

Calculs d'indices

Exercice 1

Ce qu'on appelle le développement d'un pays est fréquemment mesuré uniquement par le PIB ou le PNB par habitant. D'autres mesures existent qui permettent aussi d'évaluer le niveau d'un pays de façon différente : espérance de vie, taux de mortalité infantile, taux de survie à cinq ans... L'indice de développement humain (IDH) est un indice créé pour tenir compte de différents facteurs importants. On dit que l'IDH est un indice agrégé.

	Mesure	Valeur min.	Valeur max.
Longévité	Espérance de vie à la naissance	20 ans	83,5 ans
Éducation	Durée moyenne de scolarisation	0 an	13,1 ans
Éducation	Durée attendue de scolarisation	0 an	19 ans
Niveau de vie	PNB par hab.	100	108831

Dans chaque domaine on calcule l'indice en posant

$$Indice = \frac{valeur - valeur\ min.}{valeur\ max. - valeur\ min.}.$$

L'IDH est calculé de la façon suivante. On utilise la formule précédente pour les quatre critères pris en compte. Attention, pour l'indice de niveau de vie, on applique la formule non au PNB par habitant mais au logarithme népérien du PIB par habitant. On fait ensuite la moyenne géométrique des deux indices concernant l'éducation. On applique la formule à cette moyenne géométrique (avec l'indice maximale 0,994 et 0 pour l'indice minimal). On obtient ainsi trois indices. L'IDH est obtenu en prenant leur moyenne géométrique.

1. Quel est l'indice de longévité du pays ayant la plus grande espérance de vie à la naissance ? Quel est l'indice d'éducation le plus grand ?
2. Pourquoi prendre le logarithme des revenus ?
3. Pourquoi considérer des moyennes géométriques plutôt qu'arithmétiques ?
4. Au Portugal, l'espérance de vie à la naissance est 77,9 ans, la durée attendue de scolarisation 16 ans, la durée moyenne de scolarisation 7,7 ans, le PIB (PPA) par habitant 21558 dollars. Calculer l'IDH du Portugal.

Exercice 2

Calculer l'espérance de vie de la population dont les taux de survie constatés une année sont donnés dans le tableau suivant.

Âges au premier janvier	0	1	2	3	4
Taux de survie au 31 décembre	0,6	0,8	0,4	0,3	0

Exercice 3

Proposer un calcul d'espérance de vie de la population suivante (fictive mais ressemblant à la France de 2014).

Âges	Taille de la population correspondante	Taux de mortalité (pour mille ; par an)
0-9	7 806 516	0,5
10-19	7 799 891	0,2
20-29	7 621 255	0,5
30-39	7 945 037	0,8
40-49	8 813 198	2
50-59	8 349 101	4,8
60-69	7 361 738	9,6
70-79	4 520 161	21
80-89	3 046 554	63,4
90-99	644 705	200
100-109	20 452	250

Exercice 4

Tracer la courbe de Lorenz et calculer l'indice de Gini correspondant aux répartitions données dans le tableau suivant.

Déciles	Revenus mensuels perçus	Cumuls des revenus perçus (en 10^7 euros)
1er	20	5
2e	500	135
3e	1000	510
4e	1400	1110
5e	1700	1885
6e	2000	2810
7e	2300	3885
8e	2800	5160
9e	3800	6865
10e	200000	12530

Exercice 5

Dans une unité non précisée, les revenus d'une population sont uniformément répartis entre 1 et 3. Autrement dit pour a et b deux nombres compris entre 1 et 3 tels que $a < b$, la proportion de la population dont les revenus sont compris entre a et b est donnée par

$$\int_a^b \frac{1}{2} dt.$$

Le but de l'exercice est de calculer l'indice de Gini correspondant.

1. Pour x compris entre 1 et 3, quelle est la proportion de la population dont les revenus sont inférieurs à x ?
2. Soit u un nombre compris entre 0 et 1. Exprimer en fonction de u le revenu $x(u)$ tel que la proportion de la population dont les revenus sont inférieurs à $x(u)$ est u .
3. Le revenu total de la population est donné par

$$N \int_1^3 \frac{t}{2} dt,$$

où N est la taille de la population. Calculer le revenu total T de la population (en fonction de N).

4. Pour x compris entre 1 et 3, calculer la somme S des revenus perçus par la partie de la population dont les revenus sont inférieurs à x (en fonction de N et de x).
5. Pour u compris entre 0 et 1, exprimer en fonction de u la part des revenus perçue par la proportion u de la population ayant les revenus les plus faibles (autrement dit exprimer S en fonction de u plutôt que de x). On note $F(u)$ cette part divisée par T (autrement dit la proportion des revenus perçus par la proportion u de la population ayant les revenus les plus faibles). Le résultat à établir est : $F(u) = \frac{u(u+1)}{2}$.
6. Le graphe de la fonction F obtenue dans la question précédente (de $[0, 1]$ dans $[0, 1]$) est la courbe de Lorenz. Dessiner le graphe de F et calculer l'indice de Gini. On rappelle que l'indice de Gini est défini à partir d'une certaine aire qu'on pourra faire apparaître sur le dessin avant de la calculer.