Quelques corrigés

Corrigé 1. Exercice 6 de la feuille 1
1) L'espace des éventualités est l'ensemble des parties à n éléments d'un ensemble à 26 éléments. On suppose qu'il y a équiprobabilité sur cet ensemble *i.e.* :

$$\mathbb{P}(A) = \frac{Card(A)}{\binom{26}{n}}.$$

Pour calculer la probabilité d'avoir au moins une femme et un homme dans la partie choisie il est plus facile ici de calculer la probabilité de ne pas avoir de femme ou pas d'homme. Cette probabilité est la somme de la probabilité de ne pas avoir de femme et de la probabilité de ne pas avoir d'homme (car si n n'est pas nul les deux événements sont disjoints).
Une partie ne comporte pas de femme si les n personnes ont été prises dans l'ensemble des femmes. La probabilité de cet événement est

$$\frac{\binom{10}{n}}{\binom{26}{n}}.$$

De la même façon la probabilité de ne pas obtenir d'homme est

$$\frac{\binom{16}{n}}{\binom{26}{n}}.$$

La probabilité d'obtenir au moins un homme et une femme est donc

$$1 - \frac{\binom{10}{n}}{\binom{26}{n}} - \frac{\binom{16}{n}}{\binom{26}{n}}.$$

Remarque : On peut aussi dire que pour avoir au moins une femme et un homme, il faut avoir une femme et $n-1$ hommes ou deux femmes et $n-2$ hommes ou trois femmes et $n-3$ hommes ou... ou $n-2$ femmes et 2 hommes ou $n-1$ femmes et un homme. On obtient alors une autre expression de la même probabilité :

$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{\binom{16}{k}\binom{10}{n-k}}{\binom{26}{n}}.$$

2) Comme dans la question précédente il est plus simple de calculer la probabilité que les élèves aient des dates d'anniversaires toutes différentes. L'espace des éventualités est ici l'ensemble des 40-listes de jours de l'année. Pour simplifier on supposera que l'année a 365 jours. Le cardinal de l'ensemble des éventualités est : 365^{40}. Le nombre de listes de dates toutes différentes est : 365.364.363....327. 326. La probabilité que toutes les dates soient différentes est donc :

$$\frac{365.364.363....327.326}{365^{40}} \simeq 0,109.$$

Deux élèves ont donc même date anniversaire avec probabilité à peu près $0,9$.

Corrigé 2. Exercice 7 de la feuille 1
Là encore il est préférable de passer par l'événement complémentaire. La probabilité que Monsieur Y n'obtienne pas de 6 est : $(5/6)^6$. La probabilité que Madame X n'obtienne pas de 6 est : $(5/6)^{12}$. La probabilité qu'elle obtienne un 6 exactement est : $12.(5/6)^{11}.(1/6)$. Monsieur Y gagne donc avec probabilité : $1-(5/6)^6 \simeq 0,66$. Madame X gagne avec probabilité : $1-(5/6)^{12} - 12.(5/6)^{11}.(1/6) \simeq 0,62$

Corrigé 3. Réponses de l'exercice 8 de la feuille 1 : $1/6$ et $1/p!$.

Corrigé 4. Exercice 11 de la feuille 1
Ici on n'utilise pas l'événement complémentaire.
1) L'ensemble des éventualités est l'ensemble des permutations de $\{1, 2, 3\}$. Le cardinal de cet ensemble est 6. Les permutations pour lesquelles il y a au moins une coïncidence sont les suivantes : $(1, 2, 3)$ (trois coïncidences), $(1, 3, 2)$, $(2, 1, 3)$, $(3, 2, 1)$ (une coïncidence). La probabilité qu'il y ait au moins une coïncidence est donc $4/6 = 2/3$.
2) L'ensemble des éventualités est l'ensemble des permutations de $\{1, 2, 3, ..., n\}$. Son cardinal est $n!$.
Notons A_i l'événement «la boule i porte le numéro i». Ce qu'on cherche est la probabilité de la réunion des A_i. Pour cela on va utiliser la formule de Poincaré :

$$\mathbb{P}(\cup_{k=1}^{n} A_k) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(A_k) - \sum_{k \neq j} \mathbb{P}(A_k \cap A_j) + \sum_{k \neq j, k \neq l, j \neq l} \mathbb{P}(A_j \cap A_k \cap A_l) - ...$$

Notons J_k l'ensemble des parties de $\{1, ..., n\}$ ayant k éléments. On peut réécrire la formule de Poincaré sous la forme suivante :

$$\mathbb{P}(\cup_{k=1}^{n} A_k) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \sum_{J \in J_k} \mathbb{P}(\cap_{j \in J} A_j).$$

L'événement A_i est l'ensemble des permutations qui fixent i. Le cardinal de cet ensemble est donc $(n-1)!$ (toutes les permutations des $n-1$ numéros restant). La probabilité de chacun des A_i est donc $\mathbb{P}(A_i) = \frac{(n-1)!}{n!}$. L'événement $A_i \cap A_j$ $(i \neq j)$ est l'ensemble des permutations qui fixent i et j. Le cardinal de cet ensemble est $(n-2)!$. De la même façon, pour $J \in J_k$, le cardinal de l'événement $\cap_{j \in J} A_j$ est $(n-k)!$. La somme $\sum_{J \in J_k} \mathbb{P}(\cap_{j \in J} A_j)$ est donc une somme de termes tous égaux à $\frac{(n-k)!}{n!}$. Le nombre de termes dans cette somme est $\binom{n}{k}$. On a donc

$$\sum_{J \in J_k} \mathbb{P}(\cap_{j \in J} A_j) = \binom{n}{k} \frac{(n-k)!}{n!} = 1/k!.$$

Finalement on obtient

$$\mathbb{P}(\cup_{k=1}^{n} A_k) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} 1/k!$$

Cette quantité vaut $1 - 1/e$ à $1/(n+1)!$ près.