1\} \cup \{(x,y) \;:\; x^2+y^2 > 2\}$,
- Frontière : $\{(x,y) \;:\; x^2+y^2 = 1\} \cup \{(x,y) \;:\; x^2+y^2 = 2\}$.

(b) :
- Intérieur : $\varnothing$,
- Extérieur : $\mathbb{R}^2 - \{(x,y) \;:\; x > 0,\; y = \sin(1/x)\} \cup \{(x,y) \;:\; x = 0,\; y \in [-1,1]\}$,
- Frontière : $\{(x,y) \;:\; x > 0,\; y = \sin(1/x)\} \cup \{(x,y) \;:\; x = 0,\; y \in [-1,1]\}$.

(c) :
- Intérieur : $\varnothing$,
- Extérieur : $\mathbb{R}^2 - \mathbb{Z}^2$,
- Frontière : $\mathbb{Z}^2$.

Exercice 11

Soit X une partie de $\mathbb{R}^n$. D'après le cours, le complémentaire de ∂X est l'union de l'intérieur de X et de l'extérieur de X. Or l'intérieur comme l'extérieur d'une partie de $\mathbb{R}^n$ sont des ouverts. Leur union est donc aussi un ouvert (voir par exemple l'exercice 12). ∂X est le complémentaire d'un ouvert, donc est un fermé.

Exercice 12

Montrons pour commencer qu'une réunion quelconque d'ensembles ouverts est un ensemble ouvert. Soit $(O_i)_{i\in I}$ une collection d'ouverts, que l'on peut supposer sans perte de généralité non tous vides. Posons $O := \bigcup_{i\in I} O_i$. Soit x un élément de O. Alors il existe un i tel que x appartient à O_i. L'ensemble O_i étant ouvert, il existe un $\varepsilon > 0$ tel que $B(x, \varepsilon) \subset O_i \subset O$. Ceci étant vrai pour tout x dans O, on a montré que O est ouvert.

Montrons maintenant qu'une intersection finie d'ouverts est un ouvert. Soit $(O_i)_{i\leq n}$ une collection finie d'ouverts, et posons $O := \bigcap_{i\leq n} O_i$. On peut supposer sans perte de généralité que O est non vide. Soit x un élément de O. Alors pour tout $i \leq n$, cet élément appartient à l'ouvert O_i, et donc il existe un $\varepsilon_i > 0$ tel que $B(x, \varepsilon_i) \subset O_i$. Comme les O_i sont en nombre fini, on a $\varepsilon := \min\{\varepsilon_i \ : \ i \leq n\} > 0$, et la boule $B(x, \varepsilon)$ est incluse dans O_i pour tout i. La boule $B(x, \varepsilon)$ est donc aussi incluse dans O, qui est donc un ouvert.

On peut trouver des contre-exemples si l'on considère des intersections infinies d'ouverts. Ainsi, $\bigcap_{n\geq 1}(-1/n, 1/n) = \{0\}$ n'est pas un ouvert.

Exercices 13

(a) : $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x^2 + y^2 \leq 1\}$ est un compact.

(b) : $[0, +\infty)$ est fermé, mais n'est pas borné : ce n'est donc pas un compact.

(c) : $\mathbb{Q}$ n'est ni fermé, ni borné : ce n'est donc pas un compact. Montrons que $\mathbb{Q}$ n'est pas fermé. Soit u_n l'arrondi à 10^{-n} près de $\sqrt{2}$. La suite (u_n) est une suite de rationnels, mais converge dans $\mathbb{R}$ vers $\sqrt{2}$, qui est irrationnel. C'est impossible si $\mathbb{Q}$ est fermé.

(d) : $\mathbb{Q} \cap [0, 1]$ est borné, mais n'est pas fermé (voir le commentaire en (c)) : ce n'est donc pas un compact.

(e) : $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x^2 + y^2 = 1\}$ est un compact.

(f) : $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x \in [0, 1], \ y = x^2\}$ est un compact.

(g) : $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x \geq 1, \ 0 \leq y \leq 1/x\}$ est fermé, mais n'est pas borné : ce n'est donc pas un compact.

Exercice 14

On suppose connu le résultat suivant (sinon, se reporter à l'exercice 12 pour en avoir une démonstraton) : une union finie de sous-ensembles fermés est fermée, et une intersection quelconque de sous-ensembles fermés est fermée.

Soient X et Y deux compacts de $\mathbb{R}^n$. Le résultat que nous venons d'invoquer implique que $X \cap Y$ et $X \cup Y$ sont tous deux fermés. Ils nous suffit donc de montrer que $X \cap Y$ et $X \cup Y$ sont aussi bornés. Soient M_X et M_Y deux réels positifs tels que $X \subset B(0, M_X)$ et $Y \subset B(0, M_Y)$.

Alors $X \cap Y \subset B(0, M_X) \cap B(0, M_Y) = B(0, \min\{M_X, M_Y\})$, donc $X \cap Y$ est borné. De même, $X \cup Y \subset B(0, M_X) \cup B(0, M_Y) = B(0, \max\{M_X, M_Y\})$, donc $X \cup Y$ est borné.

On peut montrer qu'une union finie de compacts est toujours compacte. Il y a deux moyens élémentaires de procéder : en généralisant la démonstration prcédente, ou par récurrence. Nous choisissons ici la récurrence. Soit $\mathcal{P}(k)$ la proposition "Une union de k compacts est compacte". La proposition $\mathcal{P}(0)$ est vraie : l'union d'aucun compact est l'ensemble vide, qui est compact (si vous avez un doute, vous êtes encouragés à initier la récurence en $k = 1$). Soit k un entier naturel ; supposons $\mathcal{P}(k)$ vraie. Soient $X_1, \cdots, X_{k+1}$ une famille de $n+1$ compacts de $\mathbb{R}^n$. Alors $\bigcup_{i=1}^{k+1} X_i = X_{k+1} \cup \bigcup_{i=1}^{k} X_i$. Par l'hypothèse de récurrence, $\bigcup_{i=1}^{k} X_i$ est compact. L'ensemble $\bigcup_{i=1}^{k+1} X_i$ est donc l'union de deux compacts, donc compact. On a donc montré que toute union finie de compacts est compacte.

Cependant, une union infinie de compact n'a aucune raison d'être ni fermée, ni bornée, donc a fortiori compacte. Posons par exemple $X_k := [1/k, k]$ pour tout $k \geq 1$. Alors $\bigcup_{k=1}^{+\infty} X_k = (0, +\infty)$, qui n'est ni fermé, ni borné (des contre-exemples similaires peuvent aussi se construire facilement en dimension supérieure).

Remarquons pour finir (sans le démontrer) qu'une intersection quelconque de compacts est compacte.

Exercice 15

On suppose la propriété suivante connue : "Si (u_n) est une suite de points d'un intervalle fermé de $\mathbb{R}$, alors il existe une sous-suite de (u_n) convergeant vers un point de cet intervalle fermé."

Soit K un compact de $\mathbb{R}^2$, et soit $(u_n)_n = ((v_n, w_n))_n$ une suite de points de K. La suite $(v_n)_n$ est une suite de points d'un intervalle fermé de $\mathbb{R}$ (l projection de K sur sa première coordonnée). On peut donc extraire une sous-suite $(u_{n_k})_k$ de $(u_n)_n$ telle que $(v_{n_k})_k$ converge vers un réel v. De même, on peut extraire une sous-suite $(w_{n_{k_i}})_i$ de $(w_{n_k})_k$ qui converge vers un réel w. Alors $(v_{n_{k_i}})_i$ converge vers v et $(w_{n_{k_i}})_i$ converge vers w, donc $(u_{n_{k_i}})_i$ converge vers (v, w). L'ensemble K étant fermé, le point (v, w) appartient à K.

Exercice 16

Soit X un compact de $\mathbb{R}^n$, et soit Y un compact de $\mathbb{R}^m$. Pour tout z dans $\mathbb{R}^{n+m} = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$, on note $z = (x, y)$, où $x \in \mathbb{R}^n$ et $y \in \mathbb{R}^m$.

Montrons tout d'abord que $X \times Y$ fermé. Soit $(z_n) = ((x_n, y_n))$ une suite d'éléments de $X \times Y$ convergeant dans $\mathbb{R}^{n+m}$ vers $z = (x, y)$. Alors (x_n) converge dans $\mathbb{R}^n$ vers x, et X étant fermé le point x appartient à X. De même, y appartient à Y. Donc z appartient à $X \times Y$. Toute suite de points de $X \times Y$ ayant une limite dans $\mathbb{R}^{n+m}$ a cette limite dans $X \times Y$, et donc $X \times Y$ est fermé.

Montrons maintenant que $X \times Y$ borné. Soient M_X et M_Y tels que $X \subset B(0, M_X)$ et $Y \subset B(0, M_Y)$. On remarque que, pour tout $z = (x, y)$ dans $\mathbb{R}^{n+m}$, on a $\|z\| = \sqrt{\|x\|^2 + \|y\|^2}$. Par conséquent, $X \times Y \subset B(0, \sqrt{M_X^2 + M_Y^2})$ et $X \times Y$ est borné. $X \times Y$ est donc compact.