Quelques notes de cours et des indications sur les exercices 8 et 6

1 Matrices, espaces vectoriels, applications linéaires

1.1 Matrices

Définition 1.1. *Une matrice est un tableau rectangulaire de nombres (entiers, réels, complexes).*

Exemples 1.2.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} \quad c = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 4 \\ 10 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Définition 1.3. *La taille d'une matrice est son nombre de lignes et son nombre de colonnes. Si une matrice A a n lignes et m colonnes, on dit que A est de taille $n \times m$. Lorsqu'une matrice n'a qu'une ligne on dit que c'est un vecteur ligne, lorsqu'elle n'a qu'une colonne que c'est un vecteur colonne.*

Exemples 1.4. *Pour les exemples ci-dessus : A est de taille 3×5, C est de taille 2×2, T est de taille 5×5, x et c sont de taille 5×1, b est de taille 3×1. Les matrices x, c, b sont des vecteurs colonnes.*

Définition 1.5. *Une matrice est dite carrée si elle a autant de lignes que de colonnes. Une matrice carrée A est dite diagonale si $a_{ij} = 0$ si $i \neq j$. Elle est dite triangulaire supérieure si $a_{ij} = 0$ si $i > j$. Elle est dite triangulaire inférieure si $a_{ij} = 0$ si $i < j$.*

Exemples 1.6. *Pour les exemples ci-dessus : les matrices C, T et D sont carrées ; T est triangulaire supérieure, D est diagonale.*

Définition 1.7. *Soit A une matrice. La transposée de A est la matrice ${}^tA$ dont les coefficients sont donnés par*

$$({}^tA)_{ij} = A_{ji}.$$

La transposée de A est la matrice dont les lignes sont les colonnes de A.

Exemple 1.8. *La transposée de la matrice A prise en exemple ci-dessus est*

$$^tA = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Définition 1.9. *Soient A et B deux matrices* **de même taille**. *La somme de A et B est la matrice $A+B$ dont les coefficients sont donnés par*

$$(A+B)_{ij} = A_{ij} + B_{ij}.$$

Exemple 1.10.

Exemple 1.11. *Soient les deux matrices suivantes :*

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Leur somme est

$$C+E = \begin{pmatrix} 0+2 & 1+0 \\ -1+1 & 0+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Proposition 1.12. *L'addition est associative et commutative ; d'autre part la matrice nulle (c'est-à-dire dont les coefficients sont tous nuls) est un élément neutre pour l'addition : si A, B, C sont trois matrices de même taille et 0 est la matrice nulle de cette taille, on a*

$$(A+B)+C = A+(B+C), \quad A+B = B+A, \quad A+0 = A.$$

Définition 1.13. *Soient A et B deux matrices de tailles $m \times n$ et $n \times p$ respectivement (autrement dit A a autant de colonnes que B a de lignes). Le produit AB de A et B est la matrice dont les coefficients sont donnés par*

$$(AB)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} A_{ik} B_{kj}.$$

La matrice AB est de taille $m \times p$.

Exemples 1.14. *Reprenons les deux matrices C et E de l'exemple précédent. Elles sont de taille 2×2. Les deux produits CE et EC sont définis :*

$$CE = \begin{pmatrix} 0.2+1.1 & 0.0+1.1 \\ (-1).2+0.1 & (-1).0+0.1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix},$$

$$EC = \begin{pmatrix} 2.0+0.(-1) & 2.1+0.0 \\ 1.0+1.(-1) & 1.1+1.0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

On voit en passant que le produit n'est pas commutatif.

Les vecteurs de la base canonique de $\mathbb{R}^5$ sont

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad e_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad e_5 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Les vecteurs colonnes de A (la matrice prise en exemple plus haut) sont les résultats de la multiplication de A par ces vecteurs de la base canonique. Par exemple

$$A.e_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$A.e_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

On peut obtenir de manière analogue les vecteurs ligne en multipliant à gauche par des vecteurs lignes ayant une seule coordonnées 1 et les autres 0 :

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} .A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Soient A et B deux matrices de tailles $m \times n$ et $n \times p$ respectivement. Le produit AB est bien défini (de taille $m \times p$). Appelons $V_1, \ldots, V_p$ les vecteurs colonne de B. Alors le j-ème vecteur colonne de AB est AV_j.

Exemple 1.15. *Considérons les matrices*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Calculons AB

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 0 & 2 & 1 \\ -2 & 3 & 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Le deuxième vecteur colonne de B est

$$V_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

et on a

$$A.V_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Le deuxième vecteur colonne de AB est bien égal à AV_2.

Soit $A = (a_{ij})_{1\leq i\leq n, 1\leq j\leq m}$ et $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_m \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m$. Alors on définit

$$A.X = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots a_{1m}x_m \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots a_{2m}x_m \\ \dots \\ a_{n1}x_1 + +a_{n2}x_2 + \dots a_{nm}x_m \end{pmatrix}$$

Le vecteur (colonne) $A.X$ est dans $\mathbb{R}^n$.

Définition 1.16. *On appelle matrice identité une matrice carrée diagonale dont les éléments diagonaux sont 1. On note ces matrices I_2, I_3,... (l'indice donne la taille) ou I (si la taille n'est pas ou n'a pas besoin d'être précisée).*

Par exemple, on a

$$I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Proposition 1.17. *La multiplication de matrices est associative et les matrices identité sont des éléments neutres pour la multiplication : si A, B, C sont trois matrices de tailles $m \times n$, $n \times p$ et $p \times q$ (autrement de tailles assurant que les produits écrits ci-dessous soient définis), on a*

$$(AB)C = A(BC), \quad I_m A = A = AI_n.$$

L'associativité permet d'écrire un produit de plusieurs matrices sans utiliser de parenthèses : par exemple ABC (car le résultat est le même si on calcule $(AB)C$ (d'abord AB) ou $A(BC)$ (d'abord BC)).

Proposition 1.18. *La multiplication de matrices est par rapport à l'addition : si A, B, C sont trois matrices de tailles $m \times n$, $n \times p$ et $n \times p$ (autrement de tailles assurant que les produits et sommes écrits ci-dessous soient définis), on a*

$$A(B+C) = AB + AC.$$

Définition 1.19. *On dit qu'une matrice* **carrée** *A est inversible s'il existe une matrice B (de même taille) telle que*

$$AB = BA = I$$

Cette matrice B s'appelle alors l'inverse de A et est notée A^{-1}.

Proposition 1.20. *Soient A et B deux matrices inversibles de même taille. Le produit AB est inversible et*

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}.$$

Pour le voir, il suffit d'écrire le produit

$$AB(B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1} = AIA^{-1} = AA^{-1} = I,$$

la première égalité vient du fait que le produit est associatif ; en général on ne peut pas changer l'ordre des termes d'un produit, mais on peut grouper les éléments d'un produit comme on le souhaite sans changer le résultat.

Si A est une matrice carrée on peut la multiplier par elle-même autant de fois qu'on veut ; on obtient ainsi les puissances de A, notées A^2, A^3, etc... A première vue il est difficile de calculer les puissances d'une matrice. Pour certaines matrices c'est facile, par exemple pour les matrices diagonales :

$$D = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}, \quad D^k = \begin{pmatrix} a^k & 0 & 0 \\ 0 & b^k & 0 \\ 0 & 0 & c^k \end{pmatrix}.$$

On dit qu'une matrice carrée A est diagonalisable si on peut trouver deux matrices P et D de même taille que A telles que P soit inversible, D soit diagonale et

$$D = P^{-1}AP.$$

C'est alors facile de calculer les puissances de A. Remarquons que l'égalité précédente permet d'écrire A en fonction de D. En multipliant à gauche par P et à droite par P^{-1}, on obtient

$$PDP^{-1} = P(P^{-1}AP)P^{-1} = (PP^{-1})A(PP^{-1}) = IAI = A.$$

Calculons maintenant les puissances de A :

$$A^2 = (PDP^{-1})(PDP^{-1}) = PD(P^{-1}P)DP^{-1} = PDIDP^{-1} = PDDP^{-1} = PD^2P^{-1},$$

$$A^3 = AA^2 = (PDP^{-1})(PD^2P^{-1}) = PD(P^{-1}P)D^2P^{-1} = PDD^2P^{-1} = PD^3P^{-1},$$

puis, par récurrence, pour tout entier $k \geq 1$,

$$A^k = PD^kP^{-1}.$$

Or on a vu qu'il était facile de calculer les puissances d'une matrice diagonale.

Dans la suite, plutôt que de dire qu'une matrice A est de taille $n \times m$, on dira parfois $A \in M_{n\times m}(\mathbb{R})$. Autrement dit on désignera par $M_{n\times m}(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices A de taille $n \times m$.

1.2 Quelques exemples d'utilisations des matrices

1.2.1 Matrice de Léontief (ou d'entrée-sortie)

Seulement ébauché en cours cette semaine. Ce sera fait la semaine prochaine. Plusieurs exercices de la feuille 1 portent sur les matrices de Léontief, par exemple l'exercice 12 que vous pouvez préparer.

1.2.2 Evolution de parts de marché

Considérons la matrice suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 0,6 & 0,15 & 0,05 \\ 0,2 & 0,7 & 0,05 \\ 0,2 & 0,15 & 0,9 \end{pmatrix}$$

Disons que les nombres qu'elle contient ont la signification suivante : trois entreprises se partagent un marché, on suppose que chaque année 60% des clients de l'entreprise 1 (c'est le nombre 0,6) reste avec cette entreprise, 20% passent à l'entreprise 2 et 20% à l'entreprise 3 (ce sont les deux 0,2) ; de manière analogue 70% des clients de l'entreprise 2 restent avec l'entreprise 2 et la moitié du reste (15%) passe à 1 l'autre moitié du reste à 3 ; enfin 90% des clients de l'entreprise 3 restent avec l'entreprise 3 et la moitié du reste (5%) passe à 1 l'autre moitié du reste à 2. On cherche à savoir comment évoluent les parts de marché avec le temps. Imaginons que la répartition soit donnée à une certaine année par les trois nombres positifs ou nuls $p_1^{(0)}$, $p_2^{(0)}$, $p_3^{(0)}$ avec $p_1^{(0)} + p_2^{(0)} + p_3^{(0)} = 1$ ($p_i^{(0)}$ est la part de marché de l'entreprise i à l'année 0). La part de marché à l'année 1 de l'entreprise 1 sera alors :

$$p_1^{(1)} = 0,6.p_1^{(0)} + 0,15.p_2^{(0)} + 0,05.p_3^{(0)}.$$

En effet, la nouvelle part de marché est constituée des clients de 1 qui restent, de ceux qui viennent de 2 et de ceux qui viennent de 3. De façon analogue, on a :

$$p_2^{(1)} = 0,2.p_1^{(0)} + 0,7.p_2^{(0)} + 0,05.p_3^{(0)},$$

$$p_3^{(1)} = 0,2.p_1^{(0)} + 0,15.p_2^{(0)} + 0,9.p_3^{(0)}.$$

Introduisons les vecteurs

$$P^{(0)} = \begin{pmatrix} p_1^{(0)} \\ p_2^{(0)} \\ p_3^{(0)} \end{pmatrix}, \text{ et } P^{(1)} = \begin{pmatrix} p_1^{(1)} \\ p_2^{(1)} \\ p_3^{(1)} \end{pmatrix} \text{ et } P^{(k)} = \begin{pmatrix} p_1^{(k)} \\ p_2^{(k)} \\ p_3^{(k)} \end{pmatrix}$$

donnant les répartitions du marché aux années 0, 1 et k. Les égalités précédentes s'écrivent matriciellement sous la forme

$$P^{(1)} = AP^{(0)}.$$

On a aussi

$$P^{(2)} = AP^{(1)} = AAP^{(0)} = A^2P^{(0)},$$

et, pour tout entier k,

$$P^{(k)} = A^kP^{(0)}.$$

Ce sont donc les puissances de k qui permettent de décrire l'évolution des parts de marchés. Calculons quelques unes de ces puissances :

$$A = \begin{pmatrix} 0,6 & 0,15 & 0,05 \\ 0,2 & 0,7 & 0,05 \\ 0,2 & 0,15 & 0,9 \end{pmatrix} \quad A^2 = \begin{pmatrix} 0,4 & 0,2025 & 0,0825 \\ 0,27 & 0,5275 & 0,09 \\ 0,33 & 0,27 & 0,8275 \end{pmatrix}$$

$$A^{10} = \begin{pmatrix} 0,166 & 0,169 & 0,152 \\ 0,225 & 0,230 & 0,200 \\ 0,609 & 0,600 & 0,648 \end{pmatrix} \quad A^{20} = \begin{pmatrix} 0,158 & 0,158 & 0,158 \\ 0,211 & 0,211 & 0,210 \\ 0,631 & 0,630 & 0,632 \end{pmatrix}$$

$$A^{50} = \begin{pmatrix} 0,15779 & 0,15779 & 0,15779 \\ 0,21053 & 0,21053 & 0,21053 \\ 0,63158 & 0,63158 & 0,63158 \end{pmatrix}$$

(les chiffres sont arrondis au millième pour A^{10} et A^{20}, au cent millième pour A^{50}). On constate que les puissances se stabilisent à une valeur très proche de A^{50}, pour tout $k \geq 50$,

$$A^k \simeq \begin{pmatrix} 0,15779 & 0,15779 & 0,15779 \\ 0,21053 & 0,21053 & 0,21053 \\ 0,63158 & 0,63158 & 0,63158 \end{pmatrix}$$

et que les colonnes de cette matrice sont identiques. Pour $k \geq 50$, on a

$$P^{(k)} = A^kP^{(0)} \simeq \begin{pmatrix} 0,15779 & 0,15779 & 0,15779 \\ 0,21053 & 0,21053 & 0,21053 \\ 0,63158 & 0,63158 & 0,63158 \end{pmatrix} P^{(0)} = \begin{pmatrix} 0,15779 \\ 0,21053 \\ 0,63158 \end{pmatrix}.$$

Autrement dit quelle que soit la répartition du marché à l'année 0, le mécanisme d'évolution aboutit à la même répartition lorsque le temps grandit beaucoup (répartition donnée par les colonnes de la limite de A^k quand k tend vers l'infini.

L'exercice suivant a été traité en TD. Il permet d'établir le comportement limite observé des puissances de matrices A telles que celle prise en exemple plus haut dans un cadre plus général.

Exercice 1. *Soit A une matrice carrée $n \times n$ $(n \geq 2)$ dont les coefficients sont tous strictement positifs et telle que les sommes des éléments des colonnes soient égales à 1. Notons d le plus petit coefficient de A.*

1. *Montrer que d est inférieur ou égal à $1/2$.*
2. *Pour tout Y vecteur $1 \times n$ dont les coefficients sont positifs ou nuls, notons $m(Y)$ le plus petit coefficient de Y, $M(Y)$ le plus grand. Montrer que, pour tout Y vecteur ligne positif ou nul, on a*
$$M(YA) - m(YA) \leq (1 - 2d)(M(Y) - m(Y)).$$
3. *En déduire que YA^k converge vers un vecteur ligne dont toutes les coordonnées sont égales entre elles (lorsque k tend vers l'infini).*
4. *En déduire que A^k converge vers une matrice dont toutes les colonnes sont égales, puis que l'équation $AX = X$ a une solution X positive.*

Voici quelques éléments de réponses supplémentaires.

Commençons par une remarque sur la notion de moyenne. Par exemple, je vous ai dit que votre note finale en Algèbre III serait calculée comme la moyenne de quatre notes n_1, n_2, n_3, n_4 avec les coefficients 1, 3, 3, 6. Autrement dit la note finale sera

$$N = \frac{1}{13}(n_1 + 3n_2 + 3n_3 + 6n_4) = \frac{1}{13}n_1 + \frac{3}{13}n_2 + \frac{3}{13}n_3 + \frac{6}{13}n_4.$$

Imaginons qu'un étudiant vous dise que sa meilleure note est M et sa moins bonne m. Que pouvez-vous dire de sa moyenne ? Vous pouvez dire que sa moyenne est comprise entre m et M. Cela s'écrit facilement

$$N = \frac{1}{13}n_1 + \frac{3}{13}n_2 + \frac{3}{13}n_3 + \frac{6}{13}n_4 \leq \frac{1}{13}M + \frac{3}{13}M + \frac{3}{13}M + \frac{6}{13}n_M = M,$$

car chaque note est majorée par M et les coefficients sont positifs de somme 1. On a de même

$$N = \frac{1}{13}n_1 + \frac{3}{13}n_2 + \frac{3}{13}n_3 + \frac{6}{13}n_4 \geq \frac{1}{13}m + \frac{3}{13}m + \frac{3}{13}m + \frac{6}{13}m = m.$$

Mais vous pouvez dire un peu mieux. La moins bonne moyenne possible est obtenue lorsque M est affectée du plus petit coefficient ($n_1 = M$) et toutes les autres notes sont minimales ($n_2 = n_3 = n_4 = m$), autrement dit

$$N \geq \frac{1}{13}M + \frac{3}{13}m + \frac{3}{13}m + \frac{6}{13}m = \frac{1}{13}M + \frac{12}{13}m.$$

Comment le voir ? Ce qui est sûr, c'est que m et M figurent parmi les notes. En remplaçant les deux qui ne sont peut-être pas égales à m ou M par m, on diminue la moyenne. On a donc

$$N \geq \alpha M + (1-\alpha)m = m + \alpha(M-m),$$

où α est le (ou un) coefficient de la note maximale M. Comme $M - m > 0$, la deuxième expression montre que N est minimale quand α est minimal, c'est-à-dire ici quand $\alpha = 1/13$. On montre de la même façon que

$$N \leq \frac{1}{13}m + \frac{12}{13}M.$$

Revenons à l'exercice.

1. Par hypothèse les sommes des coefficients des colonnes de la matrice A sont égales à 1. Pour tout j, on a
$$a_{1j} + a_{2j} + \ldots + a_{nj} = 1.$$
En divisant par n on obtient
$$\frac{1}{n}a_{1j} + \frac{1}{n}a_{2j} + \ldots + \frac{1}{n}a_{nj} = \frac{1}{n}.$$
La moyenne des nombres a_{ij} est égale à $1/n$. Mais la moyenne est supérieure ou égale au plus petit des nombres a_{ij} (ici c'est i qui varie). Cela signifie que chaque colonne comporte au moins un nombre inférieur ou égal à $1/n$. Comme $n \geq 2$, d le plus petit des coefficients de la matrice A est inférieur à $1/2$.

2. Le j-ème coefficient de YA est donnée par la somme
$$(YA)_j = y_1 a_{1j} + y_2 a_{2j} + \ldots + y_{n-1} a_{(n-1)j} + y_n a_{nj} = a_{1j} y_1 + a_{2j} y_2 + \ldots + a_{(n-1)j} y_{n-1} + a_{nj} y_n.$$
Comme les nombres $a_{1j}, a_{2j}, \ldots, a_{(n-1)j}, a_{nj}$ sont positifs de somme égale à 1, le j-ème coefficient de YA est une moyenne calculée avec les coefficients a_{ij} (i variant). Comme on l'a remarqué plus haut une telle moyenne est inférieure à celle obtenue en prenant la valeur minimale $m(Y)$ avec le plus petit coefficient et toutes les autres valeurs égales à la valeurs maximales $M(Y)$; on obtient
$$(YA)_j \leq (\min_i a_{ij}) m(Y) + (1 - \min_i a_{ij}) M(Y).$$
Comme $d \leq \min_i a_{ij}$, cela entraîne
$$(YA)_j \leq d m(Y) + (1-d) M(Y).$$
De manière analogue on a
$$(YA)_j \geq d M(Y) + (1-d) m(Y).$$

Tous les coefficients de YA sont donc compris entre $dM(Y)+(1-d)m(Y)$ et $dm(Y)+(1-d)M(Y)$:

$$dM(Y) + (1-d)m(Y) \leq m(YA) \leq M(YA) \leq dm(Y) + (1-d)M(Y),$$

en particulier

$$\begin{aligned} & M(YA) - m(YA) \\ & \quad \leq dm(Y) + (1-d)M(Y) - dM(Y) - (1-d)m(Y) \\ & \quad \leq (1-2d)(M(Y) - m(Y)). \end{aligned}$$

3. Comme dans la question précédente on voit que, pour tout k, les coefficients de YA^{k+1} sont des moyennes des coefficients de YA^k et on en déduit (comme dans la question 2.) que

$$M(YA^{k+1}) - m(YA^{k+1}) \leq (1-2d)(M(YA^k) - m(YA^k)).$$

Par ailleurs on a aussi

$$m(YA^k) \leq m(YA^{k+1}) \leq M(YA^{k+1}) \leq M(YA^k).$$

Par récurrence on montre que pour tout k, on a

$$(M(YA^k) - m(YA^k)) \leq (1-2d)^k(M(YA) - m(YA)).$$

Comme $1-2d$ appartient à $[0,1[$, $(1-2d)^k$ tend vers 0. Les deux suites $(m(YA^k))_k$ et $(M(YA^k))_k$ sont donc adjacentes. Elles convergent vers une limite commune. Tous les coefficients de YA^k étant compris entre $m(YA^k)$ et $M(YA^k)$, le théorème des gendarmes montre que tous les coefficients de YA^k vers une même limite.

4. Les vecteurs ligne de la matrice A^k peuvent s'écrire comme les produits Y_iA^k où Y_i est le vecteur ligne ayant 1 pour i-ème coordonnée et 0 pour les autres ; par exemple

$$Y_1 = (1, 0, 0, \ldots, 0), \; Y_2 = (0, 1, 0, \ldots, 0).$$

La question précédente assure que, pour tout i, il existe une limite l_i telle que

$$Y_iA^k \longrightarrow_{k\to\infty} (l_i, l_i, l_i, \ldots, l_i).$$

Cela signifie (rappelons que Y_iA^k est le i-ème vecteur ligne de la matrice A^k)

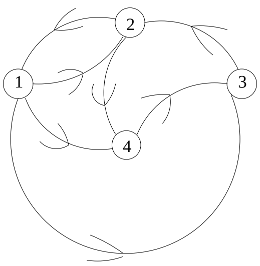
$$A^k \longrightarrow_{k\to\infty} \begin{pmatrix} l_1 & l_1 & l_1 & \cdots & l_1 \\ l_2 & l_2 & l_2 & \cdots & l_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ l_n & l_n & l_n & \cdots & l_n \end{pmatrix} := L.$$

Pour finir, on remarque que $A^{k+1} = AA^k$ converge vers L et aussi vers AL ; on en déduit $AL = L$. Le premier vecteur colonne (par exemple) de AL est le produit de A par le premier vecteur colonne de L. On en déduit que, si on note X le vecteur colonne de L, on a $AX = X$.

Remarque : le vecteur X obtenu ici n'est pas nul (ses coordonnées sont des nombres positifs ou nuls dont la somme est 1). L'égalité $A0 = 0$ est bien vérifiée mais peu intéressante.

1.2.3 Matrice associée à un graphe

Exercice 2. *Donner le nombre de chemins de longueur 2 allant de 1 à 3 dans le graphe suivant. Combien y-a-t-il de chemins de longueur 3 allant de 1 à 3 ? Combien y-a-t-il de chemins de longueur 8 allant de 1 à 3 ? Combien y-a-t-il de chemins de longueur 5 en tout ? Combien y-a-t-il de chemins de longueur 42 en tout ? Se rendre compte que le calcul matriciel est très utile (la calculatrice aussi) pour répondre à ce genre de question quand les nombres considérés sont grands.*



Je donne quelques indications que je compléterai peut-être plus tard. Décidons de placer dans des matrices 4×4 les nombres de chemins joignant les sommets les uns aux autres :

$$M^{(n)} = \begin{pmatrix} m_{11}^{(n)} & m_{12}^{(n)} & m_{13}^{(n)} & m_{14}^{(n)} \\ m_{21}^{(n)} & m_{22}^{(n)} & m_{23}^{(n)} & m_{24}^{(n)} \\ m_{31}^{(n)} & m_{32}^{(n)} & m_{33}^{(n)} & m_{34}^{(n)} \\ m_{41}^{(n)} & m_{42}^{(n)} & m_{43}^{(n)} & m_{44}^{(n)} \end{pmatrix}.$$

Il faut comprendre donc que $m_{ij}^{(n)}$ désigne le nombre de chemins de longueur n joignant i à j. Grâce au dessin, on connaît $M^{(1)}$:

$$M^{(n)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Fixons maintenant un entier n et voyons comment compter le nombre de chemins de longueur $n+1$ joignant le sommet i au sommet j. On classe ces chemins en fonctions du sommet auquel on se trouve après n pas. L'ensemble des chemins de longueur $n+1$ joignant le sommet i au sommet j est la réunion pour k allant de 1 à 4 des ensembles des chemins de longueur $n+1$ joignant le sommet i au sommet j tels qu'au bout de n pas on se trouve au sommet k. S'il n'y a pas de flèche entre k et j alors il n'y a aucun chemin de longueur $n+1$ joignant le sommet i au sommet j tel qu'au bout de n pas on se trouve au sommet k. S'il a une flèche entre k et j alors il y a autant de chemins de longueur $n+1$ joignant le sommet i au sommet j tel qu'au bout de n pas on se trouve au sommet k qu'il y a de chemins de longueur n joignant le sommet i au sommet k. On peut résumer ces phrases trop longues par l'égalité

$$m_{ij}^{(n+1)} = \sum_{k=1}^{4} m_{ik}^{(n)} m_{kj}^{(1)}.$$

Cela s'écrit encore matriciellement

$$M^{(n+1)} = M^{(n)} M^{(1)}.$$

On montre donc par récurrence qu'on a

$$M^{(n)} = (M^{(1)})^n.$$

Pour calculer les nombres demandés dans l'énoncé de l'exercice il suffit donc de calculer les puissances de $M^{(1)}$:

$$M^{(2)} = (M^{(1)})^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$M^{(3)} = M^{(1)} M^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$M^{(5)} = M^{(2)} M^{(3)} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 5 & 5 \\ 2 & 4 & 5 & 4 \\ 2 & 2 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$M^{(8)} = M^{(5)} M^{(3)} = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 5 & 5 \\ 2 & 4 & 5 & 4 \\ 2 & 2 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 & 21 & 21 & 21 \\ 10 & 17 & 18 & 17 \\ 7 & 10 & 10 & 11 \\ 4 & 7 & 6 & 6 \end{pmatrix}$$

On peut alors répondre aux questions posées : le nombre de chemins de longueur 3 allant de 1 à 3 est 2, le nombre de chemins de longueur 8 allant de 1 à 3 est 21, le nombre total de chemins de longueur 5 est la somme de tous les coefficients de $M^{(5)}$, soit 47.