Espaces probabilisés

Exercice 1. A quoi sont égales les quatre sommes suivantes :

$$\sum_{i=0}^{10} 2, \quad \sum_{k=0}^{n} \tbinom{n}{k}, \quad \sum_{k=0}^{n} (-1)^n \tbinom{n}{k}, \ \sum_{k=1}^{12} \tbinom{12}{k} 2^k ?$$

Exercice 2. Démontrer que pour tous entiers naturels n et p tels que $p \leq n$ on a :

$$\sum_{k=p}^{n} \tbinom{k}{p} = \tbinom{n+1}{p+1}.$$

Exercice 3. Démontrer que pour tous entiers naturels n et p tels que $p \leq n$ on a :

$$p\tbinom{n}{p} = n\tbinom{n-1}{p-1}.$$

En déduire une expression simple de la somme $\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}$.

Exercice 4. Développer de deux manières différentes le produit :

$$(1+x)^{2n}.$$

En déduire (considérer le coefficient de x^n) une expression simple de la somme :

$$\sum_{k=0}^{n} \tbinom{n}{k}^2.$$

Exercice 5. Une boîte contient 6 boules rouges, 4 noires et 3 blanches. On tire au hasard 3 boules.
1) Quelle est la probabilité d'obtenir une boule de chaque couleur ?
2) D'obtenir 3 boules noires ?
3) D'obtenir 3 boules de la même couleur ?

Exercice 6. Une urne A contient 2 boules blanches, 3 boules bleues et 5 boules rouges. Une urne B contient 4 boules bleues. On tire simultanément 2 boules de l'urne A que l'on place dans l'urne B puis on tire 3 boules simultanément de l'urne B. Combien de tirages différents peut-on obtenir ?

Exercice 7. On veut construire une grille de mots croisés ayant 5 lignes et 5 colonnes. On numérote les cases de 1 à 25, et on écrit ces nombres sur des cartons que l'on met dans une urne. On tire au hasard de celle-ci, 8 cartons simultanément et on noircit les huit cases correspondantes.
a) Quelle est la probabilité, lors d'une épreuve, d'obtenir une grille avec un carré noir au centre et quatre dans les coins ?
b) Quelle est la probabilité d'obtenir une grille avec une colonne de cases noires ?

Exercice 8. 1) Une assemblée de 26 personnes comprend 16 femmes et 10 hommes. On choisit au hasard dans cette assemblée un groupe de n individus. Quelle est la probabilité que ce groupe contienne au moins un homme et une femme ?
2) Quelle est la probabilité que 2 élèves ait le même anniversaire dans une classe de 40 ?

Exercice 9. Monsieur Y lance 6 fois un dé et gagne s'il obtient au moins un 6. Madame X lance 12 fois un dé et gagne si elle obtient au moins deux 6. Qui a le plus de chance de gagner ?

Exercice 10. Dans un sac se trouvent 4 jetons numérotés de 1 à 4. On en tire successivement trois. Quelle est la probabilité de tirer des nombres dans un ordre croissant ? Même question si on tire p jetons dans un sac de n jetons numérotés de 1 à n.

Exercice 11. 1) Quelle est la probabilité de tirer le valet de cœur en tirant 3 cartes d'un jeu de 32 cartes ?
2) Et en tirant 3 cartes parmi 25 cartes, après avoir enlevé 7 cartes au hasard ?

Exercice 12. Application de la formule de Poincaré
1) 3 boules numérotées de 1 à 3 sont placées au hasard dans trois urnes numérotées de 1 à 3 (une boule par urne). Quelle est la probabilité qu'il y ait au moins une coïncidence entre le n° d'une urne et le n° de la boule qu'elle contient ?
2) Même question avec n boules et n urnes.

Exercice 13. Une marque de chocolat offre dans chaque tablette une image d'une collection en comportant n. On achète m tablettes. Quelle est la probabilité d'avoir la collection complète ?

Exercice 14. Trois personnes jouent à Pile ou Face avec une pièce équilibrée de la façon suivante : A et B jouent et le gagnant rencontre C, puis le gagnant de chaque partie rencontre le perdant de la partie précédente. Le gagnant est le premier à gagner deux parties consécutives. Calculer la probabilité de gain de chacun des trois joueurs.

Exercice 15. On considère trois urnes. L'urne A contient 2 boules vertes et 4 rouges, la B, 8 vertes et 4 rouges et la C, 1 verte et 3 rouges. On tire une boule de chacune des urnes. Quelle est la probabilité que la boule tirée de A soit verte, si l'on sait que le tirage a livré deux boules vertes exactement ?

Exercice 16. Un fumeur impénitent décide d'arrêter de fumer. On admet que s'il ne fume pas un jour donné, alors la probabilité qu'il ne fume pas le lendemain vaut 0.3. En revanche s'il succombe un jour donné, la probabilité qu'il ne fume pas le lendemain vaut 0.9. Quelle est la probabilité que cette personne ne fume pas le nième jour ? Que se passe-t-il lorsque n est grand ?

Exercice 17. Les moteurs d'un avion ont une probabilité $1-p$ de défaillance en cours de vol, et ce indépendamment les uns des autres. Un avion a besoin de la majorité de ses moteurs pour terminer son vol. Pour quelles valeurs de p un avion à 5 moteurs est-il préférable à un trimoteur ?

Exercice 18. Deux joueurs A et B lancent une pièce de monnaie équilibrée n fois chacun.
1) Calculer la probabilité qu'ils obtiennent exactement le même nombre de Pile.
2) Quelle est la probabilité que A obtienne strictement plus de Pile que B ?

Exercice 19. Formule de Stirling et marche aléatoire simple sur $\mathbf{Z}$.
1) On considère la suite $(u_n)_n$ définie, pour $n \geq 1$, par

$$u_n = \frac{n!e^n}{n^n\sqrt{n}}$$

et la suite auxiliaire $(v_n)_n$ définie, pour $n \geq 2$, par

$$v_n = \ln u_n - \ln u_{n-1}.$$

Montrer que la série de terme général v_n converge. En déduire qu'il existe K tel que

$$n! \sim_{n\to\infty} K(\frac{n}{e})^n\sqrt{n}.$$

2) Un point se déplace sur $\mathbf{Z}$. Il part de 0 et chaque instant il avance ou recule d'un pas avec probabilité 1/2. Calculer la probabilité d'être en 0 à l'instant n. En donner un équivalent en utilisant la formule de Stirling.