

Feuille 4

Exercice 1. Considérons $F(t) = \left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}, 1 \right)$.

Montrer que l'angle entre $F(t)$ et $F'(t)$ est constant.

Exercice 2. Considérons l'hélice $F(t) = (a \cos t, a \sin t, bt)$ avec $a, b > 0$.

Montrer que l'angle θ entre l'axe Oz et la droite tangente à l'hélice est constant et $\cos \theta = b/\sqrt{a^2 + b^2}$.

Exercice 3. Soit $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^m$ une courbe différentiable telle que $F(t_0) = X_0 \neq \vec{0}$ soit le point le plus proche de l'origine.

Montrer que $F'(t_0)$ est orthogonal à $F(t_0)$.

Exercice 4. Si $F(t)$ et $\|F(t)\|$ sont intégrables sur $[a, b]$, montrer que :

$$\left\| \int_a^b F(t) dt \right\| \leq \int_a^b \|F(t)\| dt$$

En déduire que le chemin le plus court entre deux points A et B dans \mathbb{R}^n est le segment $[AB]$.

Exercice 5. Considérons l'hélice $\gamma(t) = (\cos t, \sin t, t)$.

1. Calculer l'abscisse curviligne $s(t) = \int_0^t \|\gamma'(u)\| du$.
2. Trouver la paramétrisation unitaire $\gamma(s) = \gamma(t(s))$ de l'hélice.
3. Calculer la courbure $\rho(s)$ de $\gamma(s)$.

Exercice 6. Soit $\gamma(s)$ une courbe paramétrée unitaire dans le plan \mathbb{R}^2 .

Montrer que $\rho(s) = \left| \frac{d\phi}{ds} \right|$ où $\phi(s)$ est l'angle entre le vecteur tangent $\gamma'(s)$ et le vecteur $e_1 = (1, 0)$.

Exercice 7. Soit $\gamma(t) \in \mathbb{R}^3$ une courbe paramétrée.

Il est parfois utile de pouvoir calculer ρ directement, sans passer par une paramétrisation unitaire de γ .

Montrer que $\rho = \|\gamma'(t) \wedge \gamma''(t)\| / \|\gamma'(t)\|^3$.

Exercice 8. Trouver la courbure de la spirale $\gamma(t) = (e^{-t} \cos t, e^{-t} \sin t, 0)$.

Que se passe-t-il lorsque $t \rightarrow \infty$?

Exercice 9. Soit $\gamma(s) \subset \mathbb{R}^3$ telle que $\|\gamma(s)\| = \|\gamma'(s)\| = 1, \forall s$. (Géométriquement, ceci veut dire que la courbe γ se promène à vitesse 1 sur la sphère de rayon 1 et de centre $(0, 0, 0)$.)

Montrer que $\rho(s) \geq 1$.

(Indication : utiliser le produit scalaire et l'inégalité de Cauchy-Schwarz)

Exercice 10. Trouver les points de \mathbb{R}^2 tels que $f(x, y) = (x^2 - y^2, 2xy)$ soit localement inversible.

Exercice 11. Montrer que $f(x, y) = xe^y - y + 1 = 0$ définit une fonction $y = \varphi(x)$ implicitement en $(-1, 0)$ et calculer $\varphi'(-1)$.

Exercice 12. Considérons la fonction $f(u, v) = (x, y)$ avec $x = (v^2 - u^2)/2$ et $y = uv$.

1. Déterminer en quels points cette fonction est localement inversible.

2. Nous observons que $f(1, 2) = (\frac{3}{2}, 2)$ et que f est localement inversible en $(1, 2)$. Dans un voisinage de $(u, v) = (1, 2)$ on peut donc écrire $u = u(x, y)$ et $v = v(x, y)$. Donner les valeurs de $\partial u/\partial x, \partial u/\partial y, \partial v/\partial x$ et $\partial v/\partial y$ au point $(\frac{3}{2}, 2)$.

Exercice 13. Déterminer tous les extrema locaux et absolus ainsi que les points de selle de la fonction $f(x, y) = xy(1 - x^2 - y^2)$ sur le carré $\{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$.

Exercice 14. La température sur la sphère $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ est donnée par $T(x, y, z) = 2 + xz + y^2$.

Trouver les points les plus chauds et ceux les plus froids.

Exercice 15. Cet exercice a pour but de démontrer l'inégalité arithmético-géométrique :

$$\sqrt[n]{a_1 \cdots a_n} \leq \frac{a_1 + \cdots + a_n}{n} \quad \text{pour des nombres } a_i \geq 0$$

1. Utiliser la méthode de Lagrange pour trouver la valeur maximale de $f(x_1, \dots, x_n) = x_1^2 \cdots x_n^2$ sur la sphère de rayon $r > 0 : x_1^2 + \cdots + x_n^2 = r^2$. Pourquoi f admet-elle une valeur maximale ?

2. Dédire de la question précédente que $x_1^2 \cdots x_n^2 \leq \left(\frac{x_1^2 + \cdots + x_n^2}{n}\right)^n$.

3. En déduire l'inégalité arithmético-géométrique.

Exercice 16. Considérer la fonction $f(x, y) = x^3 - 3x^2 + y^2$.

1. Déterminer les points critiques de f ainsi que leur nature.

2. Trouver les extrema de f sur le carré $\{(x, y) \mid -2 \leq x, y \leq 2\}$.

Exercice 17. Trouver la valeur maximale de $f(x, y, z) = x + z$ sur la sphère $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ (par la méthode de Lagrange).

Exercice 18. Les revenus de trois ménages sont : 2, 1, 1. Leurs fonctions d'utilité sont toutes identiques : $x \mapsto \sqrt{x}$. On souhaite distribuer une unité de revenu supplémentaire. Comment faut-il la répartir entre les trois ménages pour que la somme des utilités soit la plus grande possible ?

Exercice 19. On considère un ensemble de n agents économiques. Ils ont tous la même fonction d'utilité $x \mapsto x^\alpha$. Pour quelle répartition des revenus la somme des fonctions d'utilité est-elle maximale ?