Chapitre 2
Programmation linéaire [1] [2]

0.1 Un exemple

Dans une raffinerie on décompose du pétrole brut en appliquant des procédés physiques ou chimiques afin d'obtenir de nouveaux produits. Ce qu'on obtient dépend du procédé employé. On admet qu'une raffinerie fournit trois types de composants : du pétrole lourd (noté S comme lourd), du pétrole moyen (M), du pétrole léger (L). Elle dispose de deux procédés différents dont les coûts (énergie, amortissement des machines, travail) et les résultats sont les suivants (pour dix unités de pétrole brut) :
le procédé 1, fournit 3 unités de L, 2 unités de M, 1 unité de L pour un coût de 3 unités monétaires ;
le procédé 2, fournit 1 unités de L, 2 unités de M, 4 unité de L pour un coût de 5 unités monétaires.

La raffinerie doit satisfaire une commande de 3 unités de S, 5 unités de M et 4 unités de L et souhaite le faire au coût le plus bas possible. On suppose que les deux procédés fonctionnent de manière indépendante et qu'ils peuvent utiliser une quantité quelconque de pétrole brut.

Notons x_1 la quantité de pétrole brut utilisée par le procédé 1 (en dizaine d'unité, $x_1 = 1,5$ signifie qu'on consomme 15 unités de brut par le procédé 1). On note de même x_2 la quantité consommée par l'utilisation du procédé 2.

Supposons qu'on utilise les procédés 1 et 2 avec des quantités de brut $10x_1$ et $10x_2$, alors les quantités produites sont :

$$2x_1 + x_2 \text{ pour S},\ 2x_1 + 2x_2 \text{ pour M},\ x_1 + 4x_2 \text{ pour L}.$$

Pour que la commande soit satisfaite il faut donc qu'on ait

$$2x_1 + x_2 \geq 3,\ 2x_1 + 2x_2 \geq 5,\ x_1 + 4x_2 \geq 4.$$

1. Une partie du contenu de ces notes est repris d'un cours de Martin Grötschel (Lineare Optimierung (ADM II)) disponible sur internet http://www.zib.de/groetschel/teaching/materials.html

2. Ce document est une première version appelée à évoluer. Merci de me signaler les erreurs, coquilles,... que vous repéreriez.

À ces contraintes il faut bien sûr ajouter le fait que x_1 et x_2 ne peuvent être négatives :

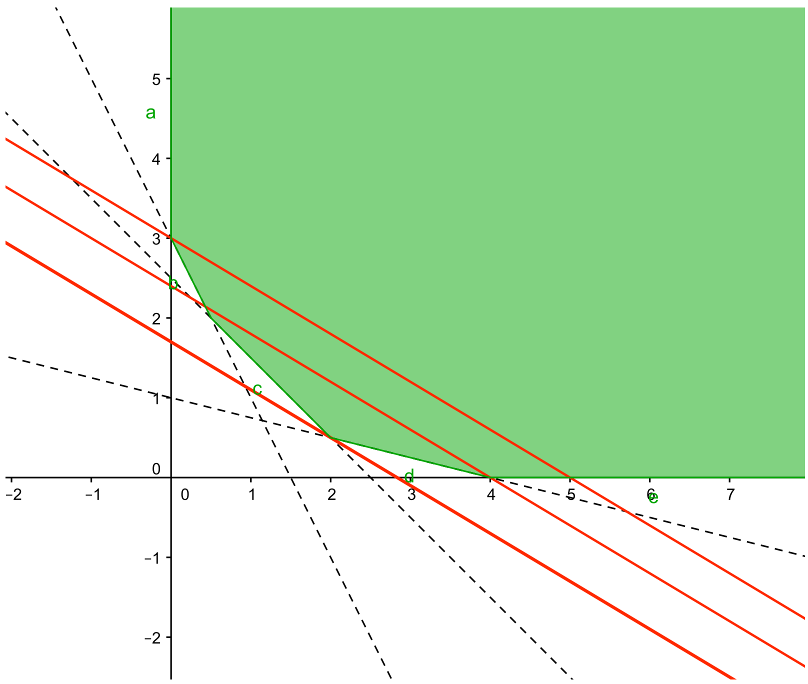
$$x_1 \geq 0, \; x_2 \geq 0.$$

On cherche donc des valeurs de x_1 et x_2 qui respectent ces contraintes telles que $3x_1 + 5x_2$ soit le plus petit possible. C'est ce qu'on appelle un problème de programmation linéaire ou d'optimisation linéaire. On l'écrit de la façon suivante :

$$\min 3x_1 + 5x_2,$$

$$s.c. \;\; 2x_1 + x_2 \geq 3, \; 2x_1 + 2x_2 \geq 5, \; x_1 + 4x_2 \geq 4, \; x_1 \geq 0, \; x_2 \geq 0.$$

La fonction $3x_1 + 5x_2$ s'appelle la fonction objectif. Tout vecteur (x_1, x_2) respectant les contraintes s'appelle une solution admissible du problème. Ici on peut résoudre graphiquement le problème. On considère le plan muni d'un repère et on appelle x_1 et x_2 l'abscisse et l'ordonnée d'un point. Chacune des contraintes indique que le points (x_1, x_2) est d'un côté d'un droite (qui délimite deux demi-plans). Par exemple $2x_1 + 2x_2 \geq 5$ signifie que le point (x_1, x_2) est au-dessus de la droite d'équation $2x_1 + 2x_2 = 5$. L'ensemble des points respectant les cinq contraintes est représenté en vert sur la figure ci-dessous.



Les lignes de niveau de la fonction objectif sont les ensembles $3x_1 + 5x_2 = t$. Ce sont des droites parallèles. Trois telles droites sont représentées en rouge ci-dessus. Ce qu'on cherche ce sont les point de l'ensemble vert de niveau minimal (pour la fonction objectif). Plus une droite rouge est haute, plus le niveau auquel elle correspond est élevé. On cherche donc la droite rouge le plus bas possible qui touche l'ensemble vert. Cette droite est représentée sur le schéma : elle passe par le point de coordonnées $(2, 1/2)$. On en déduit que le minimum recherché est $3.2 + 5.1/2 = 17/2$ atteint pour $x_1 = 2$ et $x_2 = 1/2$.

On peut dire que les dessins faits montrent que nous avons bien résolu notre problème. Mais si le nombre de variables concernées est plus grand (par exemple 333 ce qui est tout à fait possible) alors ce type de visualisation sera beaucoup plus difficile (car notre intuition géométrique en dimension 333 est très limitée). Il nous faut donc développer des méthodes systématiques valables en toute dimension qui ne reposent pas sur notre vision en dimension 2 ou 3.

Une notion naturelle en programmation linéaire est celle de programme dual. Introduisons trois variables positives ou nulles y_1, y_2, y_3, multiplions chacune des contraintes

$$2x_1 + x_2 \geq 3,\ 2x_1 + 2x_2 \geq 5,\ x_1 + 4x_2 \geq 4.$$

respectivement par y_1, y_2, y_3 et additionnons les. Nous obtenons

$$(2y_1 + 2y_2 + y_3)x_1 + (y_1 + 2y_2 + 4y_3) \geq 3y_1 + 5y_2 + 4y_3.$$

Si on suppose en plus que

$$2y_1 + 2y_2 + y_3 \leq 3 \text{ et } y_1 + 2y_2 + 4y_3 \leq 5,$$

alors le membre de gauche de cette inégalité est inférieure à la fonction objectif. La fonction objectif est donc supérieure à $3y_1 + 5y_2 + 4y_3$ dans ce cas. Posons alors le problème d'optimisation

$$\max 3y_1 + 5y_2 + 4y_3$$
$$s.c.\ 2y_1 + 2y_2 + y_3 \leq 3\ y_1 + 2y_2 + 4y_3 \leq 5\ y_1 \geq 0\ y_2 \geq 0\ y_3 \geq 0.$$

Le calcul que nous avons fait montre que si les contraintes des deux problèmes linéaires sont satisfaites alors toute valeur de la fonction objectif du deuxième problème est inférieure à toute valeur de la fonction objectif du premier problème. Conclusion : si on trouve une valeur commune aux deux fonctions objectif (les contraintes étant respectées) alors cette valeur commune est le minimum recherché du premier problème et le maximum recherché du deuxième problème. Ce deuxième problème est appelé le problème dual du premier.

Le langage des matrices fournit une manière concise d'écrire ces problèmes. Introduisons les notations suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \quad c = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} \quad y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Alors le premier problème s'écrit

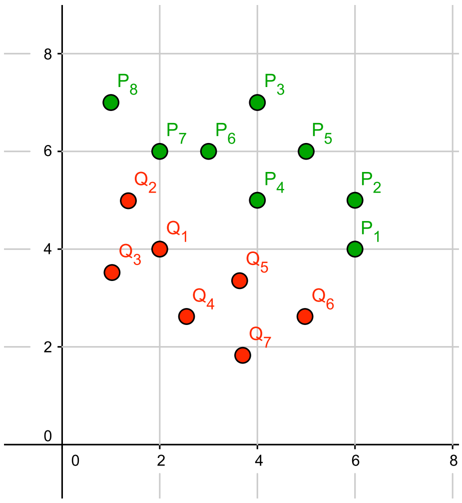
$$\min\langle c, x\rangle \ s.c.\ Ax \geq b, x \geq 0,$$

où il faut comprendre qu'un vecteur est supérieur ou égal à un autre si chacune des coordonnées du premier est supérieure à la coordonnée correspondante du deuxième. Le deuxième problème s'écrit

$$\max\langle b, y\rangle \ s.c. \ {}^tAy \leq c, y \geq 0.$$

0.2 Exemples de problèmes liés à la programmation linéaire

Séparation de points



$$\max \delta,$$

$$s.c. \ \forall i = 1, \ldots, 7 \ y(q_i) \leq ax(q_i) + b + \delta, \forall i = 1, \ldots, 8 \ y(p_i) \geq ax(p_i) + b - \delta.$$

On peut chercher à séparer les deux ensembles de points par autre chose que des droites (des paraboles, des courbes de degré trois,...) ou encore résoudre ce genre de problème en dimension plus grande.

Alternative à la droite de régression linéaire

On cherche à minimiser la quantité

$$\sum_{i=1}^{n} |y_i - ax_i - b|$$

Une solution analytique comme celle que nous utilisons pour minimiser

$$\sum_{i=1}^{n} (y_i - ax_i - b)^2$$

qui mène à la droite de régression est difficile à décrire simplement. Mais donner une solution algorithmique basée sur une présentation du problème comme programme linéaire est possible :

$$\min l_1 + l_2 + \ldots + l_n,$$

$$s.c.\ \forall i = 1, \ldots, n\ l_i \geq y_i - ax_i - b,\ \ l_i \geq -y_i + ax_i + b.$$

0.3 Quelques éléments d'algèbre linéaire et de géométrie affine

Les problèmes de programmation linéaire sont résolus par des opérations très classiques sur les matrices (essentiellement la méthode du pivot de Gauss). Les contraintes et la fonction à optimiser sont de nature linéaire. Pour bien comprendre les problèmes et leurs résolutions l'outil matriciel (calculatoire et théorique) est essentiel. Considérons les matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} \quad c = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 4 \\ 10 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Les vecteurs de la base canonique de $\mathbb{R}^5$ sont

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad e_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad e_5 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Les vecteurs colonnes de A sont les résultats de la multiplication de A par ces vecteurs de la base canonique. Par exemple

$$A.e_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

L'image de l'application linéaire définie par la multiplication par A est le sous-espace vectoriel engendré par ses vecteurs colonne. Le rang de la matrice A est la dimension de cette image. Cette dimension ne peut pas excéder la dimension de l'espace d'arrivée (*i.e.* le nombre de lignes de la matrice, ici 3), ni le nombre de vecteurs colonne (ici 5 ; la dimension de l'espace d'arrivée). Le rang d'une matrice de taille $m \times n$ est donc au plus $\min(m, n)$. On dit qu'une matrice $m \times n$ est de rang plein (ou maximal) si son rang est $\min(m, n)$.

Définition 0.1. *Soit P une partie de $\mathbb{R}^d$. On appelle sous-espace affine engendré par P le plus petit sous-espace affine contenant P.*

Définition 0.2. *Un sous-espace affine de* $\mathbb{R}^d$ *est un ensemble de la forme*

$$x + E = \{x + u \in \mathbb{R}^d \; / u \in E\}$$

où x *est un point de* $\mathbb{R}^d$ *et* E *un sous-espace vectoriel de* $\mathbb{R}^d$ *: c'est le sous-espace affine de direction* E *passant par* x*. On appelle dimension d'un sous-espace affine la dimension du sous-espace vectoriel définissant sa direction* $(\dim E)$*.*

Si y et z appartiennent tous les deux à $x + E$ alors $y - z$ appartiennent à E. Pour définir complètement un sous-espace affine il suffit de se donner x et un base de E, ou encore $\dim E + 1$ points $x_0, \ldots, x_{\dim E}$ tels que les vecteurs $x_i - x_0$ engendrent E. On dit que de tels points sont affinement indépendants et que $x + E$ est l'enveloppe affine de la famille $(x_0, \ldots, x_{\dim E})$.

Définition 0.3. *Soit* P *une partie de* E*. On appelle enveloppe affine de* P *l'ensemble*

$$\{\sum_{i=1}^{l} \alpha_i x_i \; / \; l \in \mathbb{N}^*, x_1, \ldots, x_l \in P, \sum_{i=1}^{l} \alpha_i = 1\}.$$

Soient u et v deux vecteurs appartenant tous les deux à $\mathbb{R}^d$. On dit que u est inférieur à v si chaque coordonnée de u est inférieure à v : pour tout $i = 1, \ldots, d$, $u_i \leq v_i$ [3]

Soit A une matrice $m \times m$ et $b \in \mathbb{R}^m$. Notons $a_{i,j}$ les coefficients de A. L'ensemble $C(A, b) = \{x \; : \; Ax \leq b\}$ est l'ensemble des x tels que, pour tout i allant de 1 à m on ait

$$\sum_{j=1}^{n} a_{i,j} x_j \leq b_j.$$

Pour i allant de 1 à m, notons l_i le vecteur de $\mathbb{R}^n$ dont les coordonnées sont les $a_{i,j}$:

$$l_i = (a_{i,1}, a_{i,2}, \ldots, a_{i,n}).$$

Les inégalités plus haut s'écrivent

$$\langle l_i, x\rangle \leq b_i.$$

L'ensemble $\{x \; / \; \langle l_i, x\rangle \leq b_i\}$ est un demi-espace dont le bord est l'hyperplan *affine* $\{x \; / \; \langle l_i, x\rangle = b_i\}$. L'ensemble $C(A, b)$ apparaît ainsi comme l'intersection des m demi-espaces $\{x \; / \; \langle l_i, x\rangle \leq b_i\}$ (il faut que les m inégalités soient satisfaites c'est-à-dire que x doit être dans les m demi-espaces à la fois).

3. Ce n'est pas une relation d'ordre totale : deux vecteurs ne sont pas forcément comparables. Par exemple $(1, 2)$ et $(2, 1)$ ne sont pas comparables dans $\mathbb{R}^2$ au sens de cette relation $\leq$.

0.4 Formes canoniques et standard

On peut distinguer un problème primal et un problème dual. C'est le point de vue de celui à qui se pose le problème qui détermine lequel est primal, lequel est dual.

Formes canoniques

Problème primal : $\min\langle c, x\rangle$ sous contraintes $Ax \geq b$, $x \geq 0$.

Problème dual : $\max\langle b, y\rangle$ sous contraintes ${}^tAy \leq c$, $y \geq 0$.

Formes standard

Problème primal : $\max\langle c, x\rangle$ sous contraintes $Ax \leq b$.

Problème dual : $\min\langle b, y\rangle$ sous contraintes ${}^tAy = c$, $y \geq 0$.

Cette dernière forme est la forme adaptée pour appliquer l'algorithme du simplexe.

A est une matrice $m \times n$, x, c des vecteurs $n \times 1$, y des vecteurs $m \times 1$.

Supposons que x et y satisfont les contraintes des problèmes primal et dual sous la forme standard. On a alors

$$\langle c, x\rangle =^t ({}^tAy)x =^t yAx \leq^t yb = \langle b, y\rangle,$$

la première égalité est vraie car y satisfait les contraintes du programme dual, la deuxième est un calcul de transposée de produit de matrice, l'inégalité est vraie car x satisfait les contraintes du problème primal et car $y \geq 0$.

Ce que montre le calcul précédent est que si les contraintes sont vérifiées, toutes les valeurs de la fonction objectif $\langle c, x\rangle$ sont inférieures ou égales à celles, $\langle b, y\rangle$, du programme dual. On en déduit que si on trouve une valeur commune aux deux fonctions obejectif en deux points dans les ensembles définis par les contraintes alors on a résolu les deux problèmes en même temps.

Si l'ensemble défini par les contraintes du problème primal n'est pas vide mais que la fonction objectif n'est pas majorée sur cet ensemble alors nécessairement l'ensemble défini par les contraintes du problème dual est vide (et on a une affirmation symétrique).

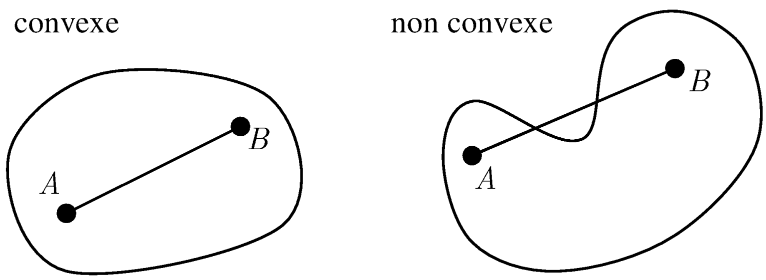
Si aucun des deux ensembles définis par les contraintes n'est vide alors la fonction objectif du problème primal est majorée donc a une borne supérieure, celle du problème dual est minorée, donc a une borne inférieure. Ces bornes sont-elles atteintes ? Sont-elles égales ?

Considérons l'ensemble $C(A, b) = \{x \ : \ Ax \leq b\}$. C'est une intersection de m demi-espaces : on appelle un tel ensemble un polyèdre.

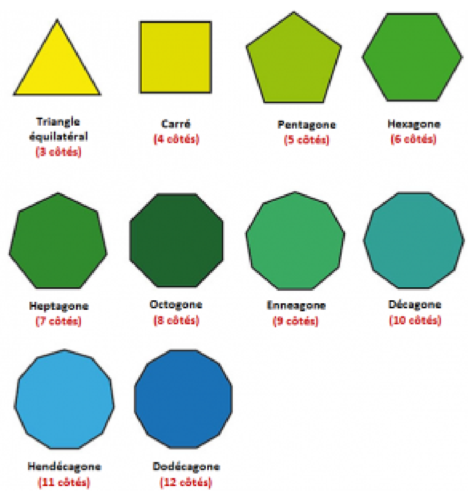
Pour répondre à ces questions nous allons étudier les propriétés des ensembles de contraintes qui sont appelés des polyèdres. Ce sont des exemples de parties dites convexes d'espaces vectoriels. Commençons par étudier les convexes en général. Ce sont des ensembles apparaissant souvent en optimisation.

0.5 Quelques propriétés des convexes fermés

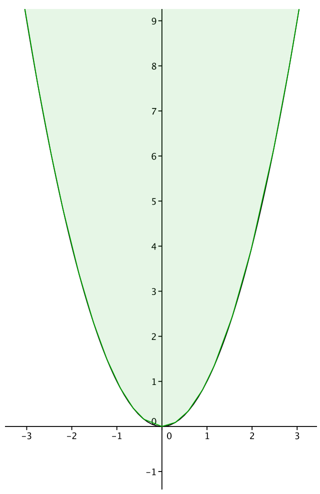
Définition 0.4. *Soit C une partie de $\mathbb{R}^d$. On dit que C est convexe si lorsque x et y sont deux points de C, alors le segment joignant ces deux points $[x, y] = \{tx + (1-t)y \ / \ t \in [0, 1]\}$ est lui aussi inclus dans C.*

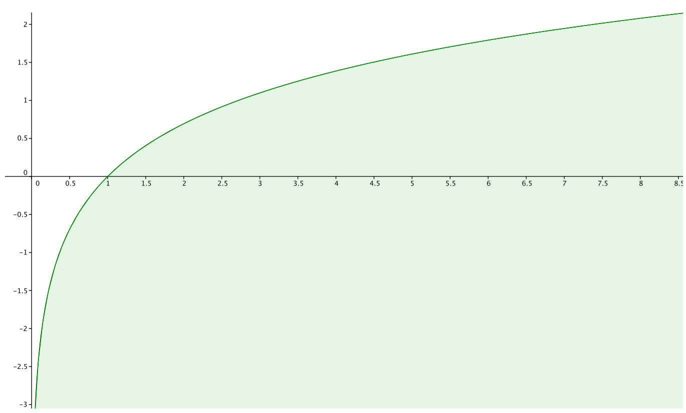


Des exemples en dimension 2.

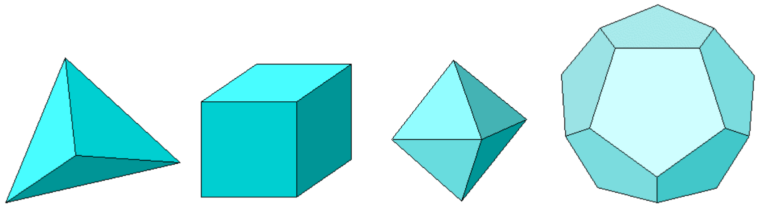


La partie située au dessus da la parabole ou en-dessous du graphe de la fonction ln :





Des exemples en dimension 3.



En dimension quelconque, un polyèdre $C(A, b)$ est convexe. Soient deux points x et y tels que $Ax \leq b$ et $Ax \leq b$, et λ appartenant à $[0, 1]$. Par linéarité (ou distributivité du produit) on a

$$A(\lambda x + (1 - \lambda)y) = \lambda Ax + (1 - \lambda)Ay.$$

Par hypothèse Ax et Ay sont inférieurs ou égaux à b, et comme λ et $(1 - \lambda)$ sont positifs ou nuls, on en déduit

$$A(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda b + (1 - \lambda)b = b,$$

ce qui signifie que $\lambda x + (1 - \lambda)y$ appartient à $C(A, b)$.

Soit C un ensemble convexe fermé inclus dans $\mathbb{R}^d$. C'est aussi une partie convexe de $Aff(C)$. On appelle intérieur relatif de C son intérieur comme sous-ensemble de $Aff(C)$. On a

$$C = \overline{Int_r(C)},$$

alors que l'intérieur de C dans $\mathbb{R}^d$ peut-être vide. Le bord relatif de C est $\partial_r(C) = C \setminus Int_r(C)$.

Définition 0.5. *Un point x est dit barycentre à coefficients positifs de deux points y et z s'il existe $\alpha \in]0, 1[$ tel que $x = \alpha y + (1 - \alpha)z$.*

Une face d'un convexe C de $\mathbb{R}^d$ est une partie F de C telle que si $x \in F$ est barycentre à coefficients positifs de deux points y et z de C alors y et z appartiennent aussi à F.

On appelle point extrémal d'un convexe fermé C une face réduite à un point c'est-à-dire un point x de C tel que si $x = \alpha y + (1 - \alpha)z$ avec $\alpha \in]0, 1[$, y et z dans C alors $x = y = z$.

Lorsque C est un polyèdre on appelle sommets ses points extrémaux. Comment trouver les sommets d'un polyèdre $C(A, b)$? En a-t-il ? Si le rang de A n'est pas n alors $C(A, b)$ contient une droite et n'a pas de sommet. En effet, dans ce cas le noyau de l'application $\phi_A : x \mapsto Ax$ est de dimension suprérieure ou égale à 1 car la formule du rang donne

$$\dim Ker\phi_A + \dim Im\phi_A = n,$$

donc si $\dim Im\phi_A < n$ alors $\dim Ker\phi_A \geq 1$. Or si $x \in C(A, b)$ et $z \in Ker\phi_A$ alors $A(x + z) = Ax + Az = Ax + 0 = Ax \leq b$. Cela signifie que $x + z$ appartient à $C(A, b)$. Si $Ker\phi_A$ n'est pas réduit à 0, $C(A, b)$ contient donc une droite (à moins qu'il ne soit vide auquel cas il n'a pas non plus de point extrémaux).

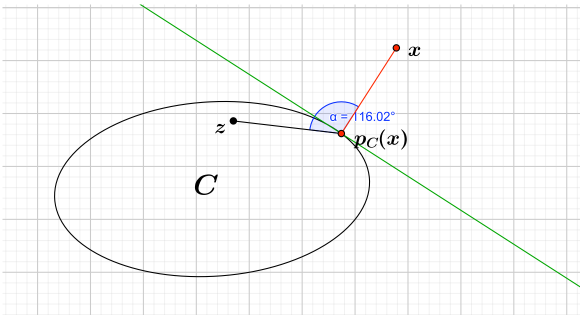
Théorème 0.6. *(projection sur un convexe) Soit C un convexe fermé inclus dans $\mathbb{R}^d$. Pour tout x n'appartenant pas à C il existe un unique point $p_C(x)$ de C minimisant la distance de x aux points de C c'est-à-dire tel que*

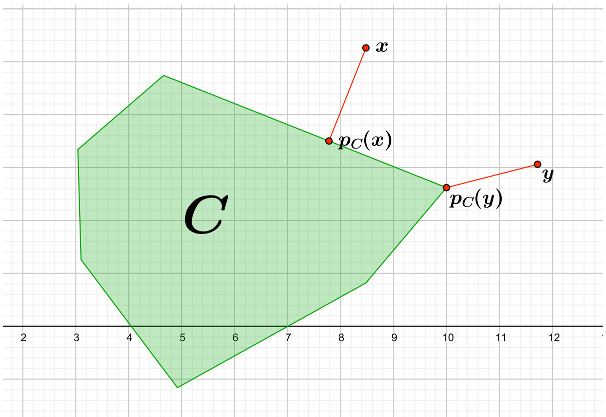
$$d(x, p_C(x)) = \min\{d(x,y) \ / \ y \in C\}.$$

Ce point $p_C(x)$ est appelé projection de x sur C. Il est caractérisé par la propriété que pour tout $z \in C$ on a

$$\langle x - p_C(x), z - p_C(x) \rangle \leq 0.$$

(ce qui signifie que l'angle fait par les vecteurs $x - p_C(x)$ et $z - p_C(x)$ est obtus).





<u>Démonstration</u> Soient $x \notin C$ et $y \in C$. L'ensemble $K = C \cap \overline{B(x, d(x,y)+1)}$ est un convexe fermé borné (fermé et convexe car intersection de deux ensembles fermés et convexes, borné car inclus dans une boule). L'ensemble $\{d(x,z) \ / \ z \in C\}$ est inclus dans $\mathbb{R}_+$. Il admet donc une borne inférieure qui est par définition la distance de x à C. Il existe une suite d'éléments de C telle que $d(y_n, x) \to_{n \to +\infty} d(x, C)$. À partir d'un certain rang y_n appartient à K (car à partir d'un certain rang $d(y_n, x) < d(y, x) + 1$). Comme K est compact, on peut extraire de la suite (y_n) une sous-suite convergente. Soit y_∞ la limite de cette suite extraite. On a $d(y_\infty, x) = d(x, C)$.

Supposons qu'on ait deux points y_∞ et z_∞ qui vérifient tous les deux

$$d(y_\infty, x) = d(x, C) \text{ et } d(z_\infty, x) = d(x, C).$$

Calculons $d(x,(y_\infty + z_\infty)/2)$

$$\begin{aligned} d(x,(y_\infty + z_\infty)/2)^2 &= \|x - \frac{y_\infty + z_\infty}{2}\|^2 \\ &= \|\frac{x-y_\infty}{2} + \frac{x-z_\infty}{2}\|^2 \\ &= \frac{1}{4}\left(\|x-y_\infty\|^2 + \|x-z_\infty\|^2 + 2\langle x-y_\infty, x-z_\infty\rangle\right). \end{aligned}$$

L'inégalité de Cauchy-Schwarz donne

$$\langle x-y_\infty, x-z_\infty\rangle \leq \|x-y_\infty\|\|x-z_\infty\|$$

avec égalité si $x-y_\infty$ est un multiple positif de $x-z_\infty$. On en déduit que

$$d(x,(y_\infty+z_\infty)/2)^2 \leq \frac{1}{4}\left(\|x-y_\infty\|^2 + \|x-z_\infty\|^2 + 2\|x-y_\infty\|\|x-z_\infty\|\right) = d(x,C)^2$$

avec égalité si $x-y_\infty$ est un multiple positif de $x-z_\infty$. Mais, comme par hypothèse $\|x-y_\infty\| = \|x-z_\infty\| = d(x,C)$, la seule possibilité est que $x-y_\infty = x-z_\infty$, autrement dit que $y_\infty = z_\infty$. Comme C est convexe, $(y_\infty+z_\infty)/2$ appartient à C. Par définition de $d(x,C)$ la distance $d(x,(y_\infty+z_\infty)/2)$ est supérieure ou égale à $d(x,C)$. On est donc dans le cas d'égalité.

On a montré l'existence d'un unique point de C qui soit à distance $d(x,C)$ de x : on peut appeler ce point $p_C(x)$.

Expliquons maintenant comment voir que les angles entre $x-p_C(x)$ et les vecteurs $z-p_C(x)$ pour $z \in C$ dont obtus. Remarquons que comme C est convexe pour tout $\lambda \in [0,1]$, le point $(1-\lambda)p_C(x) + \lambda z$ appartient à C. Cela entraîne que pour tout $\lambda \in [0,1]$ on a

$$d(x,(1-\lambda)p_C(x) + \lambda z) \geq d(x,C) = d(x,p_C(x)).$$

En exprimant ces distances comme des normes et en prenant le carré on obtient

$$\|(x - ((1-\lambda)p_C(x) + \lambda z)\ \|^2 \geq \|(x - p_C(x)\|^2,$$

ce qui s'écrit encore

$$\|(x-p_C(x)) + \lambda(p_C(x) - z))\|^2 \geq \|(x-p_C(x)\|^2.$$

En écrivant le premier membre comme un produit scalaire et en utilisant la bilinéarité on en déduit

$$\|x-p_C(x)\|^2 + \lambda^2\|p_C(x) - z\|^2 + 2\lambda\langle x-p_C(x), p_C(x)-z\rangle \geq \|x-p_C(x)\|^2,$$

ce qui donne

$$\lambda^2\|p_C(x)-z\|^2 + 2\lambda\langle x-p_C(x), p_C(x)-z\rangle \geq 0.$$

Si on suppose maintenant $\lambda > 0$ on peut diviser par λ. On obtient que pour tout $\lambda \in]0, 1]$ on a

$$\lambda \|p_C(x) - z\|^2 + 2\langle x - p_C(x), p_C(x) - z\rangle \geq 0.$$

En faisant tendre λ vers 0, on voit que ceci n'est possible que si $\langle x - p_C(x), p_C(x) - z\rangle \geq 0$, ce qui est la même chose que $\langle x - p_C(x), z - p_C(x)\rangle \leq 0$. $\square$

Le théorème de projection fournit ce qu'on appelle des hyperplans et des demi-espaces d'appui pour le convexe C. Si $y \notin C$ alors

$$H = \{u \in \mathbb{R}^d \ / \ \langle u, y - p_C(y)\rangle = \langle p_C(y), y - p_C(y)\rangle\},$$

l'hyperplan orthogonal à $y - p_C(y)$ passant par $p_C(y)$, sépare $\mathbb{R}^d$ en deux demi-espaces dont l'un contient C :

$$C \subset \{u \in \mathbb{R}^d \ / \ \langle u, y - p_C(y)\rangle \leq \langle p_C(y), y - p_C(y)\rangle\}.$$

L'application p est continue. Plus précisément, si y et z sont deux points n'appartenant pas à C, alors

$$\|p_C(y) - p_C(z)\| \leq \|y - z\|.$$

C'est une conséquence de la propriété sur l'angle donnée plus haut :

$$\begin{aligned}
\|p_C(y) - p_C(z)\|^2 &= \langle p_C(y) - p_C(z), p_C(y) - p_C(z)\rangle \\
&= \langle (p_C(y) - y) + (y - z) + (z - p_C(z)), p_C(y) - p_C(z)\rangle \\
&= \langle p_C(y) - y, p_C(y) - p_C(z)\rangle + \langle y - z, p_C(y) - p_C(z)\rangle \\
&\qquad + \langle z - p_C(z), p_C(y) - p_C(z)\rangle \\
&\leq \langle y - z, p_C(y) - p_C(z)\rangle \\
&\leq \|y - z\| \|p_C(y) - p_C(z)\|
\end{aligned}$$

La première inégalité vient du fait que les deux produits scalaires $\langle p_C(y) - y, p_C(y) - p_C(z)\rangle$ et $\langle z - p_C(z), p_C(y) - p_C(z)\rangle$ sont négatifs ou nuls. La deuxième est l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

Théorème 0.7. *(Minkowski) Soit C un convexe fermé borné inclus dans $\mathbb{R}^d$. Alors C est l'enveloppe convexe de ses points extrémaux.*

Théorème 0.8. *Soit C un convexe fermé inclus dans $\mathbb{R}^d$ ne contenant pas de droite. Alors C est l'enveloppe convexe de ses points extrémaux et de ses demi-droites extrémales.*

Démonstration Le théorème de Minkowski est une conséquence du deuxième résultat, si l'on remarque qu'un convexe fermé ne contenant pas de demi-droite est borné. Montrons le deuxième théorème par récurrence sur la dimension du convexe.

Les convexes fermés de dimension 1 sont les segments, les demi-droites et les droites. Si on suppose que C est de dimension 1 et ne contient pas de droite alors c'est un segment ou une demi-droite. Si c'est un segment alors il est l'enveloppe convexe de ses deux extrémités qui sont ses deux points extrémaux. Si c'est une demi-droite alors il coïncide évidemment avec l'enveloppe convexe de sa demi-droite extrémale.

Soit k un entier naturel. Supposons que le résultat soit vrai pour tout convexe fermé de dimension inférieur ou égal à k. Montrons qu'il l'est alors pour tout convexe de dimension $k+1$. Soit C un convexe fermé de dimension $k+1$ ne contenant pas de demi-droite. Le convexe C est inclus dans un espace $\mathbb{R}^d$ qui n'est pas nécessairement $\mathbb{R}^{k+1}$ mais quitte à remplacer $\mathbb{R}^d$ par $Aff(C)$ on peut supposer que C est inclus dans $\mathbb{R}^{k+1}$ et d'intérieur non vide. Soit x un point du bord de C. Il existe $y \notin C$ tel que $x = p_C(y)$. L'hyperplan

$$H = \{u \in \mathbb{R}^{k+1} \ / \ \langle u, y - p_C(y)\rangle = \langle p_C(y), y - p_C(y)\rangle\}$$

est un hyperplan d'appui pour C : H contient $p_C(y)$ et C est inclus dans l'un des demi-espaces définis pas H :

$$C \subset \{u \in \mathbb{R}^{k+1} \ / \ \langle u, y - p_C(y)\rangle \leq \langle p_C(y), y - p_C(y)\rangle\}.$$

L'ensemble $H \cap C$ est donc un convexe fermé (car intersection de deux convexes fermés), non vide (car il contient $p_C(y)$), de dimension inférieure ou égale à k (car il est inclus dans H). Par hypothèse de récurrence $H \cap C$ est l'enveloppe convexe de ses points extrémaux et de ses demi-droites extrémales. Or les points extrémaux de $H \cap C$ sont extrémaux dans C. Cela provient du fait que H est un hyperplan d'appui de C : tous les points de C sont du même côté de H. Si x est un point extrémal de $H \cap C$ et barycentre à coefficients positifs de deux points y et z de C alors y et z doivent être sur H (sinon l'un serait d'un côté de H, l'autre de l'autre côté, ce qui est impossible). On en déduit que y et z sont donc dans $H \cap C$. Or x est extrémal dans $H \cap C$ donc $y = z = x$. Nous avons donc montré que les points du bord de C étaient dans l'enveloppe convexe de ses points extrémaux et de ses demi-droites extrémales... à condition d'expliquer pourquoi il existe un point $y \notin C$ tel que $p_C(y) = x$.

Prenons une suite (y_k) de points qui ne soient pas dans C telle que $\lim y_k = x$. Alors $p(y_k)$ tend vers x. Notons $\mathbb{S}^k(x,1)$ la sphère de rayon 1 centrée en x et z_k l'intersection de la demi-droite $[x, y_k)$ avec $\mathbb{S}^k(x,1)$. Alors (z_k) est une suite de points à distance 1 de x qui sont projetés sur les points $p(y_k)$ qui tendent vers x. Comme la sphère $\mathbb{S}^k(x,1)$ est compacte, on peut extraire de (z_k) une suite convergente vers une limite z. Alors $d(z,x) = 1$, $z \notin C$ et (par continuité de p) $p(z) = x$.

Considérons maintenant un point x de l'intérieur de C. Notons $\mathbb{S}^k$ la sphère unité de $\mathbb{R}^{k+1}$ (c'est-à-dire l'ensemble des vecteurs de norme 1). Pour $v \in \mathbb{S}^k$ considérons la demi-droite

$$D_v = \{x + \lambda v \ / \ \lambda \geq 0\},$$

et la partie de $\mathbb{S}^k$ définie par

$$E = \{v \in \mathbb{S}^k \ / \ D_v \subset C\}.$$

Par hypothèse E ne contient pas deux vecteurs opposés (car C ne contient pas de droite). Comme C est fermé, E est fermé aussi. Les deux ensembles E et $-E$ sont donc deux parties fermées disjointes de $\mathbb{S}^k$. Ce sont donc deux parties compactes disjointes et comme telles elles sont à distance positive l'une de l'autre. On en déduit que leur réunion ne peut pas être égale à $\mathbb{S}^k$. Prenons $v_0 \in \mathbb{S}^k \setminus (E \cup -E)$. Alors $D_{v_0} \nsubseteq C$ et $D_{-v_0} \nsubseteq C$. Cela signifie qu'il existe λ et μ positifs tels que

$$x + \lambda v_0 \in \partial C \text{ et } x - \mu v_0 \in \partial C.$$

Autrement dit x est sur un segment joignant deux points du bord de C. Ces deux points sont dans l'enveloppe convexe des points extrémaux et des demi-droites extrémales de C (d'après la première partie de la démonstration), donc x aussi. $\square$

Proposition 0.9. *Soit C un convexe fermé inclus dans $\mathbb{R}^d$. Il est compact si et seulement s'il ne contient pas de demi-droite.*

Démonstration Une demi-droite n'est pas bornée donc si C contient une demi-droite, C n'est pas borné. Supposons que C ne soit pas bornée. Montrons qu'il contient une demi-droite. Comme C n'est pas borné, il existe une suite $(x_k)_{k\geq 0}$ telle que $\lim \|x_\| = +\infty$. Considérons alors la suite des vecteurs

$$u_k = \frac{x_k - x_0}{\|x_k - x_0\|}.$$

Ce sont des vecteurs de norme 1 donc des éléments de $\mathbb{S}^k$. Or $\mathbb{S}^k$ est compacte, donc on peut extraire de $(u_k)_{k\geq 0}$ une suite convergente $(u_{k_j})_{j\geq 0}$ vers une limite l appartenant à $\mathbb{S}^k$. Pour tout j, x_{k_j} appartient à C, donc $x_0 + u_{k_j}$ aussi (si j est assez grand, car c'est un point du segment $[x_0, x_{k_j}]$). Comme C est fermé, on en déduit que $x_0 + l$ appartient à C. Maintenant on peut voir que tout point de la forme $x_0 + \lambda l$, avec $\lambda \geq 0$, est limite de $x_0 + \lambda u_{k_j}$ (qui appartient à C si j est assez grand) donc est dans C. Conclusion : C contient la demi-droite $\{x_0 + \lambda l \ / \ \lambda \in \mathbb{R}_+\}$. $\square$

0.6 Les polyèdres

Théorème 0.10. *Un polyèdre a un nombre fini de faces. En particulier il a un nombre fini de sommets. S'il ne contient pas de droite il contient un nombre fini de demi-droites extrémales.*

Corollaire : un polyèdre compact est l'enveloppe convexe d'un nombre fini de points. Un polyèdre ne contenant pas de droites est l'enveloppe convexe d'un nombre fini de points et de demi-droites.

Question : Un polyèdre peut-il contenir une droite et avoir un sommet ?

Considérons un polyèdre du type suivant (ensemble de contraintes d'un programme linéaire sous forme standard)

$$C(A,b) = \{x \in \mathbb{R}^n \ / \ Ax = b,\ x \geq 0\},$$

où A est une matrice $m \times n$. Notons r le rang de A. Si $r < m$ alors, soit le système est incompatible, et dans ce cas $C(A,b)$, soit le système est équivalent à un système $A'x = b'$ avec une matrice $r \times n$ de rang r (en enlevant $m - r$ lignes superflues). Nous supposerons maintenant que $m \leq n$ et que A est de rang m.

Si $m = n$ le système $Ax = b$ a une unique solution, $C(A,b)$ est un point si $A^{-1}b \geq 0$, et vide sinon. Le cas le plus intéressant est $m < n$: $C(A,b)$ est l'intersection de $\{x \ / \ x \geq 0\}$ et d'un sous-espace affine de dimension $n - m$: s'il n'est pas vide, alors pour tout point x_0 de $C(A,b)$, on a

$$C(A,b) = [x_0 + \ker \phi_A] \cap \{x \ / \ x \geq 0\}.$$

0.7 Méthode du simplexe

L'algorithme du simplexe est un algorithme de résolution des problèmes d'optimisation linéaire. Il a été introduit par George Dantzig à partir de 1947. C'est probablement le premier algorithme permettant de minimiser une fonction sur un ensemble défini par des inégalités. De ce fait, il a beaucoup contribué au démarrage de l'optimisation numérique. L'algorithme du simplexe a longtemps été la méthode la plus utilisée pour résoudre les problèmes d'optimisation linéaire. Depuis les années 1985-90, il est concurrencé par les méthodes de points intérieurs, mais garde une place de choix dans certaines circonstances (en particulier si l'on a une idée des contraintes d'inégalité actives en la solution). [4]

Le nom de l'algorithme est dérivé de la notion de simplexe et a été suggéré par Motzkin2. En réalité, l'algorithme n'utilise pas de simplexes, mais certaines interprétations de l'ensemble admissible du problème renvoient au concept de simplexe.

0.7.1 L'algorithme

On se donne un programme linéaire sous forme standard

$$\max\langle c, x\rangle \quad s.c.\ Ax = b,\ x \geq 0.$$

La matrice A est de taille $m \times n$ avec $m \leq n$, les vecteurs c et x dans $\mathbb{R}^n$, le vecteur b dans $\mathbb{R}^m$. On suppose que A est de rang maximal m. Appelons $C(A,b)$ l'ensemble des vecteurs x satisfaisant les contraintes

$$C(A,b) = \{x \in \mathbb{R}^n \ / \ Ax = b,\ x \geq 0\}.$$

4. Wikipédia ; https ://fr.wikipedia.org/wiki/Algorithme_du_simplexe

Pour décrire l'algorithme il est pratique d'introduire certaines notations. Les sommets de $C(A, b)$ sont calculés à partir de matrices $m \times m$ obtenues en choisissant m colonnes parmi les n colonnes de A. On décrira un tel choix en indiquant quelles colonnes sont choisies (B) et quelles colonnes ne le sont pas (N). On se donnera deux familles d'indices B et N

$$B = (p_1, \ldots, p_m) \in \{1, \ldots, n\}^m, \; N = (q_1, \ldots, q_{n-m}) in \{1, \ldots, n\}^{n-m}$$

telles que les p_i soient tous différents des q_j (et vice-versa) et telles que en prenant les p_i et les q_i on obtienne tous les indices de 1 à n. On notera A_B la matrice obtenue à partir de A en ne conservant que les colonnes dont les numéros sont dans B, A_N a matrice obtenue à partir de A en ne conservant que les colonnes dont les numéros sont dans N. La matrice A_N est une matrice $m \times (n - m)$, la matrice A_B est une matrice carrée $m \times m$.

Lorsque B est donné et $x \in \mathbb{R}^n$ on note x_B le vecteur de $\mathbb{R}^m$ dont les coordonnées sont celles de x de numéros dans B, x_N le vecteur de $\mathbb{R}^{n-m}$ dont les coordonnées sont celles de x de numéros dans N.

Si A_B est inversible on dit que c'est une matrice de base de A (la famille B elle même est alors souvent qualifiée de base...). Dans ce cas le vecteur x défini par $x_B = A_B^{-1} b$, $x_N = 0$ est dit solution de base. Si A_B est une base les x_j pour j dans B sont dites variables de base, les x_k pour k dans N sont dites variables hors base.

Si A_B est une base, on dit que A_B et la solution de base sont admissibles si $A_B^{-1} b \geq 0$. Une base admissible est dite dégénérée si certaines des coordonnées de $A_B^{-1} b$ sont nulles, non dégénérée si $A_B^{-1} b > 0$.

Proposition 0.11. *Le polyèdre $C(A, b)$ ne contient pas de droites. Il est donc égal à l'enveloppe convexe de l'ensemble de ses points extrémaux et de ses demi-droites extrémales.*

<u>Démonstration</u> Une droite ne peut pas être incluse dans l'ensemble $\{x \; / \; x \geq 0\}$ a fortiori pas dans $C(A, b)$. Montrons qu'une droite contient toujours des points dont certaines coordonnées sont négatives. Soit D une droite. Elle peut être représentée paramétriquement par un point et un vecteur directeur

$$D = \{a + \lambda v \; / \; \lambda \in \mathbb{R}\},$$

où a et v sont deux vecteurs et v un vecteur directeur de D n'est pas nul. Soit i_0 tel que v_{i_0} ne soit pas nul. Suivant le signe de v_{i_0} on a

$$\lim_{\lambda \to +\infty} a_{i_0} + \lambda v_{i_0} = +\infty \text{ et } \lim_{\lambda \to -\infty} a_{i_0} + \lambda v_{i_0} = -\infty$$

ou

$$\lim_{\lambda \to +\infty} a_{i_0} + \lambda v_{i_0} = -\infty \text{ et } \lim_{\lambda \to -\infty} a_{i_0} + \lambda v_{i_0} = +\infty.$$

Dans tous les cas pour certaines valeurs de λ la coordonnée numéro i_0 de $a + \lambda v$ est négative.$\square$

En particulier $C(A,b)$ a des sommets. Soit $c \in \mathbb{R}^n$. Supposons que $\langle c, x\rangle$ soit majorée sur $C(A,b)$, alors le problème a une solution et le maximum est atteint en un sommet de $C(A,b)$. Le convexe $C(A,b)$ ne contient pas de droite donc est égal à l'enveloppe convexe de ses points extrémaux et de ses demi-droites extrémales. Notons s_i pour i allant de 1 à r les sommets de $C(A,b)$. Les extrémités des demi-droites sont des points extrémaux. On peut numéroter les sommets de telle façon que les premiers soient des extrémités de demi-droites extrémales. Si $C(A,b)$ contient s demi-droites extrémales elles sont de la forme

$$\{s_i + \lambda v_i \ / \ \lambda \geq 0\}.$$

Soit x un élément de $C(A,b)$. Comme $C(A,b)$ est 'enveloppe convexe de ses points extrémaux et de ses demi-droites extrémales, il existe des nombres positifs ou nuls α_i, λ_j, $i = 1, \ldots, r$, $j = 1, \ldots, s$, tels que $\sum_{i=1}^r \alpha_i = 1$ et

$$x = \sum_{j=1}^{s} \alpha_j (s_j + \lambda_j v_j) + \sum_{i=s+1}^{r} \alpha_i s_i.$$

Or $\langle c, v_j\rangle \leq 0$ pour tout j. En effet sinon on aurait

$$\lim_{\lambda \to +\infty} \langle c, s_i + \lambda v_j\rangle = +\infty$$

ce qui contredirait le fait que $\langle c, x\rangle$ est majorée sur $C(A,b)$ (nous nous sommes placé sous cette hypothèse). Mais alors on a

$$\begin{aligned}
\langle c, x\rangle &= \langle c, \sum_{j=1}^{s} \alpha_j (s_j + \lambda_j v_j) + \sum_{i=s+1}^{r} \alpha_i s_i\rangle \\
&= \sum_{j=1}^{s} \alpha_j (\langle c, s_j\rangle + \lambda_j \langle c, v_j\rangle) + \sum_{i=s+1}^{r} \alpha_i \langle c, s_i\rangle \\
&\leq \sum_{j=1}^{s} \alpha_j \langle c, s_j\rangle + \sum_{i=s+1}^{r} \alpha_i \langle c, s_i\rangle \\
&= \sum_{i=1}^{r} \alpha_i \langle c, s_i\rangle \\
&\leq \left(\sum_{i=1}^{r} \alpha_i\right) \max_i \langle c, s_i\rangle \\
&= \max_i \langle c, s_i\rangle
\end{aligned}$$

ce qui montre que le maximum de la fonction $\langle c, x\rangle$ est atteint en un sommet.

Proposition 0.12. *Soit A une matrice $m \times n$ avec $m \leq n$ de rang m. Soit B une famille d'indices compris entre 1 et n telle que A_B soit inversible. Alors sont équivalents :*
– $Ax = b$
– $x_B = A_B^{-1} b - A_B^{-1} A_N x_N$.

<u>Démonstration</u> L'égalité

$$(A_B, A_N)\begin{pmatrix} x_B \\ x_N \end{pmatrix} = b$$

s'écrit $A_B x_B + A_N x_N = b$. En multipliant par A_B^{-1} on obtient

$$x_B = A_B^{-1}b - A_B^{-1}A_N x_N.$$

□

Proposition 0.13. *On se donne $B = (p_1, \ldots, p_m)$, $N = (q_1, \ldots, q_{n-m})$ tels que A_B soit une matrice de base. Posons*

$$\overline{A} = A_B^{-1}A_N = (\overline{a}_{rs})_{r=1\ldots,m;s=1,\ldots n-m}, \quad \overline{b} = A_B{-}1b$$

Si $\overline{a}_{rs} \neq 0$ alors, pour $B' = (p_1, \ldots, p_{r-1}, q_s, p_{r+1}, \ldots, p_m)$, $A_{B'}$ est inversible et $A_{B'}^{-1} = EA_B^{-1}$ où

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 & \eta_1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 & \eta_2 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & \eta_{r-1} & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & \eta_r & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & \eta_{r+1} & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & \eta_{m-1} & 0 & \ldots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & \eta_m & 0 & \ldots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

où $\eta_r = 1/\overline{a}_{rs}$ et si $i \neq r$, $\eta_i = -\overline{a}_{is}/\overline{a}_{rs}$ (seule la $r$ème colonne différencie E de l'identité).

L'élément $\overline{a}_{rs}$ s'appelle un élément pivot.

Si x et x' sont les solutions de bases associées à B et B' on a

$$x'_{p_i} = \overline{b}_i - \frac{\overline{a}_{is}}{\overline{a}_{rs}}\overline{b}_r, \text{ si } i \neq r, x'_{q_s} = \frac{\overline{b}_r}{\overline{a}_{rs}}, \ x'_j = 0 \text{ sinon}$$

<u>Démonstration</u> La matrice $A_{B'}$ est obtenu à partir de A_B en remplaçant sa $r$éme colonne par la $s$ème colonne de A_N. Notons $(e_1, \ldots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$. Si $i \neq r$ on a

$$A_B e_{p_i} = A_{B'} e_{p_i}$$

(ces vecteurs sont les vecteurs colonne de A_B et $A_{B'}$ qui coïncident). On en déduit que $A_{B'}^{-1}A_B$ est l'identité sur $Vect\{e_{p_i} \ / \ i \neq r\}$. D'autre part $A_{B'}e_{q_s}$ est la colonne numéro q_s de A c'est-à-dire

$$A_{B'}e_{q_s} = A_N e_{q_s}.$$

On en déduit que $A_B^{-1}A_{B'}e_{q_s}$ vaut

$$A_B{-}1A_{B'}e_{q_s} = A_B^{-1}A_N e_{q_s},$$

autrement dit $A_B^{-1}A_{B'}e_{q_s}$ est la colonne numéro s de $\overline{A}$. Nous avons ainsi identifié les m vecteurs colonne de $A_B{-}1A_{B'}$ ce qui permet d'écrire la matrice :

$$A_B^{-1}A_{B'} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & \overline{a}_{1s} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & \overline{a}_{2s} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & \overline{a}_{(r-1)s} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \overline{a}_{rs} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \overline{a}_{(r+1)s} & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \overline{a}_{(m-1)s} & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \overline{a}_{ms} & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

La matrice E de l'énoncé est l'inverse de cette matrice. On se convaincra qu'elle a bien la forme annoncée. $\square$

Proposition 0.14. *Un sommet de $C(A,b)$ est de la forme (x_B, x_N) avec $x_B = A_B^{-1}b$, $x_N = 0$ où $A_B^{-1}b \geq 0$.*

Proposition 0.15. *On se donne un programme linéaire sous forme standard et A_B une matrice de base admissible. On a*

$$\langle c, x\rangle =^t c_B A_B^{-1}b + (^t c_N -^t c_B A_B^{-1}A_N)x_N.$$

On appelle le vecteur $^t\overline{c} =^t c_N - ^t c_B A_B^{-1}A_N$ le vecteur des coût réduits. S'il est à coordonnées négatives ou nulles alors $x_B = A_B^{-1}b$, $x_N = 0$ fournit une solution optimale au problème. On a une réciproque partielle : si $A_B^{-1}b$ est à coordonnées strictement positives et fournit une solution optimale alors le vecteur des coûts réduits associé est à coordonnées négatives ou nulles.

Démonstration Considérons un point y tel que $Ay = b$ et $y \geq 0$. On a vu qu'alors on a l'égalité $y_B = A_B^{-1}b - A_B^{-1}A_N y_N$; en prenant le produit scalaire par c on obtient

$$\begin{aligned} \langle c, y\rangle &= \langle c_B, y_B\rangle + \langle c_N, y_N\rangle \\ &= \langle c_B, A_B^{-1}b - A_B^{-1}A_N y_N\rangle + \langle c_N, y_N\rangle \\ &= \langle c_B, A_B^{-1}b\rangle - \langle c_B, A_B^{-1}A_N y_N\rangle + \langle c_N, y_N\rangle \\ &= \langle c_B, A_B^{-1}b\rangle - \langle ^t(A_B^{-1}A_N)c_B, y_N\rangle + \langle c_N, y_N\rangle \\ &= \langle c_B, A_B^{-1}b\rangle + \langle c_N -^t (A_B^{-1}A_N)c_B, y_N\rangle \\ &= \langle c_B, A_B^{-1}b\rangle + \langle \overline{c}, y_N\rangle. \end{aligned}$$

Si $\overline{c} \leq 0$ on a $\langle \overline{c}, y_N \rangle \leq 0$ car $y \geq 0$ donc

$$\langle \overline{c}, y_N \rangle \leq \langle c_B, A_B^{-1} b \rangle = \langle c_B, A_B^{-1} b \rangle + \langle c_N, 0_N \rangle,$$

où l'on noté 0_N le vecteur dont les coordonnées d'indice dans N sont nulles. Or le vecteur $(A_B{-}1b, 0_N)$ est un sommet de $C(A, b)$. Nous avons montré que si $\overline{c} \leq 0$ alors le sommet associé à B est un point où la fonction objectif est maximale.

Supposons maintenant que le sommet $x = (A_B{-}1b, 0_N)$ associé à B est un point où la fonction objectif est maximale. De l'inégalité

$$\langle c, y \rangle \leq \langle c, x \rangle$$

on tire

$$\langle c_B, A_B^{-1} b \rangle + \langle \overline{c}, y_N \rangle \leq \langle c_B, A_B^{-1} b \rangle + 0, \text{ donc } \langle \overline{c}, y_N \rangle \leq 0.$$

Que x ne soit pas dégénéré signifie que $A_B^{-1} b > 0$. Pour $\lambda > 0$ suffisamment petit on a donc $A_B^{-1} b \geq \lambda A_B^{-1} A_N e_i$. Posons $x_N^\lambda = \lambda e_i$, $x_B^\lambda = A_B^{-1} b - \lambda A_B^{-1} A_N e_i$, $x^\lambda = (x_B^\lambda, x_N^\lambda)$. On a $A x^\lambda = b$, $x^\lambda \geq 0$ et

$$\langle c, x \rangle = \langle c_B, A_B^{-1} b \rangle - \langle c_B, \lambda A_B^{-1} A_N e_i \rangle + \langle c_N, \lambda e_i \rangle = \langle c_B, A_B^{-1} b \rangle + \langle c_N -^t (A_B^{-1} A_N) c_B, \lambda e_i \rangle$$

autrement écrit

$$\langle c, x \rangle = \langle c, x \rangle + \langle \overline{c}, \lambda e_i \rangle = \langle c, x \rangle + \lambda \overline{c}_i.$$

Comme $\langle c, x^\lambda \rangle \leq \langle c, x \rangle$ cela entraîne que $\overline{c}_i$ est négatif ou nul. $\square$

Proposition 0.16. *On se donne un programme linéaire sous forme standard et A_B une matrice de base admissible. Introduisons des notations $\overline{A} = A_B^{-1} A_N$, $\overline{b} = A_B{-}1b$, $\overline{c}$ le vecteur des coûts réduits. On suppose qu'il existe $q_s \in N$ tel que $\overline{c}_s > 0$.*

Si $\overline{A}_{\cdot s} \leq 0$ alors $x \mapsto \langle c, x \rangle$ n'est pas majorée sur l'ensemble $C(A, b)$.

Si $\overline{A}_{\cdot s} \nleq 0$ considérons $\lambda_0 = \min\{\overline{b}_i / \overline{a}_{is} \ / \ i = 1, \ldots, m, \ \overline{a}_{is} > 0\}$ et prenons r tel que $\overline{b}_r / \overline{a}_{rs} = \lambda_0$. Alors pour $B' = (p_1, \ldots, p_{r-1}, q_s, p_{r+1}, \ldots, p_m)$, $x' = (A_{B'}^{-1} b, 0_{N'}$ est un sommet où la fonction objectif est plus grande (au sens large) qu'en $x = (A_B^{-1} b, 0_N$. Si $x = (A_B^{-1} b, 0_N)$ nest pas dégénéré on a $\langle c, x' \rangle > \langle c, x \rangle$.

<u>Démonstration</u> Nous avons vu que

$$x'_{p_i} = \overline{b}_i - \frac{\overline{a}_{is}}{\overline{a}_{rs}} \overline{b}_r, \text{ si } i \neq r, x'_{q_s} = \frac{\overline{b}_r}{\overline{a}_{rs}}, \ x'_j = 0 \text{ sinon.}$$

Comme $\overline{b}_r / \overline{a}_{rs} \leq \overline{b}_i / \overline{a}_{is}$, on a

$$x'_{p_i} = \overline{b}_i - \frac{\overline{a}_{is}}{\overline{a}_{rs}} \overline{b}_r \geq \overline{b}_i - \frac{\overline{a}_{is}}{\overline{a}_{is}} \overline{b}_i = 0 \text{ si } \overline{a}_{is} > 0,$$

et

$$x'_{p_i} = \overline{b}_i - \frac{\overline{a}_{is}}{\overline{a}_{rs}} \overline{b}_r \geq \overline{b}_i \text{ si } \overline{a}_{is} = 0.$$

Par ailleurs $x'_{q_s} = \overline{b}_r / \overline{a}_{rs}$ et les autres coordonnées de x' sont nulles, donc x' est un sommet de $C(A,b)$.

Calculons maintenant la fonction objectif en x' :

$$\begin{array}{rcl}
\langle c, x' \rangle & = & \langle c_{B'}, x'_{B'} \rangle \\
& = & \langle c_{B'}, A_{B'}^{-1} b \rangle \\
& = & \langle c_{B'}, E A_B^{-1} b \rangle \\
& = & \langle {}^t E c_{B'}, A_B^{-1} b \rangle \\
& = & \langle {}^t E c_{B'}, x_B \rangle \\
& = & \displaystyle\sum_{i \neq r} c_{p_i} x_{p_i} + \sum_{i \neq r} c_{p_i} \eta_i x_{p_r} + c_{q_s} \eta_r x_{p_r} \\
& = & \displaystyle\sum_{i} c_{p_i} x_{p_i} - c_{p_r} x_{p_r} + \sum_{i \neq r} c_{p_i} \eta_i x_{p_r} + c_{q_s} \eta_r x_{p_r} \\
& = & \langle c_B, x_B \rangle + \left(\langle c_{B'}, \eta \rangle - c_{p_r} \right) x_{p_r}.
\end{array}$$

Or

$$\begin{array}{rcl}
0 < \overline{c}_s & = & (c_N -^t (A_B^{-1} A_N) c_B)_s = c_{q_s} - \langle \overline{A}_{\cdot s}, c_B \rangle \\
& = & c_{q_s} - \displaystyle\sum_{i} c_{p_i \overline{a}_{is}} = c_{q_s} - \sum_{i \neq r} c_{p_i} \overline{a}_{is} - c_{p_r} \overline{a}_{rs} \\
& = & \overline{a}_{rs} \left(c_{q_s} / \overline{a}_{rs} - \displaystyle\sum_{i \neq r} c_{p_i} \overline{a}_{is} / \overline{a}_{rs} - c_{p_r} \right) \\
& = & \overline{a}_{rs} \left(c_{q_s} \eta_r + \displaystyle\sum_{i \neq r} c_{p_i} \eta_i - c_{p_r} \right) \\
& = & \overline{a}_{rs} \left(\langle c_{B'}, \eta \rangle - c_{p_r} \right).
\end{array}$$

On en déduit que $\langle c_{B'}, \eta \rangle - c_{p_r}$ est strictement positif, et comme x_{p_r} l'est aussi (car on suppose que le sommet n'est pas dégénéré), on a

$$\langle c, x' \rangle > \langle c_B, x_B \rangle = \langle c, x \rangle.$$

□

0.7.2 Quelques exemples (sous forme de tableaux)

En pratique l'algorithme du simplexe fait partie des fonctions classiques des programmes de calculs usuels (comme les tableurs). Pour décrire comment il fonctionne nous allons le décrire sous la forme de tableaux successifs sur quelques exemples. Considérons le programme linéaire suivant

$$\max x_1 + 2x_2$$

sous contraintes

$$x_1 \leq 4,\ 2x_1 + x_2 \leq 10,\ -x_1 + x_2 \leq 5,\ x_1, x_2 \geq 0.$$

Nous introduisons des variables supplémentaires x_3, x_4, x_5 pour mettre le programme sous forme standard :

$$\max x_1 + 2x_2$$

sous contraintes

$$x_1 + x_3 = 4,\ 2x_1 + x_2 + x_4 = 10,\ -x_1 + x_2 + x_5 = 5,\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0.$$

Sous forme matricielle ce programme linéaire s'écrit :

$$\max\langle c, x\rangle \ s.c.\ Ax = b, x \geq 0,$$

où x est dans $\mathbb{R}^5$, c et b dans $\mathbb{R}^3$,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} \quad c = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 4 \\ 10 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

À partir de ces données nous construisons le tableau suivant que nous allons transformer à partir des règles de pivotage définies plus haut.

1	2	0	0	0	0	
1	0	1	0	0	4	x_3
2	1	0	1	0	10	x_4
-1	1	0	0	1	5	x_5

Les traits du tableau définissent quatre zones : la ligne en haut à gauche est le vecteur des coûts réduits, en bas à gauche on reconnaît A, en bas à droite b et des noms de variables. Les noms de variables indiquent quel sommet du polyèdre est considéré. Ici c'est le sommet dont les coordonnées sont $(0, 0, 4, 10, 5)$. En ce sommet la fonction objectif est nulle : c'est la signification du 0 figurant en haut à droite.

Pour choisir comment nous allons transformer ce tableau on considère les coordonnées positives du vecteur des coûts réduits figurant (en rouge ci-dessous) et nous choisissons un pivot parmi les coefficients positifs dans les colonnes correspondantes (en vert).

1	**2**	0	0	0	0	
1	0	1	0	0	4	x_3
2	**1**	0	1	0	10	x_4
-1	**1**	0	0	1	5	x_5

Ici on peut choisir l'une ou l'autre des deux premières colonnes. Si l'on choisit la première on calcule $4/1 = 4$ et $10/2 = 5$ pour pivot il faut prendre le 1 (en violet ci-dessous)

$$
\begin{array}{ccccc|cc}
1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & \\
\hline
\boxed{\mathbf{1}} & 0 & 1 & 0 & 0 & 4 & x_3 \\
2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 10 & x_4 \\
-1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 5 & x_5
\end{array}
$$

Si l'on choisit la deuxième colonne on calcule $10/1 = 10$ et $5/1 = 5$ pour pivot il faut prendre le deuxième 1 (en violet ci-dessous)

$$
\begin{array}{ccccc|cc}
1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & \\
\hline
1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 4 & x_3 \\
2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 10 & x_4 \\
-1 & \boxed{\mathbf{1}} & 0 & 0 & 1 & 5 & x_5
\end{array}
$$

Supposons qu'on ait choisit la première solution. Alors on utilise le pivot pour annuler tous les coefficients de la colonne correspondante en faisant des opérations sur les lignes (première ligne moins la deuxième, troisième moins deux fois la deuxième, quatrième plus la deuxième). On obtient

$$
\begin{array}{ccccc|cc}
0 & 2 & -1 & 0 & 0 & -4 & \\
\hline
1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 4 & x_1 \\
0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 2 & x_4 \\
0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 9 & x_5
\end{array}
$$

On indique en dernière colonne que le nouveau sommet obtenu a ses coordonnées x_1, x_4, x_5 différentes de 0 et x_2 x_3 sont nulles (car on a pivoté sur le coefficient correspondant à x_1 là où précédemment on considérait x_3). Les coordonnées de la base considérée à une étape de l'algorithme sont les trois pour lesquelles les trois colonnes donnent la matrice identité. Le nombre en haut à droite est égal à l'opposé de la valeur de la fonction objectif au sommet considéré : ici cette valeur est donc 4 (on est passé de 0 à 4). On continue de la même façon.

$$
\begin{array}{ccccc|cc}
0 & \mathbf{2} & -1 & 0 & 0 & -4 & \\
\hline
1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 4 & x_1 \\
0 & \mathbf{1} & -2 & 1 & 0 & 2 & x_4 \\
0 & \mathbf{1} & 1 & 0 & 1 & 9 & x_5
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{ccccc|cc}
0 & 2 & -1 & 0 & 0 & -4 & \\
\hline
1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 4 & x_1 \\
0 & \boxed{\mathbf{1}} & -2 & 1 & 0 & 2 & x_4 \\
0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 9 & x_5
\end{array}
$$

0	0	3	-2	0	-8	
1	0	1	0	0	4	x_1
0	1	-2	1	0	2	x_2
0	0	3	-1	1	7	x_5

0	0	3	-2	0	-8	
1	0	1	0	0	4	x_1
0	1	-2	1	0	2	x_2
0	0	$\boxed{\mathbf{3}}$	-1	1	7	x_5

0	0	0	-1	-1	-15	
1	0	0	1/3	-1/3	5/3	x_1
0	1	0	1/3	2/3	20/3	x_2
0	0	1	-1/3	1/3	7/3	x_3

Tous les coûts réduits sont négatifs. Nous avons trouvé le sommet qui maximise la fonction objectif : $(5/3, 20/3, 7/3, 0, 0)$, et la valeur du maximum : 15.

Si on avait choisi la deuxième colonne on aurait obtenu :

1	2	0	0	0	0	
1	0	1	0	0	4	x_3
2	1	0	1	0	10	x_4
-1	$\boxed{\mathbf{1}}$	0	0	1	5	x_5

3	0	0	0	-2	-10	
1	0	1	0	0	4	x_3
3	0	0	1	-1	5	x_4
-1	1	0	0	1	5	x_2

3	0	0	0	-2	-10	
1	0	1	0	0	4	x_3
$\boxed{\mathbf{3}}$	0	0	1	-1	5	x_4
-1	1	0	0	1	5	x_2

0	0	0	-1	-1	-15	
1	0	1	-1/3	1/3	7/3	x_3
1	0	0	1/3	-1/3	5/3	x_1
0	1	0	1/3	2/3	20/3	x_2

C'est bien la même solution que celle que nous avions trouvé en choisissant la première colonne. Nous n'avons parcouru le même chemin de sommets pour parvenir à l'optimum mais nous aboutissons finalement au même.

Considérons un autre exemple (celui de l'introduction) :

$$\min 3x_1 + 5x_2$$

sous contraintes

$$2x_1 + x_2 \geq 3,\ \ 2x_1 + 2x_2 \geq 5,\ \ x_1 + 4x_2 \geq 4,\ \ x_1, x_2 \geq 0.$$

Considérons le problème dual

$$\max 3y_1 + 5y_2 + 4y_3$$

sous contraintes

$$2y_1 + 2y_2 + y_3 \leq 3,\ \ y_1 + 2y_2 + 4y_3 \leq 5,\ \ y_1, y_2, y_3 \geq 0.$$

La version standard de ce problème sous forme canonique est

$$\max 3y_1 + 5y_2 + 4y_3$$

sous contraintes

$$2y_1 + 2y_2 + y_3 + s_1 = 3,\ \ y_1 + 2y_2 + 4y_3 + s_2 = 5,\ \ y_1, y_2, y_3, s_1, s_2 \geq 0.$$

Construisons le tableau correspondant et appliquons l'algorithme (pour chaque étape j'indique seulement le pivot choisi puis le résultat des calculs correspondants)

$$\begin{array}{ccccc|cc}
3 & 5 & 4 & 0 & 0 & 0 & \\
\hline
2 & 2 & 1 & 1 & 0 & 3 & s_1 \\
1 & 2 & 4 & 0 & 1 & 5 & s_2
\end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc|cc}
3 & 5 & 4 & 0 & 0 & 0 & \\
\hline
2 & 2 & 1 & 1 & 0 & 3 & s_1 \\
1 & 2 & \boxed{\mathbf{4}} & 0 & 1 & 5 & s_2
\end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc|cc}
2 & 3 & 0 & 0 & -1 & -5 & \\
\hline
7/4 & 3/2 & 0 & 1 & 0 & 7/4 & s_1 \\
1/4 & 1/2 & 1 & 0 & 1/4 & 5/4 & x_3
\end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc|cc}
2 & 3 & 0 & 0 & -1 & -5 & \\
\hline
\boxed{\mathbf{7/4}} & 3/2 & 0 & 1 & 0 & 7/4 & s_1 \\
1/4 & 1/2 & 1 & 0 & 1/4 & 5/4 & x_3
\end{array}$$

0	9/7	0	-8/7	-1	-7	
1	6/7	0	4/7	0	1	x_1
0	2/7	1	-1/7	1/4	1	x_3

0	9/7	0	-8/7	-1	-7	
1	$\boxed{\mathbf{6/7}}$	0	4/7	0	1	x_1
0	2/7	1	-1/7	1/4	1	x_3

-3/2	0	0	-14/7	-1	-17/2	
7/6	1	0	2/3	0	7/6	x_2
-1/3	0	1	-2/21	1/4	2/3	x_3

L'algorithme est fini : la fonction objectif est maximale au sommet $(0, 7/6, 2/3, 0, 0)$ et sa valeur maximale est $17/2$.

Dans les exemples précédents il est facile de trouver le vecteur des coût réduits car on commence avec un sommet dont les coordonnées différentes de 0 sont artificielles. Que se passe-t-il si on un problème est déjà donné sous forme standard ? On peut calculer un sommet et le vecteur des coûts réduits correspondant. Une autre manière de procéder est d'introduire là aussi des variables artificielles. Voyons comment sur un exemple :

$$\max x_1 - x_2 + 2x_3$$

sous contraintes

$$2x_1 - 3x_2 + x_3 = 3,\ -x_1 + 2x_2 + x_3 = -1,\ 3x_1 - 5x_2 = 4,\ x_1, x_2, x_3 \geq 0.$$

On introduit trois variables artificielles s_1, s_2, s_3 et on pose le problème

$$\max x_1 - x_2 + 2x_3$$

sous contraintes

$$2x_1 - 3x_2 + x_3 + s_1 = 3,\ x_1 - 2x_2 - x_3 + s_2 = 1,\ 3x_1 - 5x_2 + s_3 = 4,\ x_1, x_2, x_3, s_1, s_2, s_3 \geq 0.$$

Sous forme de tableau il s'écrit

1	-1	2	0	0	0	0	
2	-3	1	1	0	0	3	s_1
$\boxed{\mathbf{1}}$	-2	-1	0	1	0	1	s_2
3	-5	0	0	0	1	4	s_3

0	1	3	0	-1	0	-1	
0	1	$\boxed{\mathbf{3}}$	1	-2	0	1	s_1
1	-2	-1	0	1	0	1	x_1
0	1	3	0	-3	1	1	s_3

0	0	0	-1	1	0	-2	
0	1/3	1	1/3	-2/3	0	1/3	x_3
1	-5/3	0	1/3	1/3	0	4/3	x_1
0	0	0	-1	-1	1	0	s_3

0.7.3 Cyclage

$$\max 4/5x_1 - 18x_2 - x_3 - x_4$$

sous contraintes

$16/5x_1 - 84x_2 - 12x_3 + 8x_4 \leq 0,\ 1/5x_1 - 5x_2 - 2/3x_3 + 1/3x_4 \leq 0,\ x_1 \leq 1\ x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0.$

$$\max 4/5x_1 - 18x_2 - x_3 - x_4$$

sous contraintes

$16/5x_1 - 84x_2 - 12x_3 + 8x_4 + x_5 = 0,\ 1/5x_1 - 5x_2 - 2/3x_3 + 1/3x_4 + x_6 = 0,\ x_1 + x_7 = 1$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_4, x_6, x_7 \geq 0.$$

4/5	-18	-1	-1	0	0	0	0	
$\boxed{\mathbf{16/5}}$	-84	-12	8	1	0	0	0	x_5
1/5	-5	-2/3	1/3	0	1	0	0	x_6
1	0	0	0	0	0	1	1	x_7

0	3	2	-3	-1/4	0	0	0	
1	-105/4	-15/4	5/2	5/16	0	0	0	x_1
0	$\boxed{\mathbf{1/4}}$	1/12	-1/6	-1/16	1	0	0	x_6
0	105/4	15/4	-5/2	-5/16	0	1	1	x_7

0	0	1	-1	1/2	-12	0	0	
1	0	$\boxed{\mathbf{5}}$	-15	-25/4	105	0	0	x_1
0	1	1/3	-2/3	-1/4	4	0	0	x_2
0	0	-5	15	25/4	-105	1	1	x_7

-1/5	0	0	2	7/4	-33	0	0	
1/5	0	1	-3	-5/4	21	0	0	x_3
-1/15	1	0	$\boxed{\mathbf{1/3}}$	1/6	-3	0	0	x_2
1	0	0	0	0	0	1	1	x_7

$$
\begin{array}{ccccccc|cc}
1/5 & -6 & 0 & 0 & 3/4 & -15 & 0 & 0 & \\
\hline
-2/5 & 9 & 1 & 0 & \boxed{\mathbf{1/4}} & -6 & 0 & 0 & x_3 \\
-1/5 & 3 & 0 & 1 & 1/2 & -9 & 0 & 0 & x_4 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & x_7
\end{array}
$$

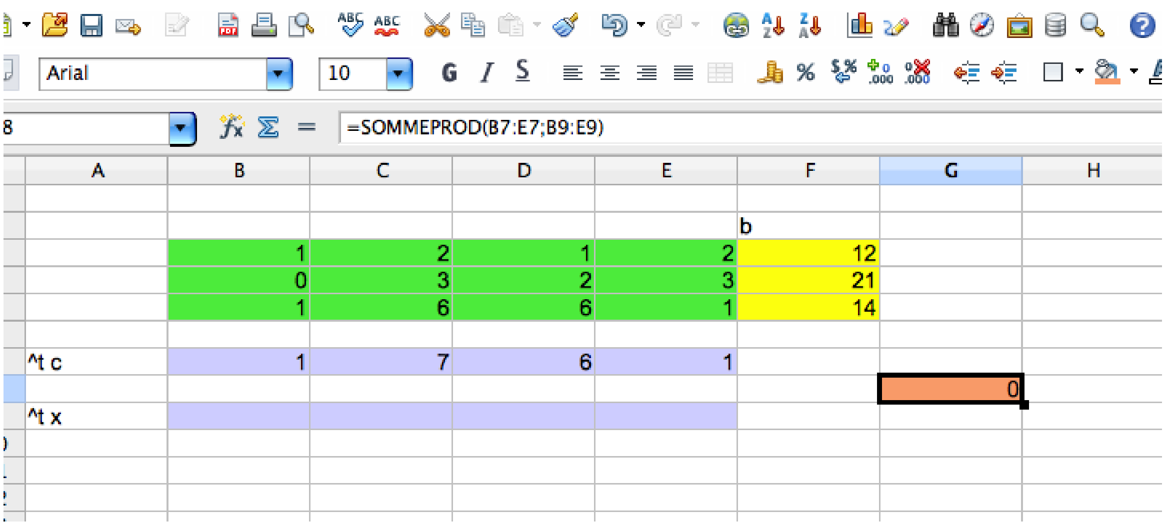
$$
\begin{array}{ccccccc|cc}
7/5 & -33 & -3 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & \\
\hline
-8/5 & 36 & 4 & 0 & 1 & -24 & 0 & 0 & x_5 \\
3/5 & -15 & -2 & 1 & 0 & \boxed{\mathbf{3}} & 0 & 0 & x_4 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & x_7
\end{array}
$$

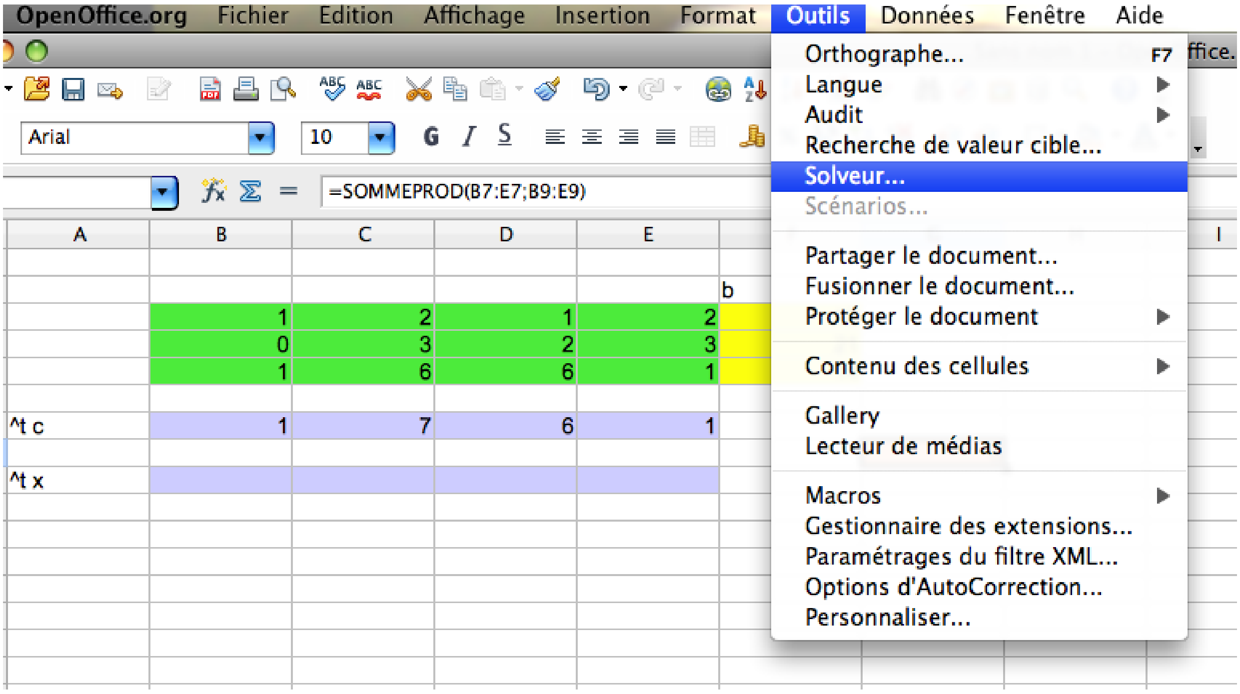
$$
\begin{array}{ccccccc|cc}
4/5 & -18 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \\
\hline
16/5 & -84 & -12 & 8 & 1 & 0 & 0 & 0 & x_5 \\
1/5 & -5 & -2/3 & 1/3 & 0 & 1 & 0 & 0 & x_6 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & x_7
\end{array}
$$

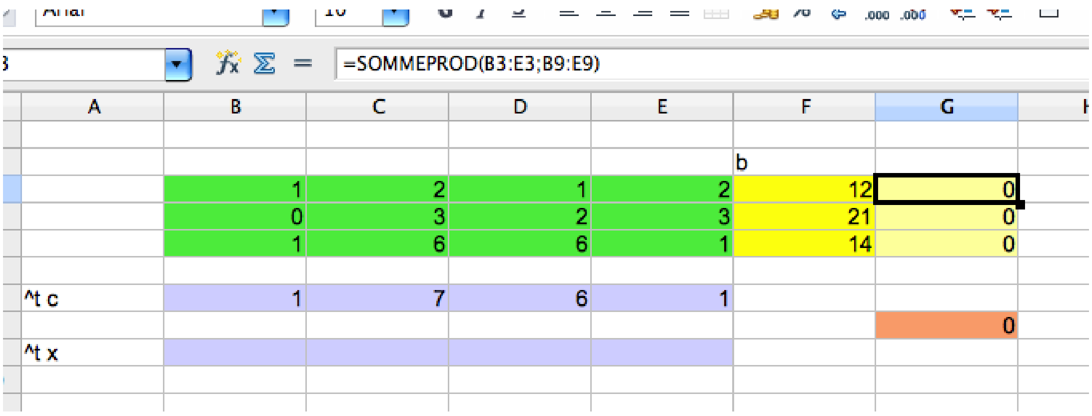
Nous sommes revenus au tableau de départ ! Tout ça pour rien... On dit qu'il y a eu cyclage. Cela peut se produire quand les sommets parcourus sont dégénérés.

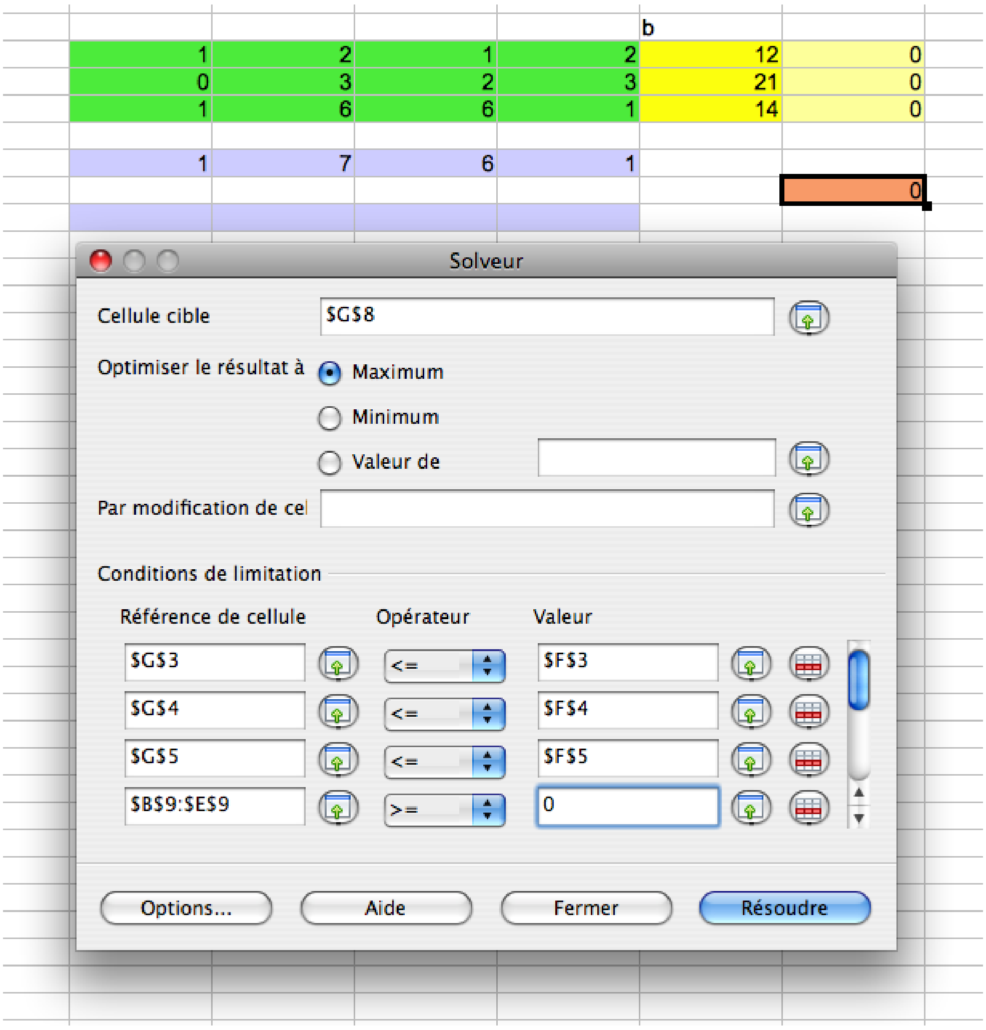
0.8 Utilisation du solveur d'un tableur

Ce que nous avons montré est que les problèmes de programmation linéaire pouvaient se résoudre grâce à des opérations simples sur des tableaux et que des algorithmes de résolution existaient. La résolution de tels problèmes peut se faire grâce à un tableur. Je recopie quelques photos d'écran qui donnent une idée de la méthode à suivre. Vous trouverez facilement plus de détails sur internet...




OpenOffice.org Fichier Edition Affichage Insertion Format Outils Données Fenêtre Aide
Arial
10
=SOMMEPROD(B7:E7;B9:E9)
A B C D E
b
1 2 1 2
0 3 2 3
1 6 6 1
^t c 1 7 6 1
^t x
Orthographe... F7
Langue
Audit
Recherche de valeur cible...
Solveur...
Scénarios...
Partager le document...
Fusionner le document...
Protéger le document
Contenu des cellules
Gallery
Lecteur de médias
Macros
Gestionnaire des extensions...
Paramétrages du filtre XML...
Options d'AutoCorrection...
Personnaliser...


=SOMMEPROD(B3:E3;B9:E9)
A B C D E F G
b
1 2 1 2 12 0
0 3 2 3 21 0
1 6 6 1 14 0
^t c 1 7 6 1
0
^t x


b
1 2 1 2 12 0
0 3 2 3 21 0
1 6 6 1 14 0
1 7 6 1
0
Solveur
Cellule cible
$G$8
Optimiser le résultat à
Maximum
Minimum
Valeur de
Par modification de cel
Conditions de limitation
Référence de cellule
Opérateur
Valeur
$G$3 <= $F$3
$G$4 <= $F$4
$G$5 <= $F$5
$B$9:$E$9 >= 0
Options...
Aide
Fermer
Résoudre