Préparation de l'examen du 18 décembre

Le devoir durera deux heures. Les exercices donnés ci-dessous sont donnés à titre d'exemples de ce que sont les attentes de l'examen.

Vous trouverez aux adresses données ci-dessous les épreuves corrigées de l'année 2009/2010 :
http ://perso.univ-rennes1.fr/bertold.wiest/enseign0910/VARTerminal.pdf
http ://perso.univ-rennes1.fr/bertold.wiest/enseign0910/VARRattrap.pdf

Deux questions seront tirées de la liste "Connaissances élémentaires"
http ://etudes.univ-rennes1.fr/licence-mathematiques/themes/L2/connaissances

Exercice 1
Montrer *en utilisant la définition* que les ensembles suivants sont ouverts :
(a) $]-2,1[$,
(b) $\{(x,y)\ /\ (x-1)^2+y^2<4\}$.

Exercice 2
La fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ à valeur dans $\mathbb{R}$ par

$$f(x,y)=\frac{2xy+y^2}{x^2+y^2} \text{ si } (x,y)\neq(0,0)$$

et $f(0,0)=0$ est-elle continue ? Justifiez votre réponse.

Exercice 3
Écrire la matrice jacobienne (lorsqu'elle est définie) de l'application définie sur $\mathbb{R}^3$ par :

$$f(x,y,z)=(2xyz, 1+\ln x+y^2, \pi+3x^3+2\sqrt{y}+z).$$

Exercice 4
Considérons la fonction définie sur $\mathbb{R}^3$ par

$$f(x,y,z)=xz^2-3xyz+2y^2.$$

1) Trouver tous les points de la surface niveau 0 de f dont les deux premières coordonnées valent 1.
2) Trouver les équations des plans tangents à la surface en ces points (s'il y a des plans tangents).

Exercice 5
1) Montrer que l'ensemble

$$F=\{(x,y,z)\ /\ 3x^2+2y^2+z^2=1\}$$

est un sous-ensemble compact de $\mathbb{R}^3$.
2) Trouver les valeurs maximale et minimale de la fonction définie par

$$f(x,y,z)=3x-y-z$$

sur l'ensemble F. Justifier le fait que les valeurs données sont bien les valeurs minimale et maximale de la fonction sur l'ensemble considéré. Donner aussi les points où ces valeurs sont atteintes.

Exercice 6
Étudier la nature des points stationnaires de la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par

$$f(x,y)=x^2y^2-x^2-y^2.$$

Exercice 7
Trouver les valeurs maximales et minimales de la fonction définie par

$$f(x,y,z)=x+y-2z$$

sur l'ensemble

$$\{(x,y,z) \ / \ x^2+2y^2+3z^2=1\}.$$

Donner aussi les points où ces valeurs sont atteintes.

Exercice 8
1) La fonction $f(x,y,z)=2xyz$ est-elle continue ?
2) Trouver les points critiques de f ? Ces points critiques sont-ils des extremums locaux ?
3) La restriction de cette fonction à l'ensemble $\{(x,y,z) \ / \ x^2+y^2+z^2 \leq 1\}$ est-elle bornée et atteint-elle ses bornes ? Pourquoi ?
4) Trouver les points de cet ensemble où f est maximum et minimum et les valeurs de ces maximum et minimum.

Exercice 9
1) Dessiner le domaine D de $\mathbb{R}^2$ défini par :

$$D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \ / \ x\leq 1, y\leq 1, x+y\geq 1\}.$$

2) Calculer l'intégrable double suivante :

$$\iint_D (x+y)e^{-x}dxdy.$$

Exercice 10
Calculer l'intégrale triple suivante : $\displaystyle\iiint_V \sqrt{x^2+y^2+z^2}\ dx\ dy\ dz$ où V est la boule de centre (0,0,0) et de rayon R.

Exercice 11
Calculer l'aire de la partie de paraboloide

$$\{(x,y,\frac{x^2+y^2}{2}) \mid x^2+y^2\leqslant 1\}$$

Indication : utiliser des coordonnées polaires, c.à.d. le paramétrage $f\ :\ (r,\theta)\mapsto(r\ \cos(\theta), r\ \sin(\theta), \frac{r^2}{2})$. La réponse est $\frac{2\pi(\sqrt{8}-1)}{3}$.

Exercice 12
On considère le champ de vecteurs F défini sur $\mathbb{R}^2$ par :

$$F(x,y)=\begin{pmatrix} y-1 \\ x \end{pmatrix}.$$

1) Calculer l'intégrale curviligne de F le long du chemin paramétré par

$$x(t)=2\cos(t), \quad y(t)=\sin(t), \quad t\in[0,2\pi]$$

en utilisant la définition d'une intégrale curviligne.
2) Dessiner grossièrement la courbe. Pouvait-on obtenir le résultat de la question 1) d'une autre façon ?

Exercice 13
Soit $R>0$. Calculer l'aire de la calotte sphérique définie par :

$$\{(x,y,z) \ / \ x^2+y^2+z^2=R^2,\ x>R/2\}.$$

Exercice 14
On considère l'arc de parabole défini par $x\mapsto(x,x^2)$ pour x compris entre -1 et 1. Calculer la longueur de cet arc. Indication : pour calculer l'intégrale (car la réponse est donnée par une intégrale) on pourra utiliser le changement de variable $2x=\sinh t$.