

Préparation de l'examen du 20 décembre

Le devoir durera deux heures. Les exercices donnés ci-dessous sont donnés à titre d'exemples de ce que sont les attentes de l'examen.

Vous trouverez aux adresses données ci-dessous les épreuves corrigées de l'année 2009/2010 :

<http://perso.univ-rennes1.fr/bertold.wiest/enseign0910/VARTerminal.pdf>

<http://perso.univ-rennes1.fr/bertold.wiest/enseign0910/VARRatrap.pdf>

Des corrigés d'exercices ou de DS sont disponibles sur les pages

<http://perso.univ-rennes1.fr/stephane.leborgne/VAR-2013.html>

<http://perso.univ-rennes1.fr/stephane.leborgne/VAR-2012.html>

<http://perso.univ-rennes1.fr/stephane.leborgne/VAR-2011.html>

Deux questions seront tirées de la liste "Connaissances élémentaire"

<http://etudes.univ-rennes1.fr/licence-mathematiques/themes/L2/connaissances>

Le sujet pourra comporter une ou des questions du type : Énoncer le théorème des accroissements finis. Énoncer le théorème d'inversion locale. Énoncer le théorème des fonctions implicites. Énoncer le théorème des extrema liés. Énoncer l'inégalité de Cauchy-Schwarz. Donner une caractérisation d'une partie fermée de \mathbb{R}^n utilisant les suites...

Exercice 1

Montrer *en utilisant la définition* que les ensembles suivants sont ouverts :

(a) $] -2, 1[$,

(b) $\{(x, y) / (x - 1)^2 + y^2 < 4\}$.

Exercice 2

La fonction f définie sur \mathbb{R}^2 à valeur dans \mathbb{R} par

$$f(x, y) = \frac{2xy + y^2}{x^2 + y^2} \text{ si } (x, y) \neq (0, 0)$$

et $f(0, 0) = 0$ est-elle continue ? Justifiez votre réponse.

Exercice 3

Écrire la matrice jacobienne (lorsqu'elle est définie) de l'application définie sur \mathbb{R}^3 par :

$$f(x, y, z) = (2xyz, 1 + \ln x + y^2, \pi + 3x^3 + 2\sqrt{y} + z).$$

Exercice 4

Considérons la fonction définie sur \mathbb{R}^3 par

$$f(x, y, z) = xz^2 - 3xyz + 2y^2.$$

- 1) Trouver tous les points de la surface niveau 0 de f dont les deux premières coordonnées valent 1.
- 2) Trouver les équations des plans tangents à la surface en ces points (s'il y a des plans tangents).

Exercice 5

1) Montrer que l'ensemble

$$F = \{(x, y, z) / 3x^2 + 2y^2 + z^2 = 1\}$$

est un sous-ensemble compact de \mathbb{R}^3 .

2) Trouver les valeurs maximale et minimale de la fonction définie par

$$f(x, y, z) = 3x - y - z$$

sur l'ensemble F . Justifier le fait que les valeurs données sont bien les valeurs minimale et maximale de la fonction sur l'ensemble considéré. Donner aussi les points où ces valeurs sont atteintes.

Exercice 6

Étudier la nature des points stationnaires de la fonction définie sur \mathbb{R}^2 par

$$f(x, y) = x^2y^2 - x^2 - y^2.$$

Exercice 7

Trouver les valeurs maximales et minimales de la fonction définie par

$$f(x, y, z) = x + y - 2z$$

sur l'ensemble

$$\{(x, y, z) / x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 1\}.$$

Donner aussi les points où ces valeurs sont atteintes.

Exercice 8

- 1) La fonction $f(x, y, z) = 2xyz$ est-elle continue ?
- 2) Trouver les points critiques de f ? Ces points critiques sont-ils des extremums locaux ?
- 3) La restriction de cette fonction à l'ensemble $\{(x, y, z) / x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$ est-elle bornée et atteint-elle ses bornes ? Pourquoi ?
- 4) Trouver les points de cet ensemble où f est maximum et minimum et les valeurs de ces maximum et minimum.

Exercice 9

- 1) Dessiner le domaine D de \mathbb{R}^2 défini par :

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x \leq 1, y \leq 1, x + y \geq 1\}.$$

- 2) Calculer l'intégrable double suivante :

$$\iint_D (x + y)e^{-x} dx dy.$$

Exercice 10

Calculer l'intégrale triple suivante : $\iiint_V \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} dx dy dz$ où V est la boule de centre $(0,0,0)$ et de rayon R .

Exercice 11

Calculer l'aire de la partie de paraboloïde

$$\{(x, y, \frac{x^2 + y^2}{2}) \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$$

Indication : utiliser des coordonnées polaires, c.à.d. le paramétrage $f : (r, \theta) \mapsto (r \cos(\theta), r \sin(\theta), \frac{r^2}{2})$. La réponse est $\frac{2\pi(\sqrt{8}-1)}{3}$.

Exercice 12

Soit $R > 0$. Calculer l'aire de la calotte sphérique définie par :

$$\{(x, y, z) / x^2 + y^2 + z^2 = R^2, x > R/2\}.$$

Exercice 13

On considère l'arc de parabole défini par $x \mapsto (x, x^2)$ pour x compris entre -1 et 1. Calculer la longueur de cet arc. Indication : pour calculer l'intégrale (car la réponse est donnée par une intégrale) on pourra utiliser le changement de variable $2x = \sinh t$.