Quelques notes de cours et des indications sur quelques exercices

Ce qui suit correspond aux trois premiers cours (cela prend en compte le prochain cours) et constitue ce qui est au programme du premier DS qui se tiendra le 21 octobre.

1 Matrices, espaces vectoriels, applications linéaires

1.1 Matrices

Définition 1.1. *Une matrice est un tableau rectangulaire de nombres (entiers, réels, complexes).*

Exemples 1.2.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} \quad c = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 4 \\ 10 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Définition 1.3. *La taille d'une matrice est son nombre de lignes et son nombre de colonnes. Si une matrice A a n lignes et m colonnes, on dit que A est de taille $n \times m$. Lorsqu'une matrice n'a qu'une ligne on dit que c'est un vecteur ligne, lorsqu'elle n'a qu'une colonne que c'est un vecteur colonne.*

Exemples 1.4. *Pour les exemples ci-dessus : A est de taille 3×5, C est de taille 2×2, T est de taille 5×5, x et c sont de taille 5×1, b est de taille 3×1. Les matrices x, c, b sont des vecteurs colonnes.*

Définition 1.5. *Une matrice est dite carrée si elle a autant de lignes que de colonnes. Une matrice carrée A est dite diagonale si $a_{ij} = 0$ si $i \neq j$. Elle est dite triangulaire supérieure si $a_{ij} = 0$ si $i > j$. Elle est dite triangulaire inférieure si $a_{ij} = 0$ si $i < j$.*

Exemples 1.6. *Pour les exemples ci-dessus : les matrices C, T et D sont carrées ; T est triangulaire supérieure, D est diagonale.*

Définition 1.7. *Soit A une matrice. La transposée de A est la matrice ${}^tA$ dont les coefficients sont donnés par*

$$({}^tA)_{ij} = A_{ji}.$$

La transposée de A est la matrice dont les lignes sont les colonnes de A.

Exemple 1.8. *La transposée de la matrice A prise en exemple ci-dessus est*

$${}^tA = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Définition 1.9. *Soient A et B deux matrices* **de même taille**. *La somme de A et B est la matrice $A+B$ dont les coefficients sont donnés par*

$$(A+B)_{ij} = A_{ij} + B_{ij}.$$

Exemple 1.10.

Exemple 1.11. *Soient les deux matrices suivantes :*

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Leur somme est

$$C + E = \begin{pmatrix} 0+2 & 1+0 \\ -1+1 & 0+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Proposition 1.12. *L'addition est associative et commutative ; d'autre part la matrice nulle (c'est-à-dire dont les coefficients sont tous nuls) est un élément neutre pour l'addition : si A, B, C sont trois matrices de même taille et 0 est la matrice nulle de cette taille, on a*

$$(A+B)+C = A+(B+C), \quad A+B = B+A, \quad A+0 = A.$$

Définition 1.13. *Soient A et B deux matrices de tailles $m \times n$ et $n \times p$ respectivement (autrement dit A a autant de colonnes que B a de lignes). Le produit AB de A et B est la matrice dont les coefficients sont donnés par*

$$(AB)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} A_{ik} B_{kj}.$$

La matrice AB est de taille $m \times p$.

Exemples 1.14. *Reprenons les deux matrices C et E de l'exemple précédent. Elles sont de taille 2×2. Les deux produits CE et EC sont définis :*

$$CE = \begin{pmatrix} 0.2+1.1 & 0.0+1.1 \\ (-1).2+0.1 & (-1).0+0.1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix},$$

$$EC = \begin{pmatrix} 2.0+0.(-1) & 2.1+0.0 \\ 1.0+1.(-1) & 1.1+1.0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

On voit en passant que le produit n'est pas commutatif.

Les vecteurs de la base canonique de $\mathbb{R}^5$ sont

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad e_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad e_5 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Les vecteurs colonnes de A (la matrice prise en exemple plus haut) sont les résultats de la multiplication de A par ces vecteurs de la base canonique. Par exemple

$$A.e_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$A.e_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

On peut obtenir de manière analogue les vecteurs ligne en multipliant à gauche par des vecteurs lignes ayant une seule coordonnées 1 et les autres 0 :

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} .A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Soient A et B deux matrices de tailles $m \times n$ et $n \times p$ respectivement. Le produit AB est bien défini (de taille $m \times p$). Appelons $V_1, \dots, V_p$ les vecteurs colonne de B. Alors le j-ème vecteur colonne de AB est AV_j.

Exemple 1.15. *Considérons les matrices*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Calculons AB

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 0 & 2 & 1 \\ -2 & 3 & 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Le deuxième vecteur colonne de B est

$$V_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

et on a

$$A.V_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Le deuxième vecteur colonne de AB est bien égal à AV_2.

Soit $A = (a_{ij})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m}$ et $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_m \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m$. Alors on définit

$$A.X = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots a_{1m}x_m \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots a_{2m}x_m \\ \dots \\ a_{n1}x_1 + +a_{n2}x_2 + \dots a_{nm}x_m \end{pmatrix}$$

Le vecteur (colonne) $A.X$ est dans $\mathbb{R}^n$.

Définition 1.16. *On appelle matrice identité une matrice carrée diagonale dont les éléments diagonaux sont 1. On note ces matrices I_2, I_3,... (l'indice donne la taille) ou I (si la taille n'est pas ou n'a pas besoin d'être précisée).*

Par exemple, on a

$$I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Proposition 1.17. *La multiplication de matrices est associative et les matrices identité sont des éléments neutres pour la multiplication : si A, B, C sont trois matrices de tailles $m \times n$, $n \times p$ et $p \times q$ (autrement de tailles assurant que les produits écrits ci-dessous soient définis), on a*

$$(AB)C = A(BC), \quad I_m A = A = AI_n.$$

L'associativité permet d'écrire un produit de plusieurs matrices sans utiliser de parenthèses : par exemple ABC (car le résultat est le même si on calcule $(AB)C$ (d'abord AB) ou $A(BC)$ (d'abord BC)).

Proposition 1.18. *La multiplication de matrices est par rapport à l'addition : si A, B, C sont trois matrices de tailles $m \times n$, $n \times p$ et $n \times p$ (autrement de tailles assurant que les produits et sommes écrits ci-dessous soient définis), on a*

$$A(B + C) = AB + AC.$$

Définition 1.19. *On dit qu'une matrice* **carrée** *A est inversible s'il existe une matrice B (de même taille) telle que*

$$AB = BA = I$$

Cette matrice B s'appelle alors l'inverse de A et est notée A^{-1}.

Proposition 1.20. *Soient A et B deux matrices inversibles de même taille. Le produit AB est inversible et*

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}.$$

Pour le voir, il suffit d'écrire le produit

$$AB(B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1} = AIA^{-1} = AA^{-1} = I,$$

la première égalité vient du fait que le produit est associatif ; en général on ne peut pas changer l'ordre des termes d'un produit, mais on peut grouper les élément d'un produit comme on le souhaite sans changer le résultat.

Si A est une matrice carrée on peut la multiplier par elle-même autant de fois qu'on veut ; on obtient ainsi les puissances de A, notées A^2, A^3, etc... A première vue il est difficile de calculer les puissances d'une matrice. Pour certaines matrices c'est facile, par exemple pour les matrices diagonales :

$$D = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}, \quad D^k = \begin{pmatrix} a^k & 0 & 0 \\ 0 & b^k & 0 \\ 0 & 0 & c^k \end{pmatrix}.$$

On dit qu'une matrice carrée A est diagonalisable si on peut trouver deux matrices P et D de même taille que A telles que P soit inversible, D soit diagonale et

$$D = P^{-1}AP.$$

C'est alors facile de calculer les puissances de A. Remarquons que l'égalité précédente permet d'écrire A en fonction de D. En multipliant à gauche par P et à droite par P^{-1}, on obtient

$$PDP^{-1} = P(P^{-1}AP)P^{-1} = (PP^{-1})A(PP^{-1}) = IAI = A.$$

Calculons maintenant les puissances de A :

$$A^2 = (PDP^{-1})(PDP^{-1}) = PD(P^{-1}P)DP^{-1} = PDIDP^{-1} = PDDP^{-1} = PD^2P^{-1},$$

$$A^3 = AA^2 = (PDP^{-1})(PD^2P^{-1}) = PD(P^{-1}P)D^2P^{-1} = PDD^2P^{-1} = PD^3P^{-1},$$

puis, par récurrence, pour tout entier $k \geq 1$,

$$A^k = PD^kP^{-1}.$$

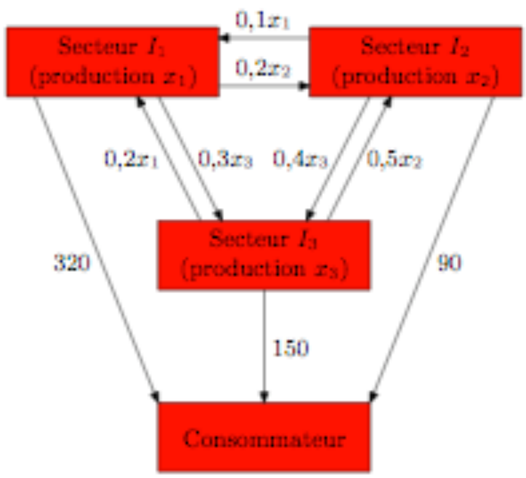
Or on a vu qu'il était facile de calculer les puissances d'une matrice diagonale.

Dans la suite, plutôt que de dire qu'une matrice A est de taille $n \times m$, on dira parfois $A \in M_{n\times m}(\mathbb{R})$. Autrement dit on désignera par $M_{n\times m}(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices A de taille $n \times m$.

1.2 Quelques exemples d'utilisation des matrices

1.2.1 Matrice de Léontief (ou d'entrée-sortie)

1. Considérons une économie avec trois secteurs industriels, I_1 , I_2 , I_3. Quelles quantités x_1, x_2, x_3 doivent-elles produire pour satisfaire à la fois la demande des consommateurs et celle des autres secteurs ? La demande requise de chaque secteur est représentée sur la figure ci-dessous.



2. Lorsqu'on considère un modèle entrée-sortie avec plus de trois secteurs industriels, il devient malaisé de représenter les demandes par un diagramme comme celui de la question précédente. Supposons qu'il y ait des secteurs $I_1, \ldots, I_n$, de productions

$x_1, ..., x_n$. Les vecteurs de production x, de demande des consommateurs b et de demande pour le secteur I_j sont

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ b_n \end{pmatrix}, \quad v_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \cdot \\ \cdot \\ a_{nj} \end{pmatrix},$$

où b_i est la demande des consommateurs sur le secteur $I_i$et a_{ij} est la demande du secteur I_j au secteur I_i, par euro de production du secteur I_j.

a. Trouver les quatre vecteurs de demandes pour l'économie de la question 1).

b. Quelle est la signification économique de $x_j v_j$?

c. Quelle est la signification économique de $x_1v_1 + x_2v_2 + \ldots + x_nv_n + b$?

d. Quelle est la signification économique de l'équation $x_1v_1+x_2v_2+\ldots+x_nv_n+b = x$?

3. Considérons l'économie d'Israël en 1958. Les trois secteurs industriels considérés sont : I_1 agriculture, I_2 biens manufacturés, I_3 énergie. Production et demande sont mesurés en millions de livres israéliennes, la monnaie d'Israël à cette époque. On nous dit que

$$b = \begin{pmatrix} 13,2 \\ 17,6 \\ 1,8 \end{pmatrix}, \quad v_1 = \begin{pmatrix} 0,293 \\ 0,014 \\ 0,044 \end{pmatrix} \quad v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0,207 \\ 0,001 \end{pmatrix} \quad v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0,017 \\ 0,216 \end{pmatrix}$$

a. Pourquoi la première composante des vecteurs v_2 et v_3 est-elle nulle ?

b. Trouver les productions x_1, x_2, x_3 qui satisfont la demande.

Considérons les matrices suivantes

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0,2 & 0,3 \\ 0,1 & 0 & 0,4 \\ 0,2 & 0,5 & 0 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

Ce qu'indique la figure est que lorsque les productions des trois secteurs sont x_1, x_2, x_3, les consommations en les produits des trois secteurs sont

$$AX = \begin{pmatrix} 0,2x_2 + 0,3x_3 \\ 0,1x_1 + 0,4x_3 \\ 0,2x_1 + 0,5x_2 \end{pmatrix}.$$

Si les productions des trois secteurs sont x_1, x_2, x_3, alors ce que les trois secteurs offrent aux consommateurs est ce qui reste

$$X - AX = (I - A)X.$$

Cela signifie que si les demandes des consommateurs sont 320, 90, 150 alors le vecteur des productions$X$ doit vérifier l'égalité

$$X - AX = \begin{pmatrix} 320 \\ 90 \\ 150 \end{pmatrix}.$$

Cette égalité matricielle est un système linéaire

$$\begin{cases} x_1 & -0,2x_2 & -0,3x_3 & = 320 \\ -0,1x_1 & +x_2 & -0,4x_3 & = 90 \\ -0,2x_1 & -0,5x_2 & +x_3 & = 150 \end{cases}$$

qu'on peut résoudre comme on le veut. Une façon de le faire est de calculer l'inverse de la matrice $I - A$ car

$$X = (I - A)^{-1} \begin{pmatrix} 320 \\ 90 \\ 150 \end{pmatrix}.$$

Le calcul d'inverses de petites matrices se fait très bien avec un ordinateur :

$$(I - A)^{-1} \simeq \begin{pmatrix} 1,161 & 0,508 & 0,552 \\ 0,261 & 1,364 & 0,624 \\ 0,363 & 0,784 & 1,422 \end{pmatrix}.$$

On obtient

$$X = \begin{pmatrix} 500 \\ 300 \\ 400 \end{pmatrix}.$$

Voici un autre façon de raisonner. Les trois secteurs veulent répondre à la demande. Chacun produit la quantité souhaité 320, 90, 150 pour chacun des trois secteurs. Mais on constate qu'une partie a été utilisée pour produire ces quantités. La quantité qui reste disponible n'est pas celle demandée mais

$$\begin{pmatrix} 320 \\ 90 \\ 150 \end{pmatrix} - A \begin{pmatrix} 320 \\ 90 \\ 150 \end{pmatrix}.$$

Les trois secteurs décident alors de compléter et produisent ce qui manque. Mais là encore une partie disparaît en consommation intermédiaire. Après cette deuxième étape les trois secteurs ont produit

$$\begin{pmatrix} 320 \\ 90 \\ 150 \end{pmatrix} + A \begin{pmatrix} 320 \\ 90 \\ 150 \end{pmatrix}.$$

et les productions disponibles pour répondre à la demande sont données par

$$\begin{pmatrix} 320 \\ 90 \\ 150 \end{pmatrix} - A \begin{pmatrix} 320 \\ 90 \\ 150 \end{pmatrix} + A \begin{pmatrix} 320 \\ 90 \\ 150 \end{pmatrix} - A^2 \begin{pmatrix} 320 \\ 90 \\ 150 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 320 \\ 90 \\ 150 \end{pmatrix} - A^2 \begin{pmatrix} 320 \\ 90 \\ 150 \end{pmatrix}.$$

On peut ainsi continuer à compléter ce qui manque. Au bout de k étapes les trois secteurs ont produit

$$\begin{pmatrix} 320 \\ 90 \\ 150 \end{pmatrix} + A \begin{pmatrix} 320 \\ 90 \\ 150 \end{pmatrix} + A \begin{pmatrix} 320 \\ 90 \\ 150 \end{pmatrix} + \ldots + A^{k-1} \begin{pmatrix} 320 \\ 90 \\ 150 \end{pmatrix}.$$

et les productions disponibles pour répondre à la demande sont données par

$$\begin{pmatrix} 320 \\ 90 \\ 150 \end{pmatrix} - A^k \begin{pmatrix} 320 \\ 90 \\ 150 \end{pmatrix}.$$

Si A^k tend vers 0 on voit qu'en répétant à l'infini le procédé on "finit" par répondre à la demande en produisant

$$\sum_{k=0}^{\infty} A^k \begin{pmatrix} 320 \\ 90 \\ 150 \end{pmatrix}.$$

Les deux méthodes de calcul proposées doivent aboutir au même résultat ; cela signifie que si A^k tend vers 0 alors

$$(I - A)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} A^k.$$

On peut le voir aussi de manière formelle. Multiplions $\sum_{k=0}^{\infty} A^k$ par $I - A$, on obtient

$$\begin{aligned} (I - A)(\sum_{k=0}^{\infty} A^k) &= \sum_{k=0}^{\infty} A^k - A \sum_{k=0}^{\infty} A^k \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} A^k - \sum_{k=0}^{\infty} A^{k+1} \\ &= I + A + A^2 + A^3 \ldots - (A + A^2 + A^3 \ldots) \\ &= I. \end{aligned}$$

1.2.2 Evolution de parts de marché

Considérons la matrice suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 0,6 & 0,15 & 0,05 \\ 0,2 & 0,7 & 0,05 \\ 0,2 & 0,15 & 0,9 \end{pmatrix}$$

Disons que les nombres qu'elle contient ont la signification suivante : trois entreprises se partagent un marché, on suppose que chaque année 60% des clients de l'entreprise 1 (c'est le nombre 0,6) reste avec cette entreprise, 20% passent à l'entreprise 2 et 20% à l'entreprise 3 (ce sont les deux 0,2) ; de manière analogue 70% des clients de l'entreprise 2 restent avec l'entreprise 2 et la moitié du reste (15%) passe à 1 l'autre moitié du reste à 3 ; enfin 90% des clients de l'entreprise 3 restent avec l'entreprise 3 et la moitié du reste (5%) passe à 1 l'autre moitié du reste à 2. On cherche à savoir comment évoluent les parts de marché avec le temps. Imaginons que la répartition soit donnée à une certaine année par les trois nombres positifs ou nuls $p_1^{(0)}$, $p_2^{(0)}$, $p_3^{(0)}$ avec $p_1^{(0)} + p_2^{(0)} + p_3^{(0)} = 1$ ($p_i^{(0)}$ est la part de marché de l'entreprise i à l'année 0). La part de marché à l'année 1 de l'entreprise 1 sera alors :

$$p_1^{(1)} = 0,6.p_1^{(0)} + 0,15.p_2^{(0)} + 0,05.p_3^{(0)}.$$

En effet, la nouvelle part de marché est constituée des clients de 1 qui restent, de ceux qui viennent de 2 et de ceux qui viennent de 3. De façon analogue, on a :

$$p_2^{(1)} = 0,2.p_1^{(0)} + 0,7.p_2^{(0)} + 0,05.p_3^{(0)},$$

$$p_3^{(1)} = 0,2.p_1^{(0)} + 0,15.p_2^{(0)} + 0,9.p_3^{(0)}.$$

Introduisons les vecteurs

$$P^{(0)} = \begin{pmatrix} p_1^{(0)} \\ p_2^{(0)} \\ p_3^{(0)} \end{pmatrix}, \text{ et } P^{(1)} = \begin{pmatrix} p_1^{(1)} \\ p_2^{(1)} \\ p_3^{(1)} \end{pmatrix} \text{ et } P^{(k)} = \begin{pmatrix} p_1^{(k)} \\ p_2^{(k)} \\ p_3^{(k)} \end{pmatrix}$$

donnant les répartitions du marché aux années 0, 1 et k. Les égalités précédentes s'écrivent matriciellement sous la forme

$$P^{(1)} = AP^{(0)}.$$

On a aussi

$$P^{(2)} = AP^{(1)} = AAP^{(0)} = A^2P^{(0)},$$

et, pour tout entier k,

$$P^{(k)} = A^kP^{(0)}.$$

Ce sont donc les puissances de k qui permettent de décrire l'évolution des parts de marchés. Calculons quelques unes de ces puissances :

$$A = \begin{pmatrix} 0,6 & 0,15 & 0,05 \\ 0,2 & 0,7 & 0,05 \\ 0,2 & 0,15 & 0,9 \end{pmatrix} \quad A^2 = \begin{pmatrix} 0,4 & 0,2025 & 0,0825 \\ 0,27 & 0,5275 & 0,09 \\ 0,33 & 0,27 & 0,8275 \end{pmatrix}$$

$$A^{10} = \begin{pmatrix} 0,166 & 0,169 & 0,152 \\ 0,225 & 0,230 & 0,200 \\ 0,609 & 0,600 & 0,648 \end{pmatrix} \quad A^{20} = \begin{pmatrix} 0,158 & 0,158 & 0,158 \\ 0,211 & 0,211 & 0,210 \\ 0,631 & 0,630 & 0,632 \end{pmatrix}$$

$$A^{50} = \begin{pmatrix} 0,15779 & 0,15779 & 0,15779 \\ 0,21053 & 0,21053 & 0,21053 \\ 0,63158 & 0,63158 & 0,63158 \end{pmatrix}$$

(les chiffres sont arrondis au millième pour A^{10} et A^{20}, au cent millième pour A^{50}). On constate que les puissances se stabilisent à une valeur très proche de A^{50}, pour tout $k \geq 50$,

$$A^k \simeq \begin{pmatrix} 0,15779 & 0,15779 & 0,15779 \\ 0,21053 & 0,21053 & 0,21053 \\ 0,63158 & 0,63158 & 0,63158 \end{pmatrix}$$

et que les colonnes de cette matrice sont identiques. Pour $k \geq 50$, on a

$$P^{(k)} = A^k P^{(0)} \simeq \begin{pmatrix} 0,15779 & 0,15779 & 0,15779 \\ 0,21053 & 0,21053 & 0,21053 \\ 0,63158 & 0,63158 & 0,63158 \end{pmatrix} P^{(0)} = \begin{pmatrix} 0,15779 \\ 0,21053 \\ 0,63158 \end{pmatrix}.$$

Autrement dit quelle que soit la répartition du marché à l'année 0, le mécanisme d'évolution aboutit à la même répartition lorsque le temps grandit beaucoup (répartition donnée par les colonnes de la limite de A^k quand k tend vers l'infini.

L'exercice suivant permet d'établir ce comportement limite des puissances de A dans un cadre plus général.

Exercice 1. *Soit A une matrice carrée $n \times n$ ($n \geq 2$) dont les coefficients sont tous strictement positifs et telle que les sommes des éléments des colonnes soient égales à 1. Notons d le plus petit coefficient de A.*

1. *Montrer que d est inférieur ou égal à $1/2$.*
2. *Pour tout Y vecteur $1 \times n$ dont les coefficients sont positifs ou nuls, notons $m(Y)$ le plus petit coefficient de Y, $M(Y)$ le plus grand. Montrer que, pour tout Y vecteur ligne positif ou nul, on a*
$$M(YA) - m(YA) \leq (1 - 2d)(M(Y) - m(Y)).$$
3. *En déduire que YA^k converge vers un vecteur ligne dont toutes les coordonnées sont égales entre elles (lorsque k tend vers l'infini).*
4. *En déduire que A^k converge vers une matrice dont toutes les colonnes sont égales, puis que l'équation $AX = X$ a une solution X positive.*

Cet exercice a été traité en TD. Voici quelques éléments de réponses supplémentaires.

Commençons par une remarque sur la notion de moyenne. Par exemple, je vous ai dit que votre note finale en Algèbre III serait calculée comme la moyenne de quatre notes n_1, n_2, n_3, n_4 avec les coefficients 1, 3, 3, 6. Autrement dit la note finale sera

$$N = \frac{1}{13}(n_1 + 3n_2 + 3n_3 + 6n_4) = \frac{1}{13}n_1 + \frac{3}{13}n_2 + \frac{3}{13}n_3 + \frac{6}{13}n_4.$$

Imaginons qu'un étudiant vous dise que sa meilleure note est M et sa moins bonne m. Que pouvez-vous dire de sa moyenne ? Vous pouvez dire que sa moyenne est comprise entre m et M. Cela s'écrit facilement

$$N = \frac{1}{13}n_1 + \frac{3}{13}n_2 + \frac{3}{13}n_3 + \frac{6}{13}n_4 \leq \frac{1}{13}M + \frac{3}{13}M + \frac{3}{13}M + \frac{6}{13}n_M = M,$$

car chaque note est majorée par M et les coefficients sont positifs de somme 1. On a de même

$$N = \frac{1}{13}n_1 + \frac{3}{13}n_2 + \frac{3}{13}n_3 + \frac{6}{13}n_4 \geq \frac{1}{13}m + \frac{3}{13}m + \frac{3}{13}m + \frac{6}{13}m = m.$$

Mais vous pouvez dire un peu mieux. La moins bonne moyenne possible est obtenue lorsque M est affectée du plus petit coefficient ($n_1 = M$) et toutes les autres notes sont minimales ($n_2 = n_3 = n_4 = m$), autrement dit

$$N \geq \frac{1}{13}M + \frac{3}{13}m + \frac{3}{13}m + \frac{6}{13}m = \frac{1}{13}M + \frac{12}{13}m.$$

Comment le voir ? Ce qui est sûr c'est que m et M figurent parmi les notes. En remplaçant les deux qui ne sont peut-être pas égales à m ou M par m, on diminue la moyenne. On a donc

$$N \geq \alpha M + (1-\alpha)m = m + \alpha(M-m),$$

où α est le (ou un) coefficient de la note maximale M. Comme $M - m > 0$, la deuxième expression montre que N est minimale quand α est minimal, c'est-à-dire ici quand $\alpha = 1/13$. On montre de la même façon que

$$N \leq \frac{1}{13}m + \frac{12}{13}M.$$

Revenons à l'exercice.

1. Par hypothèse les sommes des coefficients des colonnes de la matrice A sont égales à 1. Pour tout j, on a

   $$a_{1j} + a_{2j} + \ldots + a_{nj} = 1.$$

   En divisant par n on obtient

   $$\frac{1}{n}a_{1j} + \frac{1}{n}a_{2j} + \ldots + \frac{1}{n}a_{nj} = \frac{1}{n}.$$

   La moyenne des nombres a_{ij} est égale à $1/n$. Mais la moyenne est supérieure ou égale au plus petit des nombres a_{ij} (ici c'est i qui varie). Cela signifie que chaque colonne comporte au moins un nombre inférieur ou égal à $1/n$. Comme $n \geq 2$, d le plus petit des coefficients de la matrice A est inférieur à $1/2$.

2. Le j-ème coefficient de YA est donnée par la somme

$$(YA)_j = y_1 a_{1j} + y_2 a_{2j} + \ldots + y_{n-1} a_{(n-1)j} + y_n a_{nj} = a_{1j} y_1 + a_{2j} y_2 + \ldots + a_{(n-1)j} y_{n-1} + a_{nj} y_n.$$

Comme les nombres $a_{1j}, a_{2j}, \ldots, a_{(n-1)j}, a_{nj}$ sont positifs de somme égale à 1, le j-ème coefficient de YA est une moyenne calculée avec les coefficients a_{ij} (i variant). Comme on l'a remarqué plus haut une telle moyenne est inférieure à celle obtenue en prenant la valeur minimale $m(Y)$ avec le plus petit coefficient et toutes les autres valeurs égales à la valeurs maximales $M(Y)$; on obtient

$$(YA)_j \leq (\min_i a_{ij}) m(Y) + (1 - \min_i a_{ij}) M(Y).$$

Comme $d \leq \min_i a_{ij}$, cela entraîne

$$(YA)_j \leq d m(Y) + (1-d) M(Y).$$

De manière analogue on a

$$(YA)_j \geq d M(Y) + (1-d) m(Y).$$

Tous les coefficients de YA sont donc compris entre $dM(Y) + (1-d)m(Y)$ et $dm(Y) + (1-d)M(Y)$:

$$dM(Y) + (1-d)m(Y) \leq m(YA) \leq M(YA) \leq dm(Y) + (1-d)M(Y),$$

en particulier

$$\begin{aligned} &M(YA) - m(YA) \\ &\quad \leq dm(Y) + (1-d)M(Y) - dM(Y) - (1-d)m(Y) \\ &\quad \leq (1-2d)(M(Y) - m(Y)). \end{aligned}$$

3. Comme dans la question précédente on voit que, pour tout k, les coefficients de YA^{k+1} sont des moyennes des coefficients de YA^k et on en déduit (comme dans la question 2.) que

$$M(YA^{k+1}) - m(YA^{k+1}) \leq (1-2d)(M(YA^k) - m(YA^k)).$$

Par ailleurs on a aussi

$$m(YA^k) \leq m(YA^{k+1}) \leq M(YA^{k+1}) \leq M(YA^k).$$

Par récurrence on montre que pour tout k, on a

$$(M(YA^k) - m(YA^k)) \leq (1-2d)^k (M(YA) - m(YA)).$$

Comme $1-2d$ appartient à $[0, 1[$, $(1-2d)^k$ tend vers 0. Les deux suites $(m(YA^k))_k$ et $(M(YA^k))_k$ sont donc adjacentes. Elles convergent vers une limite commune. Tous les coefficients de YA^k étant compris entre $m(YA^k)$ et $M(YA^k)$, le théorème des gendarmes montre que tous les coefficients de YA^k vers une même limite.

4. Les vecteurs ligne de la matrice A^k peuvent s'écrire comme les produits Y_iA^k où Y_i est le vecteur ligne ayant 1 pour i-ème coordonnée et 0 pour les autres ; par exemple

$$Y_1 = (1, 0, 0, \ldots, 0),\ Y_2 = (0, 1, 0, \ldots, 0).$$

La question précédente assure que, pour tout i, il existe une limite l_i telle que

$$Y_iA^k \longrightarrow_{k\to\infty} (l_i, l_i, l_i, \ldots, l_i).$$

Cela signifie (rappelons que Y_iA^k est le i-ème vecteur ligne de la matrice A^k)

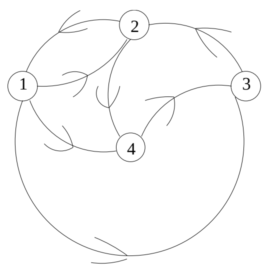
$$A^k \longrightarrow_{k\to\infty} \begin{pmatrix} l_1 & l_1 & l_1 & \cdots & l_1 \\ l_2 & l_2 & l_2 & \cdots & l_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ l_n & l_n & l_n & \cdots & l_n \end{pmatrix} := L.$$

Pour finir, on remarque que $A^{k+1} = AA^k$ converge vers L et aussi vers AL ; on en déduit $AL = L$. Le premier vecteur colonne (par exemple) de AL est le produit de A par le premier vecteur colonne de L. On en déduit que, si on note X le vecteur colonne de L, on a $AX = X$.

Remarque : le vecteur X obtenu ici n'est pas nul (ses coordonnées sont des nombres positifs ou nuls dont la somme est 1). L'égalité $A0 = 0$ est bien vérifiée mais peu intéressante.

1.2.3 Matrice associée à un graphe

Exercice 2. *Donner le nombre de chemins de longueur 2 allant de 1 à 3 dans le graphe suivant. Combien y-a-t-il de chemins de longueur 3 allant de 1 à 3 ? Combien y-a-t-il de chemins de longueur 8 allant de 1 à 3 ? Combien y-a-t-il de chemins de longueur 5 en tout ? Combien y-a-t-il de chemins de longueur 42 en tout ? Se rendre compte que le calcul matriciel est très utile (la calculatrice aussi) pour répondre à ce genre de question quand les nombres considérés sont grands.*



Je donne quelques indications que je compléterai peut-être plus tard. Décidons de placer dans des matrices 4×4 les nombres de chemins joignant les sommets les uns aux autres :

$$M^{(n)} = \begin{pmatrix} m_{11}^{(n)} & m_{12}^{(n)} & m_{13}^{(n)} & m_{14}^{(n)} \\ m_{21}^{(n)} & m_{22}^{(n)} & m_{23}^{(n)} & m_{24}^{(n)} \\ m_{31}^{(n)} & m_{32}^{(n)} & m_{33}^{(n)} & m_{34}^{(n)} \\ m_{41}^{(n)} & m_{42}^{(n)} & m_{43}^{(n)} & m_{44}^{(n)} \end{pmatrix}.$$

Il faut comprendre donc que $m_{ij}^{(n)}$ désigne le nombre de chemins de longueur n joignant i à j. Grâce au dessin, on connaît $M^{(1)}$:

$$M^{(n)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Fixons maintenant un entier n et voyons comment compter le nombre de chemins de longueur $n+1$ joignant le sommet i au sommet j. On classe ces chemins en fonctions du sommet auquel on se trouve après n pas. L'ensemble des chemins de longueur $n+1$ joignant le sommet i au sommet j est la réunion pour k allant de 1 à 4 des ensembles des chemins de longueur $n+1$ joignant le sommet i au sommet j tels qu'au bout de n pas on se trouve au sommet k. S'il n'y a pas de flèche entre k et j alors il n'y a aucun chemin de longueur $n+1$ joignant le sommet i au sommet j tel qu'au bout de n pas on se trouve au sommet k. S'il a une flèche entre k et j alors il y a autant de chemins de longueur $n+1$ joignant le sommet i au sommet j tel qu'au bout de n pas on se trouve au sommet k qu'il y a de chemins de longueur n joignant le sommet i au sommet k. On peut résumer ces phrases trop longues par l'égalité

$$m_{ij}^{(n+1)} = \sum_{k=1}^{4} m_{ik}^{(n)} m_{kj}^{(1)}.$$

Cela s'écrit encore matriciellement

$$M^{(n+1)} = M^{(n)} M^{(1)}.$$

On montre donc par récurrence qu'on a

$$M^{(n)} = (M^{(1)})^n.$$

Pour calculer les nombres demandés dans l'énoncé de l'exercice il suffit donc de calculer les puissances de $M^{(1)}$:

$$M^{(2)} = (M^{(1)})^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$M^{(3)} = M^{(1)}M^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$M^{(5)} = M^{(2)}M^{(3)} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 5 & 5 \\ 2 & 4 & 5 & 4 \\ 2 & 2 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$M^{(8)} = M^{(5)}M^{(3)} = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 5 & 5 \\ 2 & 4 & 5 & 4 \\ 2 & 2 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 & 21 & 21 & 21 \\ 10 & 17 & 18 & 17 \\ 7 & 10 & 10 & 11 \\ 4 & 7 & 6 & 6 \end{pmatrix}$$

On peut alors répondre aux questions posées : le nombre de chemins de longueur 3 allant de 1 à 3 est 2, le nombre de chemins de longueur 8 allant de 1 à 3 est 21, le nombre total de chemins de longueur 5 est la somme de tous les coefficients de $M^{(5)}$, soit 47. Remarque : prendre la somme de tous les coefficients d'une matrice s'écrit matriciellement. Par exemple ici

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} M^{(5)} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 47.$$

eV, seV, $\mathbb{R}^n, \mathbb{C}^n$, application linéaire, matrice d'une application linéaire dans la base canonique, application linéaire associée à une matrice, matric de $g \circ f$

1.3 Espaces vectoriels

Définition 1.21. *Un ensemble E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel ($\mathbb{C}$-espace vectoriel) si*

1. *il existe une opération sur E, notée $+$ et appelée addition, $(u,v) \in E \times E \mapsto u+v$ telle que*
   (i) $u+v=v+u$
   (ii) $(u+v)+w=u+(v+w)$
   (iii) il existe un unique vecteur 0_E tq $0_E+u=u+0_E=u$
   (iv) Chaque vecteur $u \in E$ a un opposé $-u$ tq $u+(-u)=(-u)+u=0$
2. *Il existe une opération dite "externe" de multiplication d'un vecteur de E par un nombre réel (ou complexe) $(\lambda, u) \in \mathbb{R} \times E \to \lambda \times u$ qui vérifie pour tous $\lambda \in \mathbb{R}$ et $u \in E$ (resp $\lambda \in \mathbb{C}$)*
   (i) $1 \times u = u$

(ii) $(\lambda + \mu) \times u = \lambda \times u + \lambda \times v$
(iii) $(\lambda\mu) \times u = \lambda \times (\mu \times u) = \mu \times (\lambda u)$
(iv) $\lambda(u + v) = \lambda(u + v)$

Voici une liste d'espaces vectoriels.

1. La droite réelle $\mathbb{R}$, le plan usuel $\mathbb{R}^2$ et l'espace usuel $\mathbb{R}^3$ sont des $\mathbb{R}$-espaces vectoriels.
2. Le plan complexe $\mathbb{C}$ est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel. C'est aussi un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.
3. L'ensemble $\mathbb{R}^n$, $n \geq 1$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.
4. L'ensemble $\mathbb{C}^n$, $n \geq 1$, est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel.
5. L'ensemble $\mathbb{C}^n$, $n \geq 1$, est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.
6. L'ensemble $\mathbb{R}[X]$ des polynômes à coefficients réels est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.
7. L'ensemble $\mathbb{R}_n[X]$ des polynômes à coefficients réels. de degré inférieur ou égal à n est un $\mathbb{R}$-eV.
8. L'ensemble $\mathbb{C}_n[X]$ des polynômes à coefficients réels. de degré inférieur ou égal à n est un $\mathbb{C}$-eV.
9. l'ensemble $C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ des fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est un $\mathbb{R}$-eV.
10. L'ensemble $C(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ des fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel.
11. L'ensemble $M_{n\times m}(\mathbb{R})$ (resp $M_{n\times m}(\mathbb{C})$) des matrices à n lignes et m colonnes remplies de coeff réels (resp complexes) est un $\mathbb{R}$ espace vectoriel (resp $\mathbb{C}$ espace vectoriel).

La liste précédente passe sous silence des éléments très importants de la définition d'un espace vectoriel : l'addition et la multiplication. On omet souvent de les préciser car elles sont considérées comme naturelles. On peut résumer en disant que dans chaque cas, l'addition est l'addition coordonnée à coordonnée et la multiplication par un scalaire la multiplication de chaque coordonnée par ce scalaire.

Définition 1.22. *Un sous-espace vectoriel du $\mathbb{R}$-espace vectoriel E est un sous ensemble $F \subset E$ stable par addition et multiplication :*
(i) si $u, v \in F$ alors $u + v \in F$,
(ii) si $\lambda \in \mathbb{R}$, $u \in F$, alors $\lambda.u \in F$.
En particulier, on doit avoir $0_E \in F$.

Exemples geometriques :

La droite d'équation $y = -2x$ dans $\mathbb{R}^2$. C'est l'ensemble des points de coordonnées (x, y) tq $y = -2x$. C'est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$.

Le plan d'équation $x + y + z = 0$ dans $\mathbb{R}^3$ est un sous-espace vectoriel.

La droite d'équations $x = y$ et $z = -x$ dans $\mathbb{R}^3$ est un sous-espace vectoriel.

Les sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$ sont $\{0\}$, les droites vectorielles, $\mathbb{R}^2$. Les sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ sont $\{0\}$, les droites vectorielles, les plans vectoriels, $\mathbb{R}^3$.

Exemple dans un espace vectoriel de polynomes : Dans $\mathbb{R}_3[X]$ l'ensemble des polynômes vérifiant $2P(X) - XP'(X) + X^2P''(X) = 0$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_3[X]$.

Proposition 1.23. *Un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel E est un espace vectoriel.*

Définition 1.24. *Soient $u_1 \dots u_n \in E$, $\lambda_1, \dots \lambda_n$ Le vecteur $\vec{u} = \lambda_1\vec{u}_1 + \dots \lambda_n\vec{u}_n$ est appelé combinaison linéaire des u_i. Les λ_i sont les coefficients de la combinaison linéaire. La combinaison linéaire est dite triviale si tous les λ_i sont nuls (et $\vec{u} = 0$).*

Exemple : l'écriture $(2,3,2) = 2.(1,0,1) + 3.(0,1,0)$ peut se lire « $(2,3,2)$ est la combinaison linéaire des vecteurs $(1,0,1)$ et $(0,1,0)$ de coefficients 2 et 3 ».

Autre exemple : Soit $A = (a_{ij})_{1\leq i\leq n, 1\leq j\leq m}$ et $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_m \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m$. Alors on définit

$$A.X = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots a_{1m}x_m \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots a_{2m}x_m \\ \dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots a_{nm}x_m \end{pmatrix}$$

Le vecteur (colonne) $A.X$ est dans $\mathbb{R}^n$ et on voit qu'il s'écrit

$$A.X = x_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{n2} \end{pmatrix} + \dots + x_m \begin{pmatrix} a_{1m} \\ a_{2m} \\ \vdots \\ a_{nm} \end{pmatrix}.$$

Autrement dit AX est la combinaison linéaire des vecteurs colonne de A avec les coefficients $x_1, \dots, x_m$. Si on note C_i le i-ème vecteur colonne de A :

$$C_i = \begin{pmatrix} a_{1i} \\ a_{2i} \\ \vdots \\ a_{ni} \end{pmatrix},$$

on a

$$AX = x_1C_1 + x_2C_2 + \dots + x_mC_m = \sum_{i=1}^{m} x_iC_i.$$

Proposition 1.25. *$F \subset E$ est un sous-espace vectoriel de E ssi stable par combinaisons linéaires, i.e. pour toute famille finie de vecteurs $u_1, \dots, u_k \in F$, et toute famille $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ de nombres on a $\lambda_1u_1 + \dots \lambda_ku_k \in F$*

Définition 1.26. *Soit S une partie d'un espace vectoriel E. On appelle sous-espace vectoriel engendré par S, le plus petit sous-espace vectoriel de E contenant S. On le note $Vect(S)$.*

Proposition 1.27. *Soit S une partie d'un espace vectoriel E. Le sous-espace $Vect(S)$ est l'ensemble des combinaisons linéaires d'éléments de S.*

1.4 Applications linéaires

Définition 1.28. *Soient E, F deux $\mathbb{R}$-espace vectoriel (resp $\mathbb{C}$) Une application linéaire de E dans F est une application qui vérifie pour tous les vecteurs u, v de E et tout nombre $\lambda \in \mathbb{R}$ (resp $\mathbb{C}$)*

1. $f(u + v) = f(u) + f(v)$
2. $f(\lambda u) = \lambda f(u)$

Une forme linéaire est une application lin de E dans $\mathbb{R}$ (resp $E \to \mathbb{C}$)

Un endomorphisme est une application linéaire de E dans E.

Proposition 1.29. *Une application $\varphi : E \to G$ est lin ssi elle préserve les comb lin, i.e. $\varphi(\lambda_1\vec{u}_1 + \dots \lambda_k\vec{u}_k) = \lambda_1\varphi(\vec{u}_1) + \dots \lambda_k\varphi(\vec{u}_k)$.*

Exemple projection $p_i : (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \to x_i$ est une forme linéaire

Exemple Soient $a_1, \dots a_n$ n nombres reels. Alors $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \to a_1x_1 + a_2x_2 + \dots a_nx_n$ est une forme lineaire.

Proposition 1.30. *Toutes les formes linéaires s'écrivent ainsi*

$$\vec{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \to a_1x_1 + \dots + a_nx_n \in \mathbb{R}.$$

Démonstration : Par linéarité, on a :

$$f(x) = f(x_1e_1 + \dots + x_ne_n) = x_1f(e_1) + \dots + x_nf(e_n).$$

Les a_i de l'énoncé sont les nombres $f(e_i)$. □

Proposition 1.31. *Soient E, F, G trois $\mathbb{R}$-espace vectoriel. Soient $f : E \to F$ et $g : F \to G$ deux applications linéaires. La composée $g \circ f$ est une application linéaire.*

Soit $A = (a_{ij})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m}$ L'application $\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ définie par

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_m \end{pmatrix} \mapsto A.X = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + \dots a_{1m}x_m \\ \dots \\ a_{n1}x_1 + \dots a_{nm}x_m \end{pmatrix}$$

est une application linéaire.

L'exemple précédent est en fait le cas général : toute application linéaire $\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ peut s'écrire comme un tel produit matriciel.

En effet considérons une application linéaire f de $\mathbb{R}^m$ vers $\mathbb{R}^n$. Appelons $e_1, \dots, e_m$ les vecteurs de la base canonique de $\mathbb{R}^m$:

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \dots e_m = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Considérons alors un élément X de $\mathbb{R}^m$ (un vecteur colonne) :

$$X = \sum_{i=1}^{m} x_i e_i.$$

Par linéarité de f on a donc

$$f(X) = f(\sum_{i=1}^{m} x_i e_i) = \sum_{i=1}^{m} x_i f(e_i).$$

Les vecteurs (colonne) $f(e_i)$ sont des éléments de $\mathbb{R}^m$. Appelons A la matrice de taille $n \times m$ dont les colonnes sont ces vecteurs $f(e_i)$ (i allant de 1 à m) :

$$f(e_i) = \begin{pmatrix} a_{1i} \\ a_{2i} \\ \dots \\ a_{ni} \end{pmatrix}.$$

On a vu plus haut (le deuxième exemple après la définition d'une combinaison linéaire) que, pour cette matrice A, AX est la combinaison linéaire des vecteurs colonne de A avec les coefficients x_i, autrement dit :

$$AX = \sum_{i=1}^{m} x_i f(e_i).$$

On a donc bien trouvé une matrice A telle que

$$f(X) = AX.$$

2 Les systèmes linéaires

2.1 Vocabulaire sur les systèmes linéaires

Rappel Soit $E = \mathbb{R}^n$ (resp $\mathbb{C}^n$).

Par exemple $f : (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \to 2x - 3y + \sqrt{2}z$ ou encore $g : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \to x$.

Une équation linéaire homogène est une équation du type $a_1x_1 + \cdots + a_nx_n = 0$. Autrement dit, c'est une équation du type $f(\vec{x}) = 0$, avec $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ (ou $f : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$) une forme linéaire. Le mot homogène signifie que le deuxième membre de l'égalité vaut 0.

Un système linéaire homogène est un système de m équations linéaires homogènes à n inconnues. Soit encore

$$\left\{\begin{array}{ccc} a_{11}x_1 + \dots a_{1n}x_n & = & 0 \\ a_{21}x_1 + \cdots + a_{2n}x_n & = & 0 \\ \dots & = & 0 \\ a_{m1}x_1 + \dots a_{mn}x_n & = & 0 \end{array}\right\}$$

Proposition 2.1. *L'ensemble des solutions d'un système linéaire* **homogène** *est un sous-espace vectoriel de* $\mathbb{R}^n$.

Exemples :

La droite d'équation $y+2x = 0$ dans $\mathbb{R}^2$ est un sous-espace vectoriel. La droite d'équations $y + 2x = 0$ et $z = 0$ est un sous-espace vectoriel.

Une équation linéaire est une équation du type $a_1x_1+\cdots+a_nx_n = b$. Autrement dit, c'est une équation du type $f(\vec{x}) = b$, avec f une forme linéaire et b un nombre. Un système linéaire est un système de m équations linéaires à n inconnues. Soit encore

$$\left\{\begin{array}{ccc} a_{11}x_1 + \dots a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 + \cdots + a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \dots & = & \dots \\ a_{m1}x_1 + \dots a_{mn}x_n & = & b_m \end{array}\right\}$$

L'ensemble des solutions d'un système linéaire non homogène n'est PAS un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$. L'ensemble des solutions d'un système linéaire non homogène est appelé sous-espace affine.

Exemple :

La droite d'équation $y + 2x = 1$ dans $\mathbb{R}^2$ n'est pas un sous-espace vectoriel. La droite d'équations $y + 2x = 1$ et $z = -2$ n'est pas un sous-espace vectoriel.

Notation matricielle. Soit (S) le système ci-dessus, $A = (a_{ij})_{1\leq i\leq m, 1\leq j\leq n}$ la matrice associée, et $\vec{b} = (b_1, \ldots, b_m)$, ou encore $B = Mat(\vec{b}) = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_m \end{pmatrix}$. Soit $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix}$ Le système peut se réécrire $A.X = B$.

Autrement dit, matriciellement, l'ensemble des $(x_1, \ldots x_n)$ vérifiant le système d'équations (S) est exactement l'ensemble des $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix}$ vérifiant la relation $AX = B$. Ça veut dire la même chose, c'est juste plus rapide à écrire.

2.2 L'algorithme de Gauss-Jordan

La bonne méthode pour résoudre un système linéaire s'appelle l'algorithme de Gauss Jordan.

L'algorithme repose sur quelques remarques.

- Si je change l'ordre d'écriture des équations, je ne change pas les solutions.
- si je multiplie une équation par un nombre non nul, je ne change pas les solutions.
- Si je remplace une équation du système par la somme de cette équation et d'une autre équation du système, je ne change pas les solutions. (Exemple pour illustrer)

Pour comprendre l'algorithme il suffit de l'appliquer à quelques exemples. En voici quelques uns.

$$\left\{\begin{array}{cccccccc} & & x_3- & x_4- & x_5 & = & 4 \\ 2x_1+ & 4x_2+ & 2x_3+ & 4x_4+ & 2x_5 & = & 4 \\ 2x_1+ & 4x_2+ & 3x_3+ & 3x_4+ & 3x_5 & = & 4 \\ 3x_1+ & 6x_2+ & 6x_3+ & 3x_4+ & 6x_5 & = & 6 \end{array}\right.$$

Le système ci-dessus peut s'écrire

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ 2 & 4 & 2 & 4 & 2 \\ 2 & 4 & 3 & 3 & 3 \\ 3 & 6 & 6 & 3 & 6 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}$$

On pourra faire tous les calculs en omettant les x_i. On notera alors

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 4 \\ 2 & 4 & 2 & 4 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & 3 & 3 & 3 & 4 \\ 3 & 6 & 6 & 3 & 6 & 6 \end{array}\right)$$

le système, et on appellera cette matrice la Matrice augmentée du système.

Autrement dit, pour un système de n équations à m inconnues, la matrice augmentée a n lignes et $m+1$ colonnes.

Passons maintenant à l'algorithme proprement dit.

Avant de démarrer, je place mon curseur en haut à gauche (sur a_{11} à la première étape).

1. Je veux que ce coefficient soit non nul. S'il est non nul, je passe à l'étape suivante. Sinon, je cherche dans la colonne sous mon curseur un coeff non nul. J'échange alors cette ligne avec celle où est mon curseur. Si ce n'est pas possible (mon coefficient ainsi que tous les coefficients de la colonne sous mon curseur sont nuls) je me déplace d'un cran vers la droite et je recommence.

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & 4 & 2 & 4 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 4 \\ 2 & 4 & 3 & 3 & 3 & 4 \\ 3 & 6 & 6 & 3 & 6 & 6 \end{array}\right)$$

2. Si le coeff est non nul, je divise la ligne où je suis par ce coefficient. J'obtiens un coeff 1, appelé pivot, sur ma ligne pivot.

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} \mathbf{1} & 2 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 4 \\ 2 & 4 & 3 & 3 & 3 & 4 \\ 3 & 6 & 6 & 3 & 6 & 6 \end{array}\right)$$

3. Notons $a_{i_0j_0}$ le coefficient sur lequel pointe mon curseur. Je parcours la colonne de mon curseur (colonne pivot). J'ajoute à chaque ligne L_i rencontrée la ligne L_{i_0} multipliée par $(-a_{ij_0})$. Ainsi, à la fin de cette étape, tous les coefficients de la colonne C_{j_0} sauf le pivot sont nuls.

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} \mathbf{1} & 2 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -3 & 3 & 0 \end{array}\right)$$

4. Si c'est possible , je déplace ensuite mon curseur d'un cran vers la droite, puis un cran vers le bas. Je recommence l'algorithme depuis le début. Si ce n'est pas possible l'algorithme s'arrête.

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} \mathbf{1} & 2 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & -1 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -3 & 3 & 0 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} \mathbf{1} & 2 & 0 & 3 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & -1 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & -12 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} \mathbf{1} & 2 & 0 & 3 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & -1 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & -12 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} \mathbf{1} & 2 & 0 & 3 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & -1 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & -12 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} \mathbf{1} & 2 & 0 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Ceci, retraduit en termes de systèmes linéaires, signifie

$$\left\{\begin{array}{cccccc} x_1 & +2x_2 & & +3x_4 & & = 2 \\ & & x_3- & x_4 & & = 2 \\ & & & & x_5 & = -2 \end{array}\right\}.$$

Ce système a une infinité de solutions. On peut choisir x_2 et x_4 librement, et exprimer $x_1 = -2x_2 - 3x_4 + 2$, $x_3 = x_4 + 2$, $x_5 = -2$.

Dans l'exemple ci-dessus, le rang est 3.

Définition 2.2. La FREL d'une matrice A (forme réduite échelonnée par lignes) est la matrice obtenue après application de l'algorithme de GJ.

Autres exemples (exercice 9 de la feuille 1)

$\star$

$$\left\{\begin{array}{cccccc} x & +y & -2z & = & 5 \\ 2x & +3y & +4z & = & 2 \end{array}\right.$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & | & 5 \\ 2 & 3 & 4 & | & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & | & 5 \\ 0 & 1 & 8 & | & -8 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -10 & | & 13 \\ 0 & 1 & 8 & | & -8 \end{pmatrix}$$

Conclusion : le système a une infinité de solutions. On peut choisir z arbitrairement ; x et y sont alors donnés par $x = 13 + 2z$, $y = -8 - 8z$.

$\star$

$$\left\{\begin{array}{ccc} x + y & = & 1 \\ 2x - y & = & 5 \\ 3x + 4y & = & 2 \end{array}\right.$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & | & 1 \\ 2 & -1 & | & 5 \\ 3 & 4 & | & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & | & 1 \\ 0 & -3 & | & 3 \\ 0 & 1 & | & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & | & 1 \\ 0 & 1 & | & -1 \\ 0 & -3 & | & 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & | & 2 \\ 0 & 1 & | & -1 \\ 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix}$$

Conclusion : le système a une solution unique donnée par $x = 2$, $y = -1$.

$\star$

$$\left\{\begin{array}{ccc} x_3 + x_4 & = & 0 \\ x_2 + x_3 & = & 0 \\ x_1 + x_2 & = & 0 \\ x_1 + x_4 & = & 0 \end{array}\right.$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & | & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & | & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & | & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & | & 0 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Conclusion : le système a une infinité de solutions. On peut choisir x_4 arbitrairement ; les autres x_i sont alors donnés par $x_1 = -x_4$, $x_2 = x_4$, $x_3 = -x_4$.

$\star$

$$\left\{\begin{array}{rcr} 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 - x_4 & = & 4 \\ 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 - x_4 & = & 4 \\ -2x_1 - 2x_2 - x_3 + 2x_4 & = & -3 \\ 11x_1 + 6x_2 + 4x_3 + x_4 & = & 11 \end{array}\right.$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 4 & 3 & 2 & -1 & 4 \\ 5 & 4 & 3 & -1 & 4 \\ -2 & -2 & -1 & 2 & -3 \\ 11 & 6 & 4 & 1 & 11 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3/4 & 1/2 & -1/4 & 1 \\ 5 & 4 & 3 & -1 & 4 \\ -2 & -2 & -1 & 2 & -3 \\ 11 & 6 & 4 & 1 & 11 \end{array}\right)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3/4 & 1/2 & -1/4 & | & 1 \\ 0 & 1/4 & 1/2 & 1/4 & | & -1 \\ 0 & -1/2 & 0 & 3/2 & | & -1 \\ 0 & -9/4 & -3/2 & 15/4 & | & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3/4 & 1/2 & -1/4 & | & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & | & -4 \\ 0 & -1/2 & 0 & 3/2 & | & -1 \\ 0 & -9/4 & -3/2 & 15/4 & | & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 & | & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & | & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & | & -3 \\ 0 & 0 & 3 & 6 & | & -9 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & | & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & | & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & | & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix}$$

Conclusion : le système a une infinité de solutions. On peut choisir x_4 arbitrairement ; les autres x_i sont alors donnés par $x_1 = 1 - x_4$, $x_2 = 2 + 3x_4$, $x_3 = -3 - 2x_4$.

$\star$

$$\left\{ \begin{array}{rcl} 3x + 11y + 19z & = & 22 \\ 7x + 23y + 39z & = & 10 \\ -4x - 3y - 2z & = & 6 \end{array} \right.$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 11 & 19 & | & 22 \\ 7 & 23 & 39 & | & 10 \\ -4 & -3 & -2 & | & 6 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 11/3 & 19/3 & | & 22/3 \\ 7 & 23 & 39 & | & 10 \\ -4 & -3 & -2 & | & 6 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 11/3 & 19/3 & | & 22/3 \\ 0 & -8/3 & -16/3 & | & -124/3 \\ 0 & 35/3 & 70/3 & | & 106/3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 11/3 & 19/3 & | & 22/3 \\ 0 & 1 & 2 & | & 31/2 \\ 0 & 35 & 70 & | & 106 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 11/3 & 19/3 & | & 22/3 \\ 0 & 1 & 2 & | & 31/2 \\ 0 & 0 & 0 & | & 106 - 35.31/2 < 0 \end{pmatrix}$$

Conclusion : le système n'a pas de solutions, on dit qu'il est incompatible.

⋆

$$\begin{cases} 3x+6y+14z &= 22 \\ 7x+14y+30z &= 46 \\ 4x+8y+7z &= 6 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 6 & 14 & 22 \\ 7 & 14 & 30 & 46 \\ 4 & 8 & 7 & 6 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 14/3 & 22/3 \\ 7 & 14 & 30 & 46 \\ 4 & 8 & 7 & 6 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 14/3 & 22/3 \\ 0 & 0 & -8/3 & -16/3 \\ 0 & 0 & -35/3 & -70/3 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 14/3 & 22/3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Conclusion : le système a une infinité de solutions. On peut choisir y arbitrairement ; x et z sont alors donnés par $x=-2-2y$, $z=2$.

⋆

$$\begin{cases} 3x+5y+3z &= 25 \\ 7x+9y+19z &= 65 \\ -4x+5y+11z &= 5 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 5 & 3 & 25 \\ 7 & 9 & 19 & 65 \\ -4 & 5 & 11 & 5 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 5/3 & 1 & 25/3 \\ 0 & -8/3 & 12 & 20/3 \\ 0 & 35/3 & 15 & 115/3 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 5/3 & 1 & 25/3 \\ 0 & 1 & -9/2 & -5/2 \\ 0 & 7 & 9 & 23 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 17/2 & 25/2 \\ 0 & 1 & -9/2 & -5/2 \\ 0 & 0 & 81/2 & 81/2 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 17/2 & 25/2 \\ 0 & 1 & -9/2 & -5/2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

Conclusion : le système a une solution unique donnée par $x = 4$, $y = 2$, $z = 1$.

2.3 Calcul de l'inverse d'une matrice par GJ

Rappelons qu'une matrice $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ est dite inversible s'il existe une matrice B telle que $A.B = B.A = I_n$. On note cette matrice A^{-1}, et on l'appelle l'inverse de A.

Exemple $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 8 & 2 \end{pmatrix}$ est-elle inversible ? Ceci revient à dire que le système

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc} x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & y_1 & & \\ 2x_1 & + & 3x_2 & + & 2x_3 & = & & y_2 & \\ 3x_1 & + & 8x_2 & + & 2x_3 & = & & & y_3 \end{array}\right.$$

admet une unique solution. On résout par GJ. On obtient

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc} x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & y_1 & & \\ 0 & + & x_2 & & & = & -2y_1 & +y_2 & \\ & & 5x_2 & - & x_3 & = & -3y_1 & & +y_3 \end{array}\right.$$

puis

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc} x_1 & & & + & x_3 & = & 3y_1 & -y_2 & \\ & & x_2 & & & = & -2y_1 & +y_2 & \\ & & & - & x_3 & = & 7y_1 & -5y_2 & +y_3 \end{array}\right.$$

puis

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} x_1 & & & = & 10y_1 & -6y_2 & +y_3 \\ & x_2 & & = & -2y_1 & +y_2 & \\ & & x_3 & = & -7y_1 & +5y_2 & -y_3 \end{array}\right.$$

Ainsi,

$$X = \begin{pmatrix} 10 & -6 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ -7 & 5 & -1 \end{pmatrix} .Y$$

ce qui signifie que

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 10 & -6 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ -7 & 5 & -1 \end{pmatrix}.$$

On présente souvent de manière un peu différente ce calcul (en n'écrivant pas les x_i et y_i). On applique l'algorithme de Gauss-Jordan à $(A|I_3)$ et on obtient $(I_3|A^{-1})$.

Dans le cas précédent, cela donne

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 8 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & -1 & -3 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 7 & -5 & 1 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 10 & -6 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -7 & 5 & -1 \end{array}\right)$$

C'est vrai en toute dimension. Si A est inversible, pour trouver A^{-1}, on applique GJ à la matrice étendue $(A|I_n)$ et on obtient $(I_n|A^{-1})$.

Un exemple : inverser la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

(c'est la deuxième matrice de l'exercice 2 de la feuille 2). On applique la méthode de Gauss-Jordan à la matrice augmentée par I_3 :

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & -4 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & 1 & -2 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 & 2 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 & 2 \end{array}\right)$$

Conclusion

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$