Feuille 4

Exercice 1. Une fonction f définie sur un domaine D inclus dans $\mathbb{R}^d$ à valeur dans $\mathbb{R}$ est dite quasiconvexe si, pour tout α, l'ensemble

$$\{x \in D \ / \ f(x) \leq \alpha\}$$

est convexe. Montrer qu'une fonction convexe est quasiconvexe.

Exercice 2. Pour chacune des fonctions suivantes, dire si elle est convexe, concave, quasiconvexe ou quasiconcave (une fonction f est dite quasiconcave si $-f$ est quasiconvexe)

1. $f(x) = e^x - 1$ sur $\mathbb{R}$;
2. $f(x_1, x_2) = x_1 x_2$ sur $\mathbb{R}^2_{+*}$
3. $f(x_1, x_2) = 1/(x_1 x_2)$ sur $\mathbb{R}^2_{+*}$
4. $f(x_1, x_2) = x_1/x_2$ sur $\mathbb{R}^2_{+*}$
5. $f(x_1, x_2) = x_1^2/x_2$ sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_{+*}$
6. $f(x_1, x_2) = x_1^\alpha x_2^{1-\alpha}$ sur $\mathbb{R}^2_{+*}$

Exercice 3. On dit qu'une fonction f définie sur une partie convexe de $\mathbb{R}^d$ est log-concave si elle est à valeur strictement positive et si $\log f$ est concave. Montrer que les trois fonctions suivantes sont log-concaves

1. $f(x) = e^x/(1 + e^x)$ sur $\mathbb{R}$;
2. $f(x_1, x_2) = (1/x_1 + 1/x_2)^{-1}$ sur $\mathbb{R}^2_{+*}$;
3. $f(x_1, x_2) = x_1 x_2/(x_1 + x_2)$ sur $\mathbb{R}^2_{+*}$.

Exercice 4. Soit A une matrice définie positive de taille $d \times d$ et b un vecteur de $\mathbb{R}^d$. Montrer que la fonction

$$J(x) = \frac{1}{2}\langle Ax, x\rangle - \langle b, x\rangle$$

a un unique minimum global en un point que l'on déterminera.

Exercice 5. Trouver le rayon de la sphère de $\mathbb{R}^3$ centrée en $(1, 0, 2)$ tangente au plan d'équation $x_1 + x_2 + x_3 = 1$.

Exercice 6. Trouver la valeur maximale de $f(x, y, z) = x + z$ sur la sphère $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ (par la méthode de Lagrange).

Exercice 7. Trouver les longueurs des côtés pour qu'un triangle de périmètre donné soit d'aire maximale.

Exercice 8. On désire construire la plus grande boîte possible de surface donnée S. Trouver les dimensions de cette boîte (c'est un pavé). Et si on souhaite doubler le fond pour le renforcer ?

Exercice 9. La température sur la sphère $x^2+y^2+z^2 = 4$ est donnée par $T(x, y, z) = 2+xz+y^2$. Trouver les points les plus chauds et les points plus froids.

Exercice 10. Cet exercice a pour but de démontrer l'inégalité arithmético-géométrique :

$$\sqrt[n]{a_1 \cdot \ldots \cdot a_n} \leqslant \frac{a_1 + \cdots + a_n}{n} \quad \text{pour des nombres } \ a_i \geqslant 0$$

1. Utiliser la méthode de Lagrange pour trouver la valeur maximale de $f(x_1\,, \dots, x_n) = x_1^2 \cdots x_n^2$ sur la sphère de rayon $r > 0$: $x_1^2 + \cdots + x_n^2 = r^2$. Pourquoi f admet-elle une valeur maximale ?
2. Déduire de la question précédente que $x_1^2 \cdots x_n^2 \leqslant \left(\dfrac{x_1^2 + \cdots + x_n^2}{n} \right)^n$.
3. En déduire l'inégalité arithmético-géométrique.

Exercice 11. Les revenus de trois ménages sont : 2, 1, 1. Leurs fonctions d'utilité sont toutes identiques : $x \mapsto \sqrt{x}$. On souhaite distribuer une unité de revenu supplémentaire. Comment faut-il la répartir entre les trois ménages pour que la somme des utilités soit la plus grande possible ?

Exercice 12. On considère un ensemble de n agents économiques. Ils ont tous la même fonction d'utilité $x \mapsto x^\alpha$. Pour quelle répartition des revenus la somme des fonctions d'utilité est-elle maximale ?

Exercice 13. On considère la fonction ϕ définie sur $\mathbb{R}^2$ par

$$\phi(x_1, x_2) = x_1^3 + 4x_1^2 - x_2^2 + 5x_1 + 4x_2.$$

Trouver les extrema de ϕ sur l'ensemble C défini par les contraintes

$$x_2 - x_1 \geq 2, \quad x_1 + x_2 \leq 3.$$

Exercice 14. Soit A une matrice définie positive de taille $d \times d$, D une matrice $r \times d$ de rang r (avec $r \leq d$) et b et un vecteur de $\mathbb{R}^d$ et v un vecteur de $\mathbb{R}^r$. Montrer que la fonction

$$J(x) = \frac{1}{2}\langle Ax, x\rangle - \langle b, x\rangle$$

sous la contrainte $Dx = v$ a un unique minimum global en un point que l'on déterminera. Que se passe-t-il si on change la contrainte en $Dx \leq v$?