

Feuille 4

Exercice 1. Pour chacune des fonctions suivantes, dire si elle est convexe ou concave ou ni l'un ni l'autre

1. $f(x) = e^x - 1$ sur \mathbb{R} ;
2. $f(x_1, x_2) = x_1 x_2$ sur \mathbb{R}_{+*}^2
3. $f(x_1, x_2) = 1/(x_1 x_2)$ sur \mathbb{R}_{+*}^2
4. $f(x_1, x_2) = x_1/x_2$ sur \mathbb{R}_{+*}^2
5. $f(x_1, x_2) = x_1^2/x_2$ sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_{+*}$

Exercice 2. Trouver le rayon de la sphère de \mathbb{R}^3 centrée en $(1, 0, 2)$ tangente au plan d'équation $2x_1 + x_2 + x_3 = 1$.

Exercice 3. Trouver la valeur maximale de $f(x, y, z) = x - y + 2z$ sur la sphère $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ (par la méthode de Lagrange).

Exercice 4. On désire construire la plus grande boîte possible (en volume) de surface donnée S . Trouver les dimensions de cette boîte (c'est un pavé). Et si on souhaite doubler le fond pour le renforcer ?

Exercice 5. La température sur la sphère $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ est donnée par $T(x, y, z) = 2 + xz + y^2$. Trouver les points les plus chauds et les points plus froids.

Exercice 6. Les revenus de quatre ménages sont : 5, 3, 2, 1. Leurs fonctions d'utilité sont toutes identiques : $x \mapsto \sqrt{x}$. On souhaite distribuer une unité de revenu supplémentaire. Comment faut-il la répartir entre les quatre ménages pour que la somme des utilités soit la plus grande possible ?

Exercice 7. On considère un ensemble de n agents économiques. Ils ont tous la même fonction d'utilité $x \mapsto x^\alpha$. Pour quelle répartition des revenus la somme des fonctions d'utilité est-elle maximale ?

Exercice 8. On considère la fonction ϕ définie sur \mathbb{R}^2 par

$$\phi(x_1, x_2) = x_1^3 + 4x_1^2 - x_2^2 + 5x_1 + 4x_2.$$

Trouver les extrema de ϕ sur l'ensemble C défini par les contraintes

$$x_2 - x_1 \geq 2, \quad x_1 + x_2 \leq 3.$$

Exercice 9. Soit A et M les matrices suivantes

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

et b et v les vecteurs

$$b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad v = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Montrer que la fonction

$$J(x) = \frac{1}{2} \langle Ax, x \rangle - \langle b, x \rangle$$

sous la contrainte $Mx \leq v$ a un unique minimum global en un point que l'on déterminera.